TANGLE DECOMPOSITIONS OF KNOTS AND LINKS

MAKOTO OZAWA

Introduction

3 次元球面内の 1 次元球面を結び目という。結び目理論の基本問題は主に二種類に分けられる。一つは結び目全体を研究対象とする問題であり、分類問題、補空間予想（これは C. McA. Gordon と J. Luecke により解決された。[8] を参照されたい。）、不変量などがある。もう一つは個々の結び目の性質などを研究する問題で、対称性、可逆性、素性（交代結び目 [23]、正結び目 [38] に関して解決されている。）、スライス性などの判別法が挙げられる。

これら二つの基本問題に対して、最も重要なものの一つに H. Schubert の素分解定理がある。これは結び目と 2 点で交わる 2 次元球面で分解していくと、最終的にいくつかの "素" な結び目に分解され、更にその分解は一意的というものである。

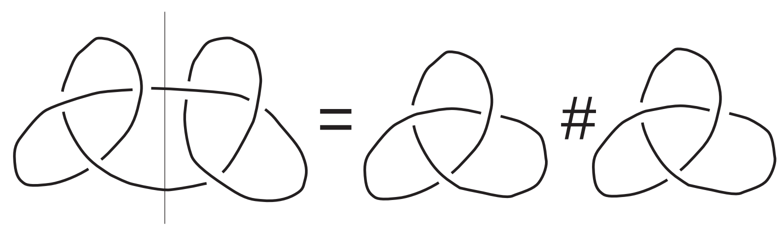

Figure 1. グラニー結び目は二つの右手系三葉結び目の連結和

従って、結び目を研究するには素な結び目のみを対象にすれば十分である。

結び目の素分解は 2 点で交わる 2 次元球面での分解であったが、更に 4 点で交わる 2 次元球面での分解を考えれば、素な結び目でも分解出来ることがある。

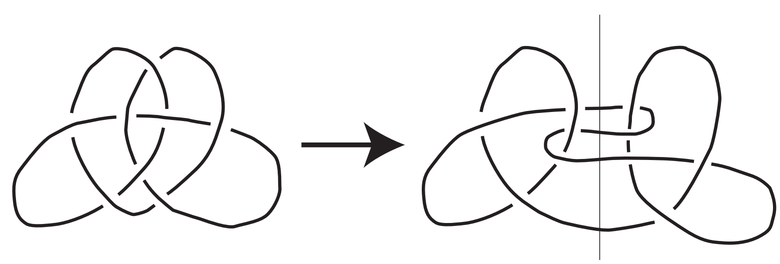

Figure 2. 8_{16} のタングル分解

The author is supported in part by Research Fellowships of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

タングル分解では、分解後の各因子はもはや結び目ではなく、3 次元球体内の 1 次元多様体となる。これが結び目のタングル分解と呼ばれるものであり、結び目の素分解が “こぶ” への分解であるのに対し、タングル分解は “固まり” への分解であると言える。

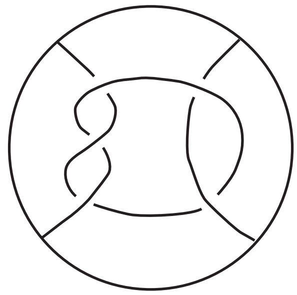

FIGURE 3. 8_{16} のタングル因子

すると素な結び目の中でも、特にタングル分解を持たない結び目にはどのようなものがあるのかが問題となってくる。これは三章、四章、七章で解説する。また、タングルに関して素でない結び目については、分解の一意性が成立するのか？どのようなタングルが因子として現れるのか？などが問題として挙げられる。これらは五章、六章で述べる。次章で簡単に歴史を振り返り、二章では必要となる定義を述べる。

1. HISTORY

3-sphere 内の compact 1-submanifold を *link* という。成分数が一つの link は特に *knot* と呼ばれる。結び目理論における基本定理として、任意の non-splittable link は connected sum に関して prime link に一意的に分解されることが知られている（[41], [10]）。これは、“自然数は有限個の素数の積に一意的に分解される” という整数論の基本定理に対応する。

1970 年、Conway により “Tangle” という概念が提案され、tangle regular presentation を用いて knot のリストを作る試みがされている（[4]）。それ以来、“Tangle” は主に knot と link の splittability, primeness, hyperbolicity を判定する為に使われてきた（[18], [20], [29], [30], [28], [43]）。

1982 年、Norwood により two generator knot が prime であることが証明された（[31]）。Norwood の証明は代数的なものであったが、Scharlemann は tunnel number one knot が two generator であることに注目し、tunnel number one knot が prime であることを幾何的に証明した（[39]）。更に、Scharlemann は tunnel number one knot が 2-string prime である（即ち、knot と 4 点で交わる 2-sphere で “prime” tangle に分解出来ない）ことを証明している（[39]）。これは、1995 年に Gordon と Reid により一般化され、任意の string 数に関して tunnel number one knot は “essential” tangle に分解されないことが示されている（[9]）。

一方 link に関して、1995 年 Jones により composite two generator link が Hopf link summand を持つことが証明された（[16]）。更に、Morimoto は tunnel number one link が composite である為の必要十分条件が、2-bridge knot と Hopf link の connected sum であることを証明した（[25]）。Gordon と Reid はこの現象に着目し、tunnel number one link が essential tangle に分解されるならば、“Hopf tangle” summand を持つことを証明した（[9]）。

two generator 又は tunnel number one knot/link は最も単純な補空間を許容するクラスであるが、それらを含むより広いクラスとして、3-sphere の genus two Heegaard surface 上に含まれる knot/link がある。これらは *double torus* と呼ばれる（[14], [15]）。1994 年、Morimoto は composite double torus knot が torus knot の connected sum であることを証明した（[26]）。

2. Definition

B を 3-ball とし、T を B 内に proper に埋め込まれた compact 1-submanifold とする。このとき、B と T との組 (B,T) を *tangle* という。T の arc 成分は *string* と呼ばれ、T が n 本の string を持つとき (B,T) を *n-string tangle* という。n-string tangle (B,T) が *trivial* であるとは、(B,T) が $(D\times I, \{x_1,\cdots,x_n\}\times I)$ に組として同相であるときをいう。ここで、D は disk で、x_i $(i=1,\cdots,n)$ は Int$D$ 内の点とする。(B,T) が *essential* であるとは、

1. $\partial B - \partial T$ が $B-T$ 内で incompressible
2. $B-T$ が irreducible
3. (B,T) が trivial 1-string tangle でない

を満たすときをいう（c.f. [9]）。(B,T) が *free* であるとは、$\pi_1(B-T)$ が free group のときをいう（[19]）。(B,T) が free である為の必要十分条件が、(B,T) の exterior $E(T)=\mathrm{cl}(B-N(T))$ が handlebody であることが知られている（[13, 5.2. Theorem]）。他の必要十分条件としては、$E(T)$ が closed incompressible surface を含まないことなどがある（[37, Lemma 2.2]）。また、free tangle は loop 成分を持たないことに注意したい。

K を 3-sphere S^3 内の knot 又は link とし、S を S^3 内の 2-sphere で K と $2n$ 点で交わるものとする。このとき、組 (S^3,K) は S によって二つの n-string tangle (B_1,T_1) と (B_2,T_2) に分解される（[40], [2]）。和 $(B_1,T_1)\cup_S(B_2,T_2)$ を K の *n-string tangle decomposition* といい、S を *n-string tangle decomposing sphere* という。

K の二つの n-string tangle decomposition $(B_1,T_1)\cup_S(B_2,T_2)$、$(C_1,R_1)\cup_P(C_2,R_2)$ が *isotopic* であるとは、isotopy $f: S^2\times I\to S^3$ が存在して、$f(S^2\times 0)=S$、$f(S^2\times 1)=P$、$f((S^2\cap K)\times I)\subset K$ を満たすときをいう。

n-string tangle decomposition $(B_1,T_1)\cup_S(B_2,T_2)$ が *trivial*（resp. *essential*, *free*）であるとは、(B_1,T_1) と (B_2,T_2) が共に trivial（resp. essential, free）のときをいう。一般に、trivial n-string tangle decomposition は *n-bridge decomposition* と呼ばれ、n の最少数を K の *bridge index* という（[42]）。K が *n-string composite* であるとは、K が essential n-string tangle decomposition を持つときをいい、K が n-string composite でないとき *n-string prime* という（[1], [9]）。特に $n=1$ の場合、それぞれ *composite*、*prime* と呼ばれる。

K が essential 1-string tangle decomposition $(B_1,T_1)\cup_S(B_2,T_2)$ を持つとき、trivial 1-string tangle (B_i',T_i') $(i=1,2)$ をそれぞれ (B_i,T_i) に貼り合わせることで、二つの link $(S^3,K_i)=(B_i,T_i)\cup(B_i',T_i')$ $(i=1,2)$ を得る。このとき、K は K_1 と K_2 の *connected sum* と呼び、$K=K_1\#K_2$ と表す。“自然数は有限個の素数の積に一意的に分解される” という整数論の基本定理に対応して、knot/link に対しても次が成り立つ。

Theorem 2.1. ([41], [10]) *non-split link は connected sum に関して有限個の prime link に一意的に分解される。*

K の exterior $E(K)=\mathrm{cl}(S^3-N(K))$ 内の properly embedded mutually disjoint arc $\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ で $\mathrm{cl}(E(K)-N(\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_t))$ が handlebody となるもののうち、最小の arc の本数 t を K の *tunnel number* といい、$t(K)$ で表す（[3]）。このよう

な $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_t\}$ は K の *unknotting tunnel system* と呼ばれる。定義より $E(K)$ は $t(K)+1$ の Heegaard splitting を許容することが分かる。$t(K)=0$ である為の必要十分条件は K が trivial knot であることである。従って、tunnel number one knot/link は最も単純な exterior、即ち (genus two handlebody)$\cup$(2-handle) を持つ。しかしながら、2-bridge knot/link や高々2 成分の torus knot/link は tunnel number one であり、そこそこ広いクラスであることが分かる。

S^3 の Heegaard surface で K を含むもののうち、最小の genus を K の h-genus といい、$h(K)$ で表す（[26]）。$h(K)=0$ である為の必要十分条件は K が trivial であることである。$h(K)=1$ のとき K は *torus knot/link*、$h(K)=2$ のとき *double torus knot/link* と呼ばれる。

tunnel number one knot/link K とその unknotting tunnel γ に対して、genus two closed surface $\partial N(K\cup\gamma)$ は定義より S^3 の Heegaard surface である。また、K は自然にこの surface 上に isotope することが出来る。従って、$t(K)=1$ ならば $h(K)\leq 2$ であることが分かる。一般に、tunnel number と h-genus との間に次の関係が成り立つ。

Proposition 2.2. ([26], [17, Proposition 15.3.9])

$$t(K)+1-|K| \leq h(K) \leq t(K)+1$$

ここで、$|K|$ は K の成分数とする。

F を K の Seifert surface とする。F が *free* であるとは、$\pi_1(S^3-F)$ が free group のときをいう。K の free Seifert surface のうちで最小の genus を *free genus* といい、$g_f(K)$ で表す（[24]）。free tangle と同様に、F が free である為の必要十分条件は $S^3-\mathrm{Int}N(F)$ が handlebody であることである。$N(F)$ は勿論 handlebody であるので、free Seifert surface F に対して $\partial N(F)$ は S^3 の Heegaard surface になっている。また、K は $\partial N(F)$ 上に自然に isotope することが出来るので、free genus と h-genus との間に次の関係が成り立つ。

Proposition 2.3.

$$h(K) \leq 2g_f(K)$$

従って、free genus one knot は唯一の genus one torus knot である trefoil を除いて double torus である。

Remark 2.4. 上の不等式で一般に等号は成立しない。例えば、(p,q)-torus knot $(p,q>0)$ の free genus は $(p-1)(q-1)/2$ である。また、double torus knot K に対して genus two Heegaard surface F 上 K が F を二つの成分に分離する場合は、$F-K$ の成分の閉包が K の Seifert surface を与えているが、一般に free とは限らない（c.f. [36]）。実際、$g_f(K)\geq 2$ となる double torus knot が存在するので、逆側の不等式 $g_f(K)\leq h(K)/2$ は一般に成立しない。

Remark 2.5. 以上から、tunnel number one knot 及び free genus one knot は double torus であることが分かったが、これら二つのクラスは互いに包含関係にない。例えば、$(2,5)$-torus knot は tunnel number one であるが、free genus two である。一方、Montesinos knot $M(0;(3,1),(3,1),(3,1))$ は free genus one であるが、tunnel number two である（[27]）。

Montesinos tangle を n 個の slope β_i/α_i $(i=1,\cdots,n)$ rational tangle の "partial sum" として定義し、$T(\beta_1/\alpha_1,\cdots,\beta_n/\alpha_n)$ で表す（Figure 4）。

trivial n-string tangle $(D\times I, \{x_1,\cdots,x_n\}\times I)$ に、loop $\partial D\times\frac{1}{2}$ を $\mathrm{Int}B$ へ押し込んだものを加えた tangle を *n-string Hopf tangle* といい、H_n で表す（Figure 5）。

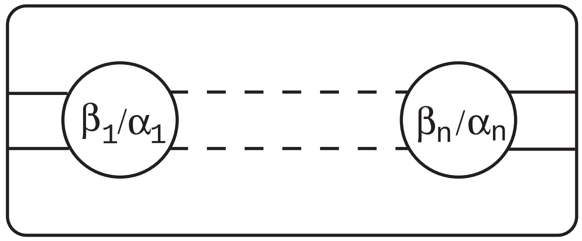

FIGURE 4. Montesinos tangle $T(\beta_1/\alpha_1, \cdots, \beta_n/\alpha_n)$

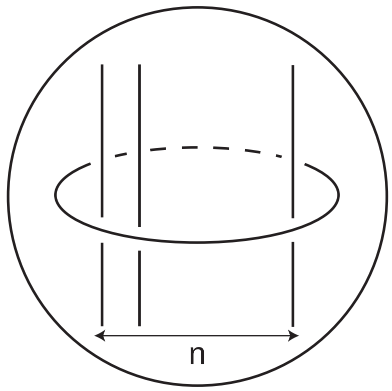

FIGURE 5. n-string Hopf tangle H_n

$(n-1)$-string Hopf tangle に trivial arc を一本加えた tangle を *n-string quasi Hopf tangle* といい、Q_n で表す。quasi Hopf tangle は、trivial arc と trivial loop を繋ぐ arc γ を情報として含んでいると見なす（Figure 6)。

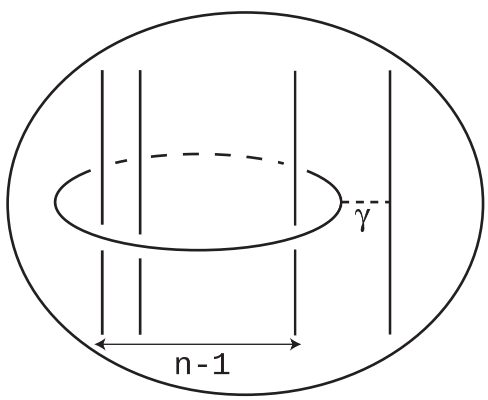

FIGURE 6. n-string quasi Hopf tangle Q_n

3. Tunnel number one knot/link

tunnel number one knot については、Gordon と Reid により完全に解決されている。

Theorem 3.1. ([9]) *Tunnel number one knots are n-string prime for all n.*

tunnel number one link については、まず Morimoto により composite の場合が解決された。

Theorem 3.2. ([25]) *A tunnel number one link is composite if and only if L is a connected sum of the Hopf link and a 2-bridge knot.*

更に、Morimoto は unknotting tunnel の位置も決定している。

Theorem 3.3. ([25]) *A composite tunnel number one link L can be decomposed into the union of the 2-string quasi Hopf tangle and the 2-string trivial tangle. Moreover, any unknotting tunnel for L is isotopic to γ.*

Hopf link を summand に持つという現象が Gordon と Reid により拡張された。

Theorem 3.4. ([9]) *If a tunnel number one link is n-string composite, then it can be decomposed into the m-string Hopf tangle for some m $(\leq n)$ and an essential tangle.*

tunnel number one link がある n に関して n-string composite ならば、Gordon-Reid の定理により、unknotted component を持つことが分かる。このような link に対して、Morimoto の定理を拡張することが出来た。

Theorem 3.5. ([7]) *Let $L = K_1 \cup K_2$ be a tunnel number one link. Suppose that at least one component of L, K_2 say, is unknotted. Then L can be decomposed into the $(n+1)$-string quasi Hopf tangle and the $(n+1)$-string trivial tangle, where n is the wrapping number of K_1 with respect to the exterior of K_2. Furthermore the position of an unknotting tunnel of L is isotopic to γ.*

Morimoto の定理では 2-bridge knot が connected summand として出てきたが、この一般化として次を得た。

Corollary 3.6. ([7]) *Let $L = K_1 \cup K_2$ be a tunnel number one link with K_2 unknotted. Then*

$$b(K_1) \leq n+1,$$

where n is the wrapping number of K_1 with respect to the exterior K_2.

4. Free genus one knot

任意の n に関して n-string prime な knot として、

- torus knot
- 2-bridge knot
- tunnel number one knot（[9]）
- Montesinos knot with length three（[32]）
- small knot, that is, knot whose exterior does not contain an essential closed surface（[5]）
- knot with irreducible non-sufficiently large double branched cover（[1]、[22]）
- satellite knot with the pattern which contains no essential tangle and the companion which admits no essential tangle decomposition（[11]）

が知られている。これらに新たなクラスを追加することが出来た。

Theorem 4.1. ([22]) *Free genus one knots are n-string prime for all n.*

Remark 4.2. ある n に関して n-string composite な genus one knot が存在する。例えば、n-string composite knot の doubled knot は常に $2n$-string composite である([21])。

5. Double torus knot/link

Morimoto により composite tunnel number one link、composite double torus knot の特徴付けがされている。これを double torus link まで拡張することが出来た。

L を S^3 内の unknotted torus H に含まれる torus knot 又は link とし、C を S^3-H の一方の成分の core loop とする。このとき、link $L \cup C$ を *cabled Hopf link* という。

Theorem 5.1. ([36]) *Let L be a double torus knot or link in S^3. Then L is 1-string composite if and only if L is either*

- *a cabled Hopf link as a connected sum of Hopf link,*
- *a connected sum of a cabled Hopf link and a 2-bridge knot, where the connected sum is performed at C, or*
- *a connected sum of two torus links.*

2-string composite double torus knot/link に関して次を示すことが出来た。

Theorem 5.2. ([36]) *Let L be a knot or link in S^3 which is contained a genus two Heegaard surface F of S^3. Suppose there exists a 2-sphere S in S^3 which gives an essential 2-string tangle decomposition of the pair (S^3, L) and intersects all components of L. Then there is an isotopy rel.L of S which makes S intersect F in a single simple closed curve.*

更に、once punctured torus 上の essential arc を調べることで 2-string composite knot が分類できている。この帰結として次を得る。

Corollary 5.3. ([36]) *Hyperbolic double torus knots are 2-string prime.*

6. Free tangle decomposition

free 2-string tangle decomposition を許容する knot/link は各 tangle が essential か否かで次のように分類することが出来る。

1. 2-bridge knot/link
2. tunnel number one knot/link
3. knot/link with essential free 2-string tangle decomposition

3 のクラスの knot に関して essential tangle decomposition が一意的であることを証明することが出来た。

Theorem 6.1. ([35]) *Let K be a knot which admits an essential free 2-string tangle decomposition. Then any essential 2-string tangle decomposition of K is unique up to isotopy, and K is n-string prime for all $n \neq 2$.*

link に関しては、non-isotopic essential 2-string tangle decomposition を許容するタイプの特徴付けを与えることができた。

Theorem 6.2. ([34]) *Let L be a link in S^3 which admits an essential free 2-string tangle decomposition. Then L admits non-isotopic essential 2-string tangle decompositions if and only if L is equivalent to a 2-component Montesinos* *link* $M(0;(\alpha_1,\beta_1),(2,1),(\alpha_2,\beta_2),(2,1))$*, where* α_i *and* β_i *are coprime integers and* α_i *is an odd integer greater than one* $(i=1,2)$*. Moreover, if* L *is the Montesinos link, then* L *admits exactly two essential free* 2*-string tangle decompositions* $T(\beta_1/\alpha_1,1/2)\cup T(\beta_2/\alpha_2,1/2)$ *and* $T(1/2,\beta_2/\alpha_2)\cup T(1/2,\beta_1/\alpha_1)$ *up to isotopy and any* 2*-string tangle decomposition of* L *is isotopic to one of those two.*

7. Satellite knot/link

V_0 を solid torus とし、K_0 を $\mathrm{Int}V_0$ 内の link とする。組 (V_0,K_0) が *essential* であるとは、K_0 が V_0 の core に ambient isotopic でなく、V_0-K_0 が irreducible のときをいう。V_1 を S^3 内の knot K_1 の tubular neighborhood とし、$h:V_0\to V_1$ を homeomorphism とする。このとき、$K=h(K_0)$ が *satellite* であるとは、(V_0,K_0) が essential で、K_1 が non-trivial のときをいう。K_1 は K の *companion knot*、(V_0,K_0) は *pattern* と呼ばれる。

satellite knot/link は companion knot の性質をしばしば反映するが、tangle decomposition に関しても、pattern に essential tangle が含まれない場合は、companion knot の性質を引き継ぐことが次の定理によって分かる。

Theorem 7.1. ([11]) *Let* K *be a satellite knot or link in* S^3 *with a pattern* (V,K)*. Suppose there is no essential tangle in* (V,K) *and* K *admits an essential tangle decomposition. Then the decomposing sphere* S *can be isotoped in* (S^3,K) *so that it gives an essential tangle decomposition of the core of* V *if* $|S\cap K|$ *is minimum over all essential tangle decompositions of* K*.*

従って、satellite knot/link が essential tangle decomposition を持てば、pattern 内に essential tangle が存在するか又は companion knot が essential tangle decomposition を持つことが分かる。逆に、pattern 内の essential tangle はそのまま satellite knot の essential tangle decomposition を与えており、companion knot の essential tangle decomposing sphere は pattern 内の meridian disk で satellite knot/link との交わりが最小になるものを貼り合わせることで satellite knot/link の essential tangle decomposing sphere に拡張できる。従って次を得る。

Corollary 7.2. *Let* K *be a satellite knot or link with a pattern* (V,K)*. Then* K *is* n*-string prime for all* n *if and only if there is no essential tangle in* (V,K) *and the core of* V *is* n*-string prime for all* n*.*

8. Thin position

S^3 内の knot/link K に対して、Gabai と Thurston は次のように thin position を定めた([6])。

$h:S^3-\{\pm\infty\}=S^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を、projection で $h|_K$ が Morse function になるものとする。$c_1<\cdots<c_n$ を h の critical value とし、各 i $(i=1,\cdots,n)$ に対し $c_i<r_i<c_{i+1}$ を満たすように regular value r_i を選ぶ。写像 $f:\{r_1,\cdots,r_{n-1}\}\to\mathbb{Z}$ を $f(r_i)=|K\cap h^{-1}(r_i)|$ で定める。h の *width* を $w(h)=\Sigma_i(f(r_i))$ で、K の *width* を $w(K)=\min\{w(h)\}$ で定める。ここで、min は K の ambient isotopy で採る。$w(K)$ を与える K の位置を *thin position* という。$f(r_{i-1})<f(r_i),\ f(r_i)>f(r_{i+1})$ のとき $h^{-1}(r_i)$ を *thick sphere*、$f(r_{i-1})>f(r_i),\ f(r_i)<f(r_{i+1})$ のとき $h^{-1}(r_i)$ を *thin sphere* という。thin sphere を持たない位置を *bridge position* という。このとき、K は唯一の thick sphere により bridge tangle decomposition されている。

Remark 8.1. thick sphere を利用することで、Gabai は Property R を([6])、Gordon と Luecke は補空間予想を解決している([8])。

Thompson は thin position が essential tangle decomposition と関係することを発見した。

Theorem 8.2. ([44]) *Let K be a knot in thin position. Then K is also a bridge position or K admits an essential tangle decomposition.*

Remark 8.3. 従って、thin position が bridge position でなければ essential tangle decomposition を許容することが分かるが、逆は一般に成立しない。例えば、8_{16} は prime 3-bridge knot であるから thin position は bridge position でなければならないが、essential free 2-string tangle decomposition を許容する knot で crossing number が最小のものである。

Thompson が与えた証明では、thin position が bridge position でないとき最も上にある thin sphere を compression していき、essential tangle decomposing sphere の存在を示しているが、更に Heath と Kobayashi は上側へは incompressible であることを示している（[12]）。一般に、次が成り立つと予想する。

Conjecture 8.4. 全ての *thin sphere* は *essential tangle decomposition* を与える。

特に、1-string composite の場合は逆も成立すると予想したい。即ち、composite knot $K = K_1 \# K_2$ を thin position に置くとき、

Conjecture 8.5. *decomposing sphere* は *thin sphere* として現れる。

この予想が解決されれば、次の帰結が得られる。

Corollary 8.6.

$$w(K_1) = w(K_1) + w(K_2) - 2$$

References

1. S. A. Bleiler, *Knots prime on many strings*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984) 385–401.
2. M. Brown, *A proof of the generalized Schöenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960) 74–76.
3. B. E. Clark, *The Heegaard genus of manifolds obtained by surgery on links and knots*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **3** (1980) 583–589.
4. J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, In: Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970, 329–358.
5. M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke and P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. **125** (1987) 237–300.
6. D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds III*, J. Differential Geometry **26** (1987) 479–536.
7. H. Goda, M. Ozawa and M. Teragaito, *On tangle decompositions of tunnel number one links*, J. Knot Theory and its Ramification **8** (1999) 299–320.
8. C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 371–415.
9. C. McA. Gordon and A. W. Reid, *Tangle decompositions of tunnel number one knots and links*, J. Knot Theory and its Ramification **4** (1995) 389–409.
10. Y. Hashizume, *On the uniqueness of the decomposition of a link*, Osaka Math. J. **10** (1958) 283–300, Erratum ibid. **11** (1959) 249.
11. C. Hayashi, H. Matsuda and M. Ozawa, *Tangle decompositions of satellite knots*, Revista Mathematica Complutense Vol. **12**, (1999) 417–437.
12. D. J. Heath and T. Kobayashi, *Essential tangle decomposition from thin position of a link*, Pacific J. Math. **179** (1997) 101-117.
13. J. Hempel, 3-*manifolds*, Ann. of Math. Studies No. **86**, Princeton University Press, 1976.
14. P. Hill, *On double-torus knots (I)*, J. Knot Theory and its Ramification **8** (1999) 1009–1048.
15. P. Hill and K. Murasugi, *On double-torus knots (II)*, to appear in J. Knot Theory and its Ramification.

16. A. Jones, *Composite two-generator links have a Hopf link summand*, Topology Appl. **67** (1995) 165–178.
17. A. Kawauchi, *A survey of Knot Theory*, Birkhäuser Verlag, 1996.
18. R. C. Kirby and W. B. R. Lickorish, *Prime knots and concordance*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **86** (1979) 437–441.
19. T. Kobayashi, *A construction of arbitarily high degeneration of tunnel numbers of knots under connected sum*, J. Knot Theory and its Ramification **3** (1994) 179–186.
20. W. B. R. Lickorish, *Prime knots and tangles*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981) 321–332.
21. H. Matsuda, *Tangle decompositions of doubled knots*, Tokyo J. Math. **21** (1998) 247–253.
22. H. Matsuda and M. Ozawa, *Free genus one knots do not admit essential tangle decompositions*, J. Knot Theory and its Ramification **7**, 945–953.
23. W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984) 37–44.
24. Y. Moriah, *On the free genus of knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987) 373–379.
25. K. Morimoto, *On composite tunnel number one links*, Topology Appl. **59** (1994) 59–71.
26. K. Morimoto, *On the additivity of h-genus of knots*, Osaka J. Math. **31** (1994) 137–145.
27. K. Morimoto, M. Sakuma and Y. Yokota, *Identifying tunnel number one knots*, J. Math. Soc. Japan **48** (1996) 667–688.
28. R. Myers, *Homology cobordisms, link concordances, and hyperbolic 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **273** (1983) 75–92.
29. Y. Nakanishi, *Primeness of links*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **9** (1981) 415–440.
30. Y. Nakanishi, *Prime and simple links*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **11** (1981) 257–258.
31. F. H. Norwood, *Every two generator knot is prime*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982) 143–147.
32. U. Oertel, *Closed incompressible surfaces in complements of star links*, Pacific J. Math. **111** (1984) 209–230.
33. M. Ozawa, *Tangle decompositions of knots and links*, A dissertation submitted for the degree of doctor of science at Waseda university, June 1999.
34. M. Ozawa, *Uniqueness of essential free tangle decompositions of knots and links*, Proceedings of Knots 96 edited by Shin'ichi Suzuki, World Scientific Publ. Co. (1997) 500–512.
35. M. Ozawa, *On uniqueness of essential tangle decompositions of knots with free tangle decompositions*, in Proc. Appl. Math. Workshop **8**, ed. G. T. Jin and K. H. Ko, KAIST, Taejon (1998) 227–232.
36. M. Ozawa, *Tangle decompositions of double torus knots and links*, J. Knot Theory and its Ramification **8** (1999) 931–939.
37. M. Ozawa, *Synchronism of an incompressible non-free Seifert surface for a knot and an algebraically split closed surface in the knot complement*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000) 919–922.
38. M. Ozawa, *Closed incompressible surfaces in the complements of positive knots*, preprint submitted to Comment. Math. Helv.
39. M. Scharlemann, *Tunnel number one knots satisfy the Poenaru conjecture*, Topology Appl. **18** (1984) 235–258.
40. A. Schöenflies, *Beitrage zur Theorie der Punktmengen III*, Math. Ann. **62** (1906) 286–328.
41. H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. KI. **3** (1949) Abh: 57–104.
42. H. Schubert, *Über eine Numerische Knoteninvariante*, Math. Z. **61** (1954) 245–288.
43. T. Soma, *Hyperbolic, fibred links and fibre concordance*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **96** (1984) 283–294.
44. A. Thompson, *Thin position and bridge number for knots in the* 3*-sphere*, Topology **36** (1996) 505–507.

Department of Mathematics, School of Education, Waseda University, Nishiwaseda 1-6-1, Shinjuku-ku, Tokyo 169-8050, Japan

E-mail address: ozawa@musubime.com