

手を動かして学ぶ位相幾何学 II

グラフ平面性から埋め込み障害へ

2026 年度 早稲田大学「数学特論 7」

講義ノート・練習問題・模範解答

小沢 誠

2026 年 10 月 6 日

目次

第 I 部 講義ノート編	xiv
はじめに	xv
既習事項の要点	xvi
群の表示	xvi
ホモロジー群の定義	xvi
完全系列の読み方	xvi
マイヤー・ヴィートリス完全系列	xvii
スミス標準形の読み方	xvii
第 0 章 埋め込み問題の展望	xviii
第 1 章 埋め込み問題への導入	1
1.1 本章の目標	1
1.2 埋め込みとは何か	2
1.3 埋め込み可能性と補空間	3
1.4 ジョルダン曲線定理	4
1.5 ジョルダン曲線定理の証明の考え方	4
1.6 ジョルダン－シェーンフリースの定理	5
1.7 ジョルダン－ブラウアー分離定理	6
1.8 3次元で起こる現象	7
1.9 4つの定理・例の比較	8
1.10 埋め込み不可能性とは何か	8
1.11 学習目標の確認	10
1.12 練習問題	10
1.13 次章への橋渡し	11
第 2 章 単体的複体と多面体の復習	12
2.1 本章の目標	12
2.2 単体：点・線分・三角形・四面体の一般化	13
2.3 面	14
2.4 単体的複体	14

2.5	多面体と単体分割	15
2.6	抽象的単体複体	16
2.7	重心細分	17
2.8	単体写像と PL 写像	18
2.9	開星と単体近似	19
2.10	単体近似定理	19
2.11	具体例：線分を三角形の中へ写す	20
2.12	埋め込み問題への応用	20
2.13	学習目標の確認	20
2.14	練習問題	21
2.15	次章への橋渡し	21
第 3 章	平面的グラフとオイラーの公式	23
3.1	本章の目標	23
3.2	グラフを 1 次元単体的複体として見る	24
3.3	平面的グラフと平面グラフ	25
3.4	平面グラフの面	25
3.5	オイラーの公式	26
3.6	辺数評価	27
3.7	完全グラフ K_5 の非平面性	28
3.8	完全二部グラフ $K_{3,3}$ の非平面性	29
3.9	細分とクラトフスキーの定理への入口	29
3.10	発展的補足：ファン・カンペン障害の直感	30
3.11	学習目標の確認	30
3.12	練習問題	31
3.13	次章への橋渡し	31
第 4 章	クラトフスキーの定理の証明	33
4.1	本章の目標	33
4.2	クラトフスキーの定理の復習	34
4.3	証明のための基本補題	35
4.4	カット頂点とブロック	36
4.5	2-連結グラフと 3-連結グラフ	37
4.6	証明の全体戦略	38
4.7	最小反例は 2-連結である	38
4.8	次数 2 の頂点を持たないこと	39
4.9	3-連結グラフの場合：縮約と復元	40
4.10	2-連結だが 3-連結でない場合	41
4.11	1-連結の場合	43
4.12	証明のまとめ	43
4.13	発展：高い種数の曲面への埋め込み	43

4.14	曲面上のグラフ埋め込み	44
4.15	閉曲面上の禁止マイナーと有限性	45
4.16	回転系と曲面埋め込みの組合せデータ	45
4.17	学習目標の確認	46
4.18	練習問題	46
4.19	次章への橋渡し	47
第 5 章	高次元ユークリッド空間への埋め込み	48
5.1	本章の目標	48
5.2	アフィン結合とアフィン包	49
5.3	アフィン独立と一般の位置	49
5.4	線形埋め込み定理	50
5.5	一般の位置の定理	52
5.6	次元の数え上げ	52
5.7	臨界次元 $m = 2k$	53
5.8	削除積と差の写像	54
5.9	ファン・カンペン障害の考え方	54
5.10	削除積の商とガウス写像	55
5.11	交点コチェインとしての障害	56
5.12	ファン・カンペン – フローレスの定理	57
5.13	本章のまとめ	58
5.14	学習目標の確認	58
5.15	練習問題	58
第 6 章	ホモロジー群と埋め込み障害	60
6.1	本章の目標	60
6.2	向き付けられた単体	61
6.3	鎖群	61
6.4	境界作用素	62
6.5	境界の境界は 0	62
6.6	サイクル、バウンダリ、ホモロジー群	63
6.7	例：円周のホモロジー	64
6.8	例：2 つの頂点と 2 本の辺からなる円周	64
6.9	ベッチ数とオイラー標数	65
6.10	グラフと曲面の基本例	66
6.11	トーションと埋め込み障害	66
6.12	学習目標の確認	67
6.13	練習問題	67
6.14	次章への橋渡し	68
第 7 章	S^3 に埋め込まれた部分多様体のホモロジー	69

7.1	本章の目標	69
7.2	完全系列	70
7.3	マイヤー・ヴィートリス完全系列	70
7.4	つなぎ準同型の直感	71
7.5	つなぎ準同型の構成	71
7.6	球面のホモロジーへの応用	72
7.7	余核と短い完全系列	72
7.8	S^3 内の部分多様体と外部	73
7.9	トーシンの消滅	74
7.10	例：ソリッドトーラスと結び目外部	75
7.11	閉曲面の場合	76
7.12	コホモロジーの最小限の準備	76
7.13	アレクサンダー双対性	78
7.14	双対性と多重分岐曲面への準備	80
7.15	発展：ジョルダン閉曲線定理との関係	80
7.16	学習目標の確認	80
7.17	練習問題	81
7.18	次章への橋渡し	81
第 8 章	多重分岐曲面と S^3 への埋め込み障害	82
8.1	本章の目標	82
8.2	多重分岐曲面の復習	83
8.3	構成データとしての多重分岐曲面	85
8.4	近傍同値と正則近傍	85
8.5	代数的次数	86
8.6	埋め込みから双対グラフを作る	87
8.7	メリディアンとホモロジーの関係式	88
8.8	代数的次数行列	89
8.9	代数的次数行列とホモロジー群	90
8.10	例題：スミス標準形によるトーション判定	92
8.11	代数の補題	93
8.12	埋め込み不可能性の判定定理	94
8.13	例：実射影平面	95
8.14	実射影平面の詳細な読み方	95
8.15	臨界的複体への応用	96
8.16	学習目標の確認	97
8.17	練習問題	97
8.18	次章への橋渡し	98
第 9 章	多重分岐曲面の種数	99
9.1	本章の目標	99

9.2	通常の曲面の種数	100
9.3	正則近傍の境界種数	100
9.4	正則多重分岐曲面	101
9.5	正則近傍の作り方	102
9.6	多重分岐曲面の近傍種数	103
9.7	ヒーガード種数との関係	103
9.8	例：ブランチをもたない場合	104
9.9	例：一つのブランチに複数の円板が集まる場合	105
9.10	種数とホモロジー	105
9.11	種数と埋め込み障害	106
9.12	正則性が重要な理由	106
9.13	埋め込み可能種数と正則性	107
9.14	分岐数・セクター数による上からの評価	108
9.15	多重分岐曲面のマイナー	109
9.16	学習目標の確認	110
9.17	練習問題	110
9.18	次章への橋渡し	111
第 10 章	種数と埋め込み障害	112
10.1	本章の目標	112
10.2	正則近傍の種数	113
10.3	境界成分数と種数の関係	113
10.4	多重分岐曲面のオイラー標数	114
10.5	最小種数と最大種数	115
10.6	正則近傍の取り方	116
10.7	境界成分をたどる方法	116
10.8	例：閉曲面の場合	117
10.9	例：グラフの正則近傍との類比	118
10.10	種数とホモロジーの制約	118
10.11	種数だけでは十分でない	119
10.12	模式例：種数範囲による判定	119
10.13	最大種数・最小種数の意味	120
10.14	埋め込み障害としての使い方	120
10.15	クラトフスキーの定理との比較	121
10.16	埋め込み可能種数による下からの評価	121
10.17	補足：グラフの曲面への埋め込み	123
10.18	グラフの種数と $G \times S^1$ の種数	123
10.19	学習目標の確認	124
10.20	練習問題	125
10.21	次章への橋渡し	126

ブリッジング・ノート：種数から直積型複体へ	127
第 11 章 グラフと円周の直積	128
11.1 本章の目標	128
11.2 直積空間の復習	129
11.3 セル構造	130
11.4 多重分岐曲面としての $G \times S^1$	130
11.5 ブランチの次数	131
11.6 オイラー標数とホモロジー	131
11.7 平面的グラフから得られる埋め込み	133
11.8 非平面的グラフの場合	133
11.9 グラフの平面性との対応	134
11.10 $K_5 \times S^1$ の見方	135
11.11 $K_{3,3} \times S^1$ の見方	135
11.12 なぜ円周との直積を考えるのか	136
11.13 臨界性への橋渡し	136
11.14 低次元の臨界複体	137
11.15 $K_5 \times S^1$ と臨界性	138
11.16 学習目標の確認	138
11.17 練習問題	138
11.18 次章への橋渡し	139
第 12 章 臨界的複体の具体例	140
12.1 本章の目標	140
12.2 臨界的複体の復習	141
12.3 臨界性の三つの水準	142
12.4 対象となる複体 $(G \times S^1) \cup H$	142
12.5 縮約写像	143
12.6 縮約グラフが平面的なら元の複体は埋め込める	143
12.7 クラトフスキーの定理の適用	144
12.8 面条件による埋め込み判定	145
12.9 臨界性の判定条件	146
12.10 三つの障害機構	147
12.11 分類定理	149
12.12 多重分岐曲面との接続	150
12.13 ホモロジーによる補助的な検出	151
12.14 例：接続行列から現れるトーション	152
12.15 学習目標の確認	153
12.16 練習問題	153
12.17 次章への橋渡し	154

第 13 章 埋め込み型と最小障害	155
13.1 本章の目標	155
13.2 二つの臨界性	156
13.3 埋め込み型の半順序	156
13.4 局所可埋め込み性とリンク判定	157
13.5 錐障害は埋め込み型として臨界的である	158
13.6 局所的には無害だが大域的に埋め込めない例	158
13.7 局所可埋め込み複体の表面層別	159
13.8 基本簡約と有限停止	159
13.9 簡約された障害から臨界型へ	160
13.10 主定理	161
13.11 決定可能性とアルゴリズム	161
13.12 障害集合は無限である	162
13.13 3 次元および高次元の型	162
13.14 今後の問題	163
13.15 学習目標の確認	163
13.16 練習問題	163
13.17 次章への橋渡し	164
第 14 章 まとめと発展問題	165
14.1 本章の目標	165
14.2 本巻の全体像	166
14.3 クラトフスキーの定理から 3 次元版クラトフスキー計画へ	167
14.4 古典的臨界性とその限界	167
14.5 埋め込み型による臨界性の再定義	168
14.6 臨界的障害型の存在定理	169
14.7 $(G \times S^1) \cup H$ 型複体の分類	170
14.8 多重分岐曲面・種数・ホモロジーの役割	171
14.9 到達度確認の観点	172
14.10 3 次元版クラトフスキー計画の現状と展望	172
14.11 卒業研究に向けた問題	172
14.12 修士研究に向けた問題	174
14.13 練習問題	175
14.14 本巻の結論	176
第 II 部 模範解答編	177
解答編の使い方	178
第 1 章 第 1 章 埋め込み問題への導入 の解答	179
第 1 章 問題 1	179

第 1 章 問題 2	179
第 1 章 問題 3	180
第 1 章 問題 4	180
第 1 章 問題 5	181
第 1 章 問題 6	181
第 1 章 問題 7	182
第 1 章 問題 8	182
第 1 章 問題 9	182
第 1 章 問題 10	183
第 2 章 第 2 章 単体的複体と多面体の復習 の解答	184
第 2 章 問題 1	184
第 2 章 問題 2	184
第 2 章 問題 3	185
第 2 章 問題 4	185
第 2 章 問題 5	186
第 2 章 問題 6	186
第 2 章 問題 7	187
第 2 章 問題 8	187
第 2 章 問題 9	188
第 2 章 問題 10	188
第 3 章 第 3 章 平面的グラフとオイラーの公式 の解答	189
第 3 章 問題 1	189
第 3 章 問題 2	189
第 3 章 問題 3	190
第 3 章 問題 4	190
第 3 章 問題 5	190
第 3 章 問題 6	191
第 3 章 問題 7	191
第 3 章 問題 8	192
第 3 章 問題 9	192
第 3 章 問題 10	193
第 3 章 問題 11	193
第 4 章 第 4 章 クラトフスキーの定理の証明 の解答	194
第 4 章 問題 1	194
第 4 章 問題 2	194
第 4 章 問題 3	195
第 4 章 問題 4	195
第 4 章 問題 5	196

第 4 章 問題 6	196
第 4 章 問題 7	197
第 4 章 問題 8	197
第 4 章 問題 9	198
第 5 章 第 5 章 高次元ユークリッド空間への埋め込み の解答	199
第 5 章 問題 1	199
第 5 章 問題 2	199
第 5 章 問題 3	200
第 5 章 問題 4	200
第 5 章 問題 5	200
第 5 章 問題 6	201
第 5 章 問題 7	201
第 5 章 問題 8	202
第 5 章 問題 9	202
第 5 章 問題 10	203
第 6 章 第 6 章 ホモロジー群と埋め込み障害 の解答	204
第 6 章 問題 1	204
第 6 章 問題 2	204
第 6 章 問題 3	205
第 6 章 問題 4	205
第 6 章 問題 5	206
第 6 章 問題 6	206
第 6 章 問題 7	206
第 6 章 問題 8	207
第 6 章 問題 9	207
第 7 章 第 7 章 S^3 に埋め込まれた部分多様体のホモロジー の解答	208
第 7 章 問題 1	208
第 7 章 問題 2	208
第 7 章 問題 3	209
第 7 章 問題 4	209
第 7 章 問題 5	209
第 7 章 問題 6	210
第 7 章 問題 7	210
第 7 章 問題 8	211
第 7 章 問題 9	211
第 7 章 問題 10	211
第 7 章 問題 11	212
第 8 章 第 8 章 多重分岐曲面と S^3 への埋め込み障害 の解答	213

第 8 章 問題 1	213
第 8 章 問題 2	213
第 8 章 問題 3	214
第 8 章 問題 4	214
第 8 章 問題 5	215
第 8 章 問題 6	215
第 8 章 問題 7	216
第 8 章 問題 8	216
第 9 章 第 9 章 多重分岐曲面の種数 の解答	218
第 9 章 問題 1	218
第 9 章 問題 2	218
第 9 章 問題 3	219
第 9 章 問題 4	219
第 9 章 問題 5	219
第 9 章 問題 6	220
第 9 章 問題 7	220
第 9 章 問題 8	220
第 9 章 追加問題 1	221
第 9 章 追加問題 2	221
第 9 章 追加問題 3	222
第 10 章 第 10 章 種数と埋め込み障害 の解答	223
第 10 章 問題 1	223
第 10 章 問題 2	223
第 10 章 問題 3	224
第 10 章 問題 4	224
第 10 章 問題 5	224
第 10 章 問題 6	225
第 10 章 問題 7	225
第 10 章 問題 8	225
第 10 章 追加問題 1	226
第 10 章 追加問題 2	226
第 10 章 追加問題 3	226
第 10 章 追加問題 4	227
第 11 章 第 11 章 グラフと円周の直積 の解答	228
第 11 章 問題 1	228
第 11 章 問題 2	228
第 11 章 問題 3	228
第 11 章 問題 4	229

第 11 章 問題 5	229
第 11 章 問題 6	229
第 11 章 問題 7	230
第 11 章 問題 8	230
第 11 章 追加問題 1	230
第 11 章 追加問題 2	231
第 11 章 追加問題 3	231
第 11 章 追加問題 4	231
第 12 章 第 12 章 臨界的複体の具体例 の解答	233
第 12 章 問題 1	233
第 12 章 問題 2	233
第 12 章 問題 3	234
第 12 章 問題 4	234
第 12 章 問題 5	234
第 12 章 問題 6	235
第 12 章 問題 7	235
第 12 章 問題 8	236
第 12 章 問題 9	236
第 12 章 問題 10	236
第 12 章 問題 11	237
第 12 章 問題 12	237
第 13 章 第 13 章 埋め込み型と最小障害 の解答	239
第 13 章 問題 1	239
第 13 章 問題 2	239
第 13 章 問題 3	240
第 13 章 問題 4	240
第 13 章 問題 5	240
第 13 章 問題 6	241
第 13 章 問題 7	241
第 13 章 問題 8	242
第 13 章 問題 9	242
第 13 章 問題 10	243
第 13 章 問題 11	243
第 13 章 問題 12	243
第 14 章 第 14 章 まとめと発展問題 の解答	245
第 14 章 問題 1	245
第 14 章 問題 2	245
第 14 章 問題 3	246

第 14 章 問題 4	246
第 14 章 問題 5	247
第 14 章 問題 6	247
第 14 章 問題 7	248
第 14 章 問題 8	248
第 14 章 問題 9	248
第 14 章 問題 10	249
第 14 章 問題 11	249
第 14 章 問題 12	250
 用語索引	 251
 参考文献	 253
 参考文献	 254
 あとがき	 256

第Ⅰ部

講義ノート編

はじめに

本書は、数学特論 7 の講義ノートをもとに、グラフの平面性から 2 次元複体の埋め込み障害へ進む専門書として再構成した原案である。第 I 巻「数学特論 4」で学んだ基本群、ホモロジー群、マイヤー・ヴィートリス完全系列を前提とし、それらを曲面上のグラフ埋め込み、ファン・カンペン障害、アレクサンダー双対性、多重分岐曲面、臨界的複体、埋め込み型の半順序へ応用することを目標とする。

主題は、ある空間が別の空間に交わずに入るか、すなわち埋め込み可能性である。前半ではグラフの平面性、クラトフスキーの定理、曲面上のグラフ埋め込みを扱う。中盤では単体的複体の高次元ユークリッド空間への埋め込み、削除積、ファン・カンペン障害、アレクサンダー双対性を学ぶ。後半では多重分岐曲面を中心対象として、代数的次数行列、正則近傍、種数、臨界的複体、相互 PL 埋め込みによる埋め込み型の半順序を扱う。

各章は学習単位 1 回分を想定している。定義、例、基本定理、証明の考え方、練習問題を含め、学部 3・4 年生が読み進められるように、必要な背景をその都度補う方針で書かれている。後半には、各章末の練習問題に対する詳しい解答をまとめて置いた。

本版では、学生が自習しやすいように、巻頭に「既習事項の要点」を置き、本文中には必須項目と発展項目の区別、研究ノート、模式図、計算例を追加した。書籍として読む場合は、各章冒頭の「必須」項目を学習目標として確認し、必要に応じて「発展」項目へ進むとよい。

本文中の補足ボックスについて

本版ではさらに、学部 3・4 年生が独力で読み進められるように、本文の流れとは別に次の 4 種類の補足ボックスを配置している。

- 「学習の指針」(灰色)：各章の冒頭などで、その章の読み方、前提となる既習事項、初出の概念を整理する。
- 「復習」「補足」(青色)：第 I 巻の事項やまだ学んでいない可能性のある事項を、その場で使える形で短くまとめる。巻頭の「既習事項の要点」も参照するとよい。
- 「具体例」(緑色)：直前の定義や定理を、実際に手を動かして最後まで計算できる小さな例で確かめる。
- 「直観」「注意」(灰色)：定義の背後にある幾何学的な見方や、つまづきやすい点を言葉で説明する。

これらのボックスは飛ばしても本文の論理はつながるが、初めて学ぶ読者は、定義や定理を読んだ直後に対応するボックスで手を動かして確認することを勧める。

既習事項の要点

本書は第 I 巻で学んだ基本群、ホモロジー群、完全系列を使う。なお、第 I 巻で「ねじれ（ねじれ部分群）」と呼んだものを本巻では「トーション」と呼び、第 I 巻でベッチ数を b_p と書いたものを本巻では β_p と書く。意味は同じである。ここでは、後の章で頻繁に使う最小限の事項をまとめておく。証明を忘れていても、以下の「読み方」が分かっているれば本文を追うことができる。

群の表示

生成元 $x_1, \dots, x_n$ と関係式 $r_1, \dots, r_m$ から作られる群を $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ と書く。アーベル群の場合には、関係式は整数係数一次式として扱える。たとえば $\langle a, b \mid 2a + b = 0, a - b = 0 \rangle_{\text{ab}}$ は、行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が与える関係式で割ったアーベル群である。多重分岐曲面のホモロジー計算では、このような「生成元と関係式」の言葉が基本になる。

ホモロジー群の定義

単体的複体 K に対し、 n 単体を形式的に足し合わせた自由アーベル群を $C_n(K)$ と書く。境界作用素 $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ は、向き付き単体の境界を符号付きで足し合わせる写像である。基本性質は $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ である。このため、 $Z_n(K) = \text{Ker } \partial_n$, $B_n(K) = \text{Im } \partial_{n+1}$ について $B_n(K) \subset Z_n(K)$ が成り立つ。第 n ホモロジー群は $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$ で定義される。直感的には、 Z_n は「境界をもたない鎖」、 B_n は「何かの境界として消える鎖」である。

完全系列の読み方

アーベル群と準同型の列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ が B で完全であるとは、 $\text{Im } f = \text{Ker } g$ が成り立つことをいう。たとえば $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ が完全なら f は単射であり、 $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ が完全なら g は全射である。

特に $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$ が完全なら、中央の写像は同型を与える。第 7 章では、この形から $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ を得る。

マイヤー・ヴィートリス完全系列

空間 X が $X = A \cup B$ と分解されるとき、ホモロジー群の間に長完全系列がある。本書で主に使う部分は

$$H_2(X) \longrightarrow H_1(A \cap B) \longrightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \longrightarrow H_1(X)$$

である。たとえば $X = S^3$ のとき $H_2(S^3) = 0$, $H_1(S^3) = 0$ なので、 $S^3 = M \cup E(M)$ 、 $M \cap E(M) = \partial M$ と置くと

$$0 \longrightarrow H_1(\partial M) \longrightarrow H_1(M) \oplus H_1(E(M)) \longrightarrow 0$$

が得られる。この読み替えが、 S^3 内の部分多様体の H_1 にトーションが出ないことの核心である。

スミス標準形の読み方

整数行列 A がアーベル群の関係式を表しているとする。整数係数の行基本変形・列基本変形により

$$A \sim \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0), \quad d_i \mid d_{i+1}$$

の形にしたものをスミス標準形という。このとき、対応するアーベル群の有限部分は

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

で読める。ただし $d_i = 1$ の成分は自明なので消える。たとえば対角成分が $1, 1, 1, 3$ なら、非自明なトーション部分は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。

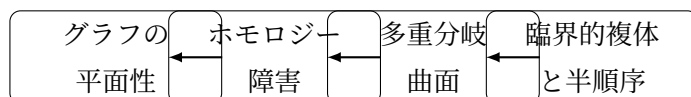
読み方の目安

本文中の証明には、**(概要)**、**(厳密)**、**(発展)** のラベルを付けることがある。**(概要)** は流れを理解するための説明、**(厳密)** は本文だけで論理を追える証明、**(発展)** は時間に余裕があるとき、または卒業研究・修士研究へ進む学生向けの内容である。

第 0 章 埋め込み問題の展望

本書の主題は、空間や複体を別の空間の中へ交差なしに入れられるか、という埋め込み問題である。最初に扱うグラフの平面性は、この問題の最も基本的な例である。グラフを平面に描くとき、辺の交差を消せるかどうかは、局所的な描き方だけでは決まらない。完全グラフ K_5 や完全二部グラフ $K_{3,3}$ は、どのように描いても平面内では交差を避けられない。この事実は、後に現れる高次元の埋め込み障害の原型である。

本書では、次の流れで埋め込み不可能性を調べる。



この図は、本書全体の地図である。前半では、ジョルダン曲線定理、オイラーの公式、クラトフスキーの定理を通して、平面性の障害を学ぶ。中盤では、単体的複体の高次元ユークリッド空間への埋め込み、ファン・カンペン障害、マイヤー・ヴィートリス完全系列を用いる。後半では、多重分岐曲面と臨界的複体を用いて、 S^3 への埋め込み不可能性をより体系的に扱う。

本書で繰り返し現れる考え方

埋め込み問題では、次の二つの壁が現れる。

1. **次元の壁**：十分に高い次元では交差を避けられるが、臨界次元では交差が本質的になる。
2. **局所から大域への壁**：各点の近くでは問題がなくても、空間全体を同時に埋め込むと矛盾が生じることがある。

この二つの壁を、グラフ、ホモロジー、多重分岐曲面、臨界的複体という順に具体化していく。

この第 0 章は、以後の各章を読むための見取り図である。細部をすべて理解する必要はない。まずは、埋め込み不可能性を示すには「どうしても消せない交差」や「代数的な矛盾」を見つける、という方針を押さえておけば十分である。

第 1 章

埋め込み問題への導入

学習の指針

本章の前提は、集合と位相で学んだ同相・コンパクト性・連結性と、第 I 巻の基本群・単連結性・ホモロジー群の言葉である（忘れていれば巻頭の「既習事項の要点」を参照しながら読めばよい）。初出の概念は、埋め込み、ジョルダン曲線定理とその高次元化、tame な埋め込みと wild な埋め込みである。まず「埋め込み」と「単射連続写像」の違いを具体例で手を動かして確認すること。その後に現れる分離定理は、証明の細部よりも「主張が何を述べているか」を例でつかむことを優先してほしい。

1.1 本章の目標

第 I 巻では、基本群とホモロジー群を用いて、空間の形を代数的に調べる方法を学んだ。第 II 巻では、これらの道具を用いて、次の問いを考える。

ある空間は、別の空間の中に交わずに入るだろうか。

たとえば、円周は平面の中に埋め込める。球面は 3 次元空間の中に埋め込める。一方、完全グラフ K_5 や完全二部グラフ $K_{3,3}$ は、平面には埋め込めない。このように、空間を別の空間の中に入れられるかどうかを問う問題を、**埋め込み問題**という。

本章では、埋め込みの定義から始め、ジョルダン曲線定理、ジョルダン－シェーンフリースの定理、ジョルダン－ブラウアー分離定理を通して、埋め込まれた空間が周囲の空間をどのように分けるかを学ぶ。さらに、ジョルダン曲線定理の証明の考え方を簡単に紹介し、最後にアレクサンダーの角付き球面を通して、3 次元では「分けること」と「標準的に分けること」が異なることを見る。

本章の目標は次の通りである。

- 埋め込みと単射連続写像の違いを理解する。
- ジョルダン曲線定理が「分割の存在」を述べる定理であることを理解する。
- ジョルダン－シェーンフリースの定理が「分割の質」を述べる定理であることを理解する。
- ジョルダン－ブラウアー分離定理の主張を理解する。
- アレクサンダーの角付き球面を通して、tame な埋め込みと wild な埋め込みの違いを知る。
- 埋め込み不可能性と埋め込み障害という考え方を理解する。

1.2 埋め込みとは何か

まず、埋め込みの定義を確認する。

定義 1.1 (埋め込み). 位相空間 X, Y に対し、連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が**埋め込み**であるとは、 f が X から像 $f(X)$ への同相写像 $X \cong f(X)$ を与えることをいう。ここで $f(X)$ には、 Y からの相対位相を入れる。

直観：なぜ「像への同相」まで要求するのか

f が連続な単射であれば、 $f: X \rightarrow f(X)$ は連続な全単射である。しかし、連続な全単射の逆写像 $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ が連続であるとは限らない。そこで定義では、逆写像の連続性まで込めて「 $X \cong f(X)$ (同相)」を要求している。標語的にいえば、単射性が「切らない・つぶさない」ことを保証し、逆写像の連続性が「離れていた部分を貼り付けない」ことを保証する。次の具体例で、この最後の条件が実際に破れうることを確かめよう。

つまり、埋め込みとは、 X を Y の中に「切ったり、つぶしたり、貼り合わせたりせずに」入れる写像である。この定義で大切なのは、 f が単に連続な単射であるだけではなく、像 $f(X)$ の上で元の空間 X と同じ位相を保っている、という点である。

例 1.2 (円周の平面への埋め込み). 写像

$$S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$$

は埋め込みである。像は平面内の単位円周であり、もとの S^1 と同相である。

例 1.3 (区間を一周させる写像). 写像

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

を考える。この写像の像は単位円周であるが、 $f(0) = f(1) = (1, 0)$ なので単射ではない。したがって、 $[0, 1]$ から $\mathbb{R}^2$ への埋め込みではない。ただし、端点 0 と 1 を同一視して S^1 と見れば、円周から円周への標準的な埋め込みになる。

具体例：単射連続だが埋め込みでない写像

上の例から端点の一つ除き、半开区間上の写像

$$g: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

を考える。今度は g は単射であり、もちろん連続で、像 $g([0, 1))$ は単位円周全体である。しかし g は埋め込みではない。実際、円周上を点 $(1, 0)$ に向かって「負の角度側」から近づく点列は、 g^{-1} で移すと $t = 1$ に近づく列になり、 $g^{-1}((1, 0)) = 0$ には収束しない。つまり逆写像 g^{-1} は連続でない。別の言い方をすれば、像 S^1 はコンパクトだが $[0, 1)$ はコンパクトでないので、両者はそもそも同相になりえない。このように「単射かつ連続」だけでは、埋め込みには足りないのである。

例 1.4 (交点をもつ曲線は埋め込みではない). 区間から平面への連続写像で、途中で自分自身と交わる曲線を考える。この写像は、交点に対応する 2 つの異なる点を同じ点に送るので単射でない。したがって埋め込みではない。

復習：コンパクト空間からの単射連続写像

集合と位相で学んだ次の定理を思い出しておこう。コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続全単射は同相写像である。したがって、 X がコンパクトで Y がハウスドルフなら、単射連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は自動的に埋め込みになる ($f(X)$ はハウスドルフ空間 Y の部分空間としてハウスドルフだからである)。たとえば閉区間 $[0, 1]$ から $\mathbb{R}^2$ への単射連続写像は、必ず埋め込みである。先ほどの $[0, 1]$ の例は、定義域がコンパクトでないため、この定理の適用範囲の外にある。本章のジョルダン曲線 (コンパクトな S^1 の像) を扱う際には、この事実が背後で効いている。

埋め込み問題では、単に写像があるかどうかではなく、「交わりを作らずに入れられるか」が本質的である。この制約があるため、埋め込み問題は非常に難しくなる。

1.3 埋め込み可能性と補空間

X が Y に埋め込めるとき、その像を Y の部分空間と同一視して $X \subset Y$ と書くことが多い。このとき重要になるのが、補空間 $Y - X$ である。

たとえば、円周 S^1 を平面 $\mathbb{R}^2$ に標準的に埋め込むと、補空間 $\mathbb{R}^2 - S^1$ は 2 つの連結成分をもつ。一つは円の内側、もう一つは円の外側である。

一方、直線 $\mathbb{R}$ を平面に埋め込んだ場合も、補空間は 2 つに分かれる。しかし、円周の場合には内側が有界で、外側が非有界であるという違いがある。

このように、埋め込まれた空間そのものだけでなく、その補空間を調べることによって、埋め込みの性質が分かる。第 I 巻で学んだ基本群やホモロジー群は、この補空間を調べるための強力な道具になる。

注意 1.5. 結び目理論では、結び目 $K \subset S^3$ そのものよりも、補空間 $S^3 - K$ の基本群やホモロジー群を調べるのが重要であった。本巻で扱う埋め込み問題でも、同じ考え方が何度も現れる。

直観：なぜ補空間を調べるのか

埋め込み $f: X \rightarrow Y$ の像 $f(X)$ は、定義によりつねに X と同相である。したがって、像そのものをいくら調べても、埋め込みの「入り方」の違いは見えない。違いが現れるのは、像と周囲の空間との関係、すなわち補空間 $Y - f(X)$ である。第 I 巻で学んだように、基本群やホモロジー群は同相不変量なので、2 つの埋め込みの補空間でこれらの不変量が異なれば、入り方が本質的に異なると結論できる (巻頭の「既習事項の要点」も参照)。本章後半のアレクサンダーの角付き球面は、まさにこの方法で区別される例である。

1.4 ジョルダン曲線定理

平面内の単純閉曲線とは、円周 S^1 の平面への埋め込みの像である。直感的には、自分自身と交わらない閉じた曲線である。

定義 1.6 (ジョルダン曲線). 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間 C が**ジョルダン曲線**であるとは、 C が円周 S^1 と同相であることをいう。同じことを、 C は平面内の単純閉曲線である、ともいう。

定理 1.7 (ジョルダン曲線定理). $C \subset \mathbb{R}^2$ を単純閉曲線とする。このとき、補空間 $\mathbb{R}^2 - C$ はちょうど 2 つの連結成分をもつ。一方は有界成分であり、もう一方は非有界成分である。さらに、そのどちらの境界も C である。

直観：ジョルダン曲線定理はなぜ自明でないのか

つまりしやすいのは、「内側」「外側」という言葉が定理の前には定義されていない点である。定理が主張しているのは、補空間の連結成分が「ちょうど 2 つ」であることであり、有界な方を内側、非有界な方を外側と呼べるようになるのは定理の結論である。また、ジョルダン曲線は円周と同相でありさえすればよいので、コッホ雪片の境界のように、どの点でも接線をもたない曲線でもよい。このような曲線に対して、図を描かずに「成分が 2 つで、3 つ以上にはならない」ことを示すのが難しいのである。

この定理は、図を描けば明らかに思える。しかし、曲線が非常に複雑に曲がっている場合も含めて証明するのは簡単ではない。ジョルダン曲線定理は、平面トポロジーの基本定理であると同時に、埋め込み問題の出発点でもある。

例 1.8 (三角形の場合). 三角形の周を C とする。このとき $\mathbb{R}^2 - C$ は、三角形の内部と外部の 2 つの連結成分に分かれる。この場合、ジョルダン曲線定理は直感的に明らかである。

例 1.9 (複雑な単純閉曲線). 曲線が何度も折れ曲がっていても、自分自身と交わらなければ、やはり平面を内側と外側に分ける。ここで重要なのは、曲線の形が滑らかである必要はないという点である。位相的には、円周と同相な曲線であればよい。

ジョルダン曲線定理は、次のような考え方を示している。

埋め込まれた空間は、周囲の空間の大域的な構造を変える。

この考え方は、後にグラフの平面性や、高次元複体の埋め込み不可能性を考える際にも基本となる。

1.5 ジョルダン曲線定理の証明の考え方

ジョルダン曲線定理の完全な証明は、見かけよりかなり難しい。ここでは、証明の厳密な細部ではなく、どのような方針で証明されるのかを説明する。

最も直感的な証明方針は、次の三段階である。

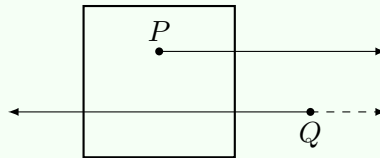
1. まず、単純閉多角線の場合に証明する。
2. 次に、一般の単純閉曲線を単純閉多角線で十分よく近似する。
3. 最後に、多角線の場合の内側・外側の性質を、一般の曲線へ移す。

単純閉多角線の場合には、次の半直線法で内側と外側を判定できる。点 P から十分一般の方向へ半直線を引き、その半直線が多角線と交わる回数を数える。交点の数が奇数なら P は内側、偶数なら P は外側と判定する。この判定が半直線の選び方に依存しないことを示すと、平面上の点を内側と外側に分けられる。

注意 1.10. この半直線法は、コンピュータグラフィックスでも用いられる考え方である。ただし、数学的な証明では、半直線が頂点を通る場合や辺と重なる場合を避けるために、方向を一般の位置に選ぶ必要がある。

具体例：半直線法による内外判定

頂点 $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$ をもつ正方形の周を C とし、半直線法を実行してみよう。



点 $P = (1, 1.4)$ から右向きに半直線を引くと、辺 $\{2\} \times [0, 2]$ とちょうど 1 回交わる。交点数は奇数なので、 P は内側と判定される。点 $Q = (3, 0.6)$ から右向きに引くと（破線）交点は 0 個、左向きに引くと辺 $\{2\} \times [0, 2]$ と辺 $\{0\} \times [0, 2]$ の 2 回交わる。どちらの方向でも偶数なので、判定は「外側」で一致する。なお、頂点をかすめる方向を選ぶと交点の数が曖昧になるので、本文で述べたように方向は一般の位置に取る。

一般のジョルダン曲線の場合には、曲線を細かい多角線で近似する。直感的には、滑らかな円を非常に細かい多角形で描くようなものである。多角線で得た「内側」と「外側」の性質が、近似の極限でも保たれることを、コンパクト性や ε - δ 論法を用いて示す。

この説明から分かるように、ジョルダン曲線定理は直感的には明らかに見えても、厳密な証明にはかなり繊細な点集合位相の議論が必要である。現代的には、ホモロジーやアレクサンダー双対性を用いたより概念的な証明もある。

1.6 ジョルダン－シェーンフリースの定理

ジョルダン曲線定理は、単純閉曲線が平面を 2 つに分けることを述べる。では、分けられた内側はどのような形をしているのだろうか。円周なら内側は円板である。複雑に曲がったジョルダン曲線の内側も、やはり円板と同相なのだろうか。

この問いに答えるのが、ジョルダン－シェーンフリースの定理である。

定理 1.11 (ジョルダン－シェーンフリースの定理). $C \subset \mathbb{R}^2$ をジョルダン曲線とする。このとき、平面全体の同相写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在して、 $F(C) = S^1$ となる。特に、 C の有界な内側は円

板と同相である。

この定理は、2次元平面における埋め込みが非常に素直であることを示している。どれほど複雑に見えるジョルダン曲線でも、平面全体を連続的に伸び縮みさせれば、標準的な円周に移すことができる。

系 1.12 (平面には非自明な結び目がない). 平面 $\mathbb{R}^2$ の中では、円周 S^1 を非自明に結ぶことはできない。すなわち、任意のジョルダン曲線は、平面全体の同相写像によって標準円周に移される。

Proof. ジョルダン－シェーンフリースの定理より、任意のジョルダン曲線 C に対して、平面全体の同相写像 F で $F(C) = S^1$ となるものが存在する。したがって、 C は平面内で標準的な円周と同じ埋め込み型をもつ。よって、平面内には3次元空間の結び目のような非自明な結び方は存在しない。 $\square$

補足：埋め込み型という考え方

上の証明に現れた「埋め込み型」という言葉を補足しておく。 Y の部分空間 A, B が同じ埋め込み型をもつとは、 Y 全体の同相写像 $F: Y \rightarrow Y$ で $F(A) = B$ となるものが存在することをいう。これは「 A と B が同相である」という条件よりも強く、 A と B が周囲の空間に同じ入り方をしていることを意味する。ジョルダン－シェーンフリースの定理は、平面内のジョルダン曲線の埋め込み型がただ一つ（標準円周の型のみ）であることを述べている。後で見るアレクサンダーの角付き球面は、 S^2 と同相なのに標準球面と埋め込み型が異なる例である。

ここで重要なのは、ジョルダン曲線定理とジョルダン－シェーンフリースの定理の違いである。前者は「分割の存在」を述べる。後者は「その分割が標準的であること」を述べる。

1.7 ジョルダン－ブラウアー分離定理

ジョルダン曲線定理は、円周 S^1 を平面 $\mathbb{R}^2$ に埋め込んだ場合の分離定理である。これを高次元に一般化したものが、ジョルダン－ブラウアー分離定理である。

定理 1.13 (ジョルダン－ブラウアー分離定理). S^{n-1} が $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれているとする。このとき、補空間 $\mathbb{R}^n - S^{n-1}$ はちょうど2つの連結成分をもつ。一方は有界成分であり、もう一方は非有界成分である。さらに、そのどちらの境界も埋め込まれた S^{n-1} である。

$n = 2$ の場合がジョルダン曲線定理である。 $n = 3$ の場合には、球面 S^2 が3次元空間 $\mathbb{R}^3$ を内側と外側に分ける、という主張になる。

例 1.14 (標準的な球面). 標準的な球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える。このとき $\mathbb{R}^3 - S^2$ は、単位球の内部 $\{x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ と外部 $\{x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$ の2つの成分に分かれる。

ジョルダン－ブラウアー分離定理は、「球面は空間を内側と外側に分ける」という直感を高次元で正確に述べたものである。しかし、3次元以上では、この定理だけでは補空間の形までは分らない。特に、内側や外側が標準的な球体と同相であるとは限らない。

注意 1.15 (証明の考え方). ジョルダン－ブラウアー分離定理は、ホモロジーを用いて証明できる。たとえば、 S^n 内の S^{n-1} と同相な部分空間 K を考えると、アレクサンダー双対性により $\tilde{H}_0(S^n - K) \cong \tilde{H}^{n-1}(K) \cong \mathbb{Z}$ となる。被約0次ホモロジーが $\mathbb{Z}$ であることは、補空間が2つの連結

成分をもつことを意味する。このように、分離定理は単なる図形的直感ではなく、ホモロジーによって代数的に捉えることもできる。

復習：被約ホモロジーと連結成分の個数

上の注意の式の読み方を確認しておく。空間 A の弧状連結成分の個数が k ならば $H_0(A) \cong \mathbb{Z}^k$ であり、被約ホモロジーでは $\tilde{H}_0(A) \cong \mathbb{Z}^{k-1}$ となる（補空間のような $\mathbb{R}^n$ や S^n の開集合では、連結成分と弧状連結成分は一致する）。したがって $\tilde{H}_0(S^n - K) \cong \mathbb{Z}$ は、補空間の連結成分がちょうど2個であることを意味する。なお、右辺に現れたコホモロジー $\tilde{H}^{n-1}(K)$ とアレクサンダー双対性は本巻で初出の道具であり、後の章で改めて丁寧に扱う。ここでは結論の読み方だけ分かればよい。

1.8 3次元で起こる現象

標準的な球面 $S^2 \subset S^3$ は、 S^3 を2つの3次元球体に分ける。これは、私たちの直感に合っている。

しかし、3次元空間では、球面が非常に複雑に埋め込まれることがある。その代表例が**アレクサンダーの角付き球面**である。

例 1.16 (アレクサンダーの角付き球面). アレクサンダーの角付き球面とは、 S^2 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みであって、無限に絡み合う角のような構造をもつものをいう。概念的には、標準的な球面から2本の角を突き出し、その先端からさらに小さな角を出し、この操作を無限に繰り返すことで得られる。この極限の図形は位相的には S^2 と同相であるが、補空間の一方は標準的な球体の補空間とは同相でない。特に、その補空間の一方は単連結でない。

復習：単連結性と基本群

第I巻の言葉を思い出そう。空間 Z が**単連結**であるとは、 Z が弧状連結で、基本群が自明 $\pi_1(Z) = 1$ であることをいう。これは、 Z 内のどんなループも Z の中で連続的に1点に縮められることと同じである。たとえば標準球面 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の外側 $\{x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$ では、どんなループも球面を避けたまま1点に縮められるので単連結である。角付き球面の補空間が「単連結でない」とは、縮められないループが存在するという意味である（巻頭の「既習事項の要点」も参照）。

この例が示す重要な点は次である。

埋め込まれた空間が標準的な球面と同相であっても、補空間は標準的とは限らない。

つまり、埋め込み問題では、「どの空間を埋め込むか」だけでなく、「どのように埋め込むか」が本質的である。

定義 1.17 (tame な埋め込みと wild な埋め込み). 埋め込みが **tame**、すなわち飼いならされた埋め込みであるとは、標準的な多面体的・滑らかな埋め込みと同じように扱える埋め込みであることをいう。一方、そのような標準的な埋め込みに同相変形できず、補空間に病的な性質が現れる埋め込みを **wild**、すなわち野性的な埋め込みという。

直観：角付き球面のどこが wild なのか

つまずきやすいのは、「角付き球面そのものは S^2 と同相であり、球面としては何も病的でない」という点である。病的なのは空間への入り方である。角を突き出した側の補空間で、絡み合う一対の角を取り囲むループを考えると、このループを 1 点に縮めようとするたびに、より細かい段階の角の絡みに引っかかってしまい、無限に続く構造のせいで決して外せない。これがその成分が単連結でない理由の直観である。標準球面の外側は単連結だから、補空間の基本群という同相不変量によって、この埋め込みが標準的な埋め込み型に移せないことが分かる。

アレクサンダーの角付き球面は、wild な埋め込みの代表例である。球面そのものは S^2 と同相であるにもかかわらず、補空間の基本群が非自明になる。構成を段階的に追うと、各段階の外部の基本群は自由群として現れ、極限の補空間は各段階の外部たちの増大列の和集合であり、その基本群は、これらの自由群たちの順極限（帰納極限）として得られる非常に大きな群になる。この非自明な基本群が、角付き球面の補空間が単連結でないことを示している。

第 I 巻で学んだ言葉を使えば、補空間の基本群やホモロジー群を調べることで、埋め込みの複雑さを測ることができる。この視点は、結び目理論でも現れた。結び目 K 自体は円周 S^1 と同相であるが、補空間 $S^3 - K$ の基本群は結び目の種類によって異なる。同じように、 S^2 の埋め込みであっても、補空間の基本群が異なれば、埋め込みとしては異なるものになる。

1.9 4 つの定理・例の比較

本章で現れた内容を表にまとめると、次のようになる。

定理・例	対象	結論	分割の質
ジョルダン曲線定理	$S^1 \subset \mathbb{R}^2$	平面を内側と外側に分ける。	未判定
ジョルダン－シェーンフリース定理	$S^1 \subset \mathbb{R}^2$	分割は標準的であり、内側は円板と同相である。	tame
ジョルダン－ブラウアー分離定理	$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$	空間を 2 つの成分に分ける。	未判定
アレクサンダーの角付き球面	$S^2 \subset \mathbb{R}^3$	分離はするが、補空間の一方が標準的でなく単連結でない。	wild

この表から、2 次元と 3 次元の間には埋め込みの性質に関して質的な断絶があることが分かる。2 次元では、単純閉曲線は平面を標準的に分ける。しかし 3 次元では、球面が空間を分けても、その分け方が標準的であるとは限らない。この「次元の壁」が、低次元位相幾何学を豊かなものにしている。

1.10 埋め込み不可能性とは何か

ここまで、埋め込まれた空間が補空間にどのような影響を与えるかを見た。次に問題となるのは、そもそも埋め込めない空間である。

たとえば、完全グラフ K_5 は平面には埋め込めない。また、完全二部グラフ $K_{3,3}$ も平面には埋め込めない。これらは次章以降で詳しく扱うクラトフスキーの定理に現れる基本的な例である。

定義 1.18 (埋め込み不可能性). 位相空間 X が位相空間 Y に埋め込めないとき、 X は Y に対して**埋め込み不可能**であるという。

補足：グラフの位相的实现

「グラフ K_5 が平面に埋め込めない」という言い方には、グラフを位相空間と見なす操作が隠れている。グラフとは頂点の集合と、頂点の対を結ぶ辺の集合の組である。各頂点に 1 つの点を、各辺に単位区間 $[0, 1]$ のコピーを対応させ、区間の端点を対応する頂点に貼り合わせて得られる空間を、グラフの**位相的实现**という。たとえば K_5 (5 頂点のすべての対を辺で結んだ完全グラフ) の実現は、5 個の点と、それらを結ぶ 10 本の弧からなるコンパクトな空間である。「 K_5 が平面に埋め込めない」とは、この位相空間から $\mathbb{R}^2$ への埋め込みが存在しないという主張である。グラフ理論の用語は次章以降で正式に導入するので、ここではこのイメージで十分である。

埋め込み不可能性を証明するには、「どんな入れ方をしても必ず交わりが生じる」ことを示さなければならない。これは、一つの図を描いて失敗することを確認するだけでは不十分である。すべての可能な配置を排除する必要がある。

そのために用いられるのが、**埋め込み障害**である。埋め込み障害とは、もし埋め込みが存在すれば満たされるはずの条件が、実際には満たされないことを示す不変量や構造のことである。

例 1.19 (オイラーの公式による障害). 平面グラフに対しては、頂点数 v 、辺数 e 、面数 f が $v - e + f = 2$ を満たす。この関係式を用いると、 K_5 や $K_{3,3}$ が平面に埋め込めないことを示せる。これは、オイラー標数が埋め込み障害として働く最初の例である。

具体例：オイラーの公式で K_5 を排除する

まず埋め込める例で検算する。完全グラフ K_4 を、三角形の内部に 1 頂点を置いて描くと、 $v = 4$, $e = 6$, $f = 4$ (内部の 3 つの三角形と非有界な外面) であり、確かに $4 - 6 + 4 = 2$ となる。

次に K_5 を考える。 $v = 5$, $e = \binom{5}{2} = 10$ である。もし平面に埋め込めたとすると、オイラーの公式から $f = 2 - v + e = 2 - 5 + 10 = 7$ でなければならない。一方、各面の境界には少なくとも 3 本の辺が現れ、各辺は高々 2 つの面に接するので $3f \leq 2e$ が成り立つ。ところが $3 \cdot 7 = 21 > 20 = 2 \cdot 10$ となり矛盾する。よって K_5 は平面に埋め込めない。「すべての描き方」を一つずつ調べる代わりに、どんな埋め込みも満たすはずの数量関係を使って一挙に排除している点に注目してほしい。

具体例：次元を一つ上げると埋め込める

平面に埋め込めない K_5 も、 $\mathbb{R}^3$ には埋め込める。曲線 $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ 上に相異なるパラメータで 5 個の頂点を取り、各辺を頂点どうしを結ぶ線分で実現すればよい。この曲線上の相異なる 4 点は決して同一平面上に乗らない (ヴァンデルモンドの行列式が消えないことから分かる) ので、端点を共有しない 2 本の線分は交わらず、端点を共有する 2 本はその端点でのみ交わる。したがって、これは K_5 の (実は任意の完全グラフ K_n の) $\mathbb{R}^3$ への埋め込みを与える。このように、埋め込み可能性は入れる側の空間の次元に強く依存する。どの次元で初めて埋め込

るようになるかという問いが、本巻全体を貫くテーマである。

本巻では、この考え方を高次元の単体的複体へ拡張していく。最初はグラフの平面埋め込みから始めるが、後半では、2次元複体が3次元球面 S^3 に埋め込めるかどうかを考える。その過程で、多重分岐曲面、臨界的複体、埋め込み型による順序構造が現れる。

1.11 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. 埋め込みとは、単なる単射連続写像ではなく、像への同相写像であることを説明できる。
2. 埋め込み問題では、埋め込まれた空間だけでなく補空間が重要であることを理解する。
3. ジョルダン曲線定理の主張を述べ、円周が平面を内側と外側に分けることを説明できる。
4. ジョルダン曲線定理の証明の考え方として、多角線近似と半直線法を説明できる。
5. ジョルダン－シェーンフリースの定理が、2次元の埋め込みが tame であることを述べる定理であると理解する。
6. ジョルダン－ブラウアー分離定理の意味を、 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ の例で説明できる。
7. アレクサンダーの角付き球面を通して、3次元空間では wild な埋め込みが現れることを理解する。
8. 埋め込み不可能性を証明するには、すべての配置を排除する必要があることを理解する。
9. オイラー標数やホモロジー群が、埋め込み障害として働くという見方を得る。

1.12 練習問題

練習問題 1.1. 次の写像が埋め込みであるかどうかを判定せよ。

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

練習問題 1.2. 位相空間 X から Y への写像 $f : X \rightarrow Y$ が埋め込みであることの定義を述べよ。また、単に連続な単射であることと何が違うか説明せよ。

練習問題 1.3. ジョルダン曲線とは何かを説明し、円、楕円、複雑に曲がった単純閉曲線がいずれもジョルダン曲線の例である理由を述べよ。

練習問題 1.4. 円周 S^1 を平面に標準的に埋め込んだとき、補空間 $\mathbb{R}^2 - S^1$ の連結成分を述べよ。また、それぞれが有界か非有界かを答えよ。

練習問題 1.5. ジョルダン曲線定理の証明の考え方を、多角線の場合、半直線法、近似という三つの語を用いて説明せよ。

練習問題 1.6. ジョルダン曲線定理とジョルダン－シェーンフリースの定理の違いを、「分割の有無」と「分割の質」という観点から説明せよ。

練習問題 1.7. 2次元平面 $\mathbb{R}^2$ の中では、円周 S^1 を非自明に結ぶことができない。その理由を、ジョ

ルダン－シェーンフリースの定理を用いて説明せよ。

練習問題 1.8. ジョルダン－ブラウアー分離定理の主張を述べ、 $n = 3$ の場合に何を意味するか説明せよ。

練習問題 1.9. アレクサンダーの角付き球面が、なぜ 3 次元におけるジョルダン－シェーンフリース型定理の反例になるのか説明せよ。また、tame な埋め込みと wild な埋め込みの違いを述べよ。

練習問題 1.10. 「 K_5 が平面に埋め込めない」という主張を証明するには、なぜ一つの図を描くだけでは不十分なのか説明せよ。

1.13 次章への橋渡し

本章では、埋め込み問題の基本的な考え方を学んだ。次章では、この問題を単体的複体の言葉で定式化する。単体、複体、多面体、重心細分を復習し、後に扱うグラフや 2 次元複体を共通の枠組みで扱えるようにする。特に、単体的複体をどのように図形として実現するかが、埋め込み問題を考える第一歩となる。

第 2 章

単体的複体と多面体の復習

2.1 本章の目標

前章では、埋め込み問題の基本的な考え方を見た。特に、 S^1 や S^2 の埋め込みを通して、空間を別の空間の中に入れるとき、その像だけでなく補空間の性質が重要になることを見た。本章では、このような埋め込み問題を扱うための基本言語として、**単体**、**単体的複体**、**多面体**を復習する。

連続的な空間は、そのままでは扱いにくいことが多い。しかし、空間を点、線分、三角形、四面体といった単純な部品に分けることができれば、その空間を有限個の組合せ的データとして調べることができる。この考え方は、組合せ論的トポロジーの基本である。

本章で扱う中心的な流れは次の通りである。

単体 $\longrightarrow$ **単体的複体** $\longrightarrow$ **単体分割** $\longrightarrow$ **単体写像** $\longrightarrow$ **単体近似定理**

第 I 巻でも単体的複体とホモロジー群を扱ったが、本巻では、単体的複体を単にホモロジー群を定義するための道具としてではなく、「どの空間に埋め込めるか」を問う対象として扱う。グラフは 1 次元単体的複体であり、曲面の三角形分割は 2 次元単体的複体である。本巻の後半で扱う多重分岐曲面や臨界的複体も、適切に細分すれば単体的複体として扱うことができる。

本章の目標は次の通りである。

- 単体、面、単体的複体の定義を理解する。
- 単体的複体の「面の条件」と「交わりの条件」を具体例で判定できる。
- 多面体と単体分割の意味を理解する。
- 重心細分が空間を変えずにメッシュを細かくする操作であることを理解する。
- 単体写像、PL 写像、単体近似定理の意味を理解する。
- 連続的な問題を組合せ的な問題に置き換える考え方を理解する。

学習の指針

本章は第 I 巻で学んだ単体的複体の復習であるが、視点が「ホモロジーを計算する道具」から「埋め込む対象」へ変わる。初出の概念は、PL 写像・PL 埋め込み・開星・単体近似定理である。定義を眺めるだけでなく、三角形や四面体などの低次元の例で毎回手を動かして確かめること。記憶があいまいな場合は、巻頭の「既習事項の要点」も参照するとよい。

2.2 単体：点・線分・三角形・四面体の一般化

まず、単体の定義を確認する。単体とは、点、線分、三角形、四面体を任意次元に一般化した図形である。

定義 2.1 (アフィン独立). $\mathbb{R}^N$ の点 $v_0, v_1, \dots, v_n$ が**アフィン独立**であるとは、ベクトル $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$ が線形独立であることをいう。

直感的には、 $n+1$ 個の点がアフィン独立であるとは、それらの点が本当に n 次元的に広がっているということである。たとえば、2 点が異なれば 1 単体を張る。3 点が同一直線上になければ 2 単体を張る。4 点が同一平面上になければ 3 単体を張る。

具体例: アフィン独立の判定

$\mathbb{R}^2$ の 3 点 $v_0 = (0, 0), v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$ を考える。差をとると $v_1 - v_0 = (1, 0), v_2 - v_0 = (0, 1)$ であり、これらは線形独立なので、3 点はアフィン独立である。一方、 $w_0 = (0, 0), w_1 = (1, 1), w_2 = (2, 2)$ では $w_1 - w_0 = (1, 1), w_2 - w_0 = (2, 2) = 2(w_1 - w_0)$ となり線形独立でないので、アフィン独立ではない。実際、この 3 点は同一直線 $y = x$ 上にある。

直観: 線形独立との違い

「 $v_0, \dots, v_n$ 自身が線形独立」ではなく、「差 $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ が線形独立」であることに注意する。原点 O を含む 3 点 $O, (1, 0), (0, 1)$ はベクトルとしては線形独立でない (O が零ベクトルだから) が、アフィン独立であり、立派に三角形を張る。アフィン独立は原点の位置に依存しない「図形としての広がり」を測る条件である。また、基準点を v_0 以外に取り替えても条件は変わらない。

定義 2.2 (凸包). $\mathbb{R}^N$ の部分集合 A に対し、 A を含む最小の凸集合を A の**凸包**といい、 $\text{conv}(A)$ と書く。

凸包とは、指定された点をすべて含むようにゴム膜を張ったときに得られる領域と考えるとよい。たとえば、2 点の凸包は線分であり、3 つの非共線な点の凸包は中身を含む三角形である。

定義 2.3 (n 単体). $\mathbb{R}^N$ 内のアフィン独立な $n+1$ 個の点 $v_0, \dots, v_n$ の凸包 $\text{conv}\{v_0, \dots, v_n\}$ を、頂点 $v_0, \dots, v_n$ をもつ n **単体**という。記号で

$$[v_0, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

と書く。

係数 $t_0, \dots, t_n$ は**重心座標**と呼ばれる。この表示は、単体の内部の点を頂点の重み付き平均として表している。

具体例: 重心座標で点を表す

2 単体 $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ 、 $v_0 = (0, 0)$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ で計算してみる。

- $(t_0, t_1, t_2) = (1, 0, 0)$ は点 $v_0 = (0, 0)$ を与える。頂点は重心座標の 1 つが 1 の点である。
- $(t_0, t_1, t_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ は辺 $[v_0, v_1]$ の中点 $(\frac{1}{2}, 0)$ を与える。 $t_2 = 0$ なので v_2 の反対側の辺上にある。
- $(t_0, t_1, t_2) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ は三角形の重心 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ を与える。

すべての t_i が正なら点は三角形の内部にあり、どれかの t_i が 0 なら境界上にある。

例 2.4. 低次元の単体は次の通りである。

- 0 単体は 1 点 $[v_0]$ である。
- 1 単体は線分 $[v_0, v_1]$ である。
- 2 単体は中身を含む三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ である。
- 3 単体は中身を含む四面体 $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ である。

2.3 面

単体の頂点の一部を選ぶと、より低次元の単体が得られる。これを面という。

定義 2.5 (面). n 単体 $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ に対し、頂点集合 $\{v_0, \dots, v_n\}$ の空でない部分集合 $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\}$ が張る k 単体 $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ を、 σ の k 次元の面、または k 面という。

例 2.6. 2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ の面は、3 つの頂点、3 つの辺、そして 2 単体自身である。すなわち、0 面は $[v_0]$, $[v_1]$, $[v_2]$, 1 面は $[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$, $[v_0, v_2]$, 2 面は $[v_0, v_1, v_2]$ である。

具体例: 3 単体の面を数える

3 単体 $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ の面の個数を数えてみよう。 k 面は 4 個の頂点から $k+1$ 個を選ぶことに対応するので、0 面 (頂点) は $\binom{4}{1} = 4$ 個、1 面 (辺) は $\binom{4}{2} = 6$ 個、2 面 (三角形) は $\binom{4}{3} = 4$ 個、3 面は $\binom{4}{4} = 1$ 個 (3 単体自身) である。合計 $4 + 6 + 4 + 1 = 15 = 2^4 - 1$ 個であり、これは頂点集合の空でない部分集合の総数と一致する。四面体の絵を描いて、辺 6 本と三角形 4 枚を実際に確認してみるとよい。

2.4 単体的複体

単体を貼り合わせて複雑な空間を作るには、貼り合わせ方にルールが必要である。そのルールを定めたものが単体的複体である。

定義 2.7 (単体的複体). $\mathbb{R}^N$ 内の単体の有限集合 K が**単体的複体**であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう。

1. **面の条件**: $\sigma \in K$ であり、 τ が σ の面ならば、 $\tau \in K$ である。
2. **交わりの条件**: $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ に対して、 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ は空集合であるか、または σ_1 と σ_2 の共通の面である。

面の条件は、三角形を入れたなら、その辺と頂点もすべて入れなければならない、という条件である。交わりの条件は、単体どうしがきれいに貼り合わされていることを要求する。

具体例: 面の条件を検証する

2 単体 $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ を 1 つ含む単体的複体を作るには、 $K = \{[v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_0, v_2], [v_0], [v_1], [v_2]\}$ と、 σ の面をすべて (合計 7 個) 入れなければならない。たとえば $K' = \{[v_0, v_1, v_2], [v_0], [v_1], [v_2]\}$ は、辺 $[v_0, v_1]$ が抜けているので面の条件を満たさず、単体的複体ではない。「複体を指定する」とは、最高次元の単体だけでなく、その面すべてを込めて指定することだと覚えておこう。

例 2.8 (よい貼り合わせ). 2 つの三角形が 1 本の辺全体を共有している場合、その交わりは両方の三角形の共通の 1 面である。したがって、交わりの条件を満たす。また、2 つの三角形が 1 つの頂点だけで接している場合も、その交わりは共通の 0 面なので、交わりの条件を満たす。

例 2.9 (悪い貼り合わせ). 一方の三角形の頂点が、もう一方の三角形の辺の途中に接している場合、交わりは点である。しかし、その点はもう一方の三角形の頂点ではないので、共通の面ではない。したがって、そのままでは単体的複体ではない。このような場合は、辺の途中の点を新しい頂点として加え、辺を細分してから考える必要がある。

具体例: 座標で交わりの条件を確かめる

$\mathbb{R}^2$ 内の 2 つの三角形 $\sigma_1 = [(0, 0), (2, 0), (0, 2)]$, $\sigma_2 = [(1, 0), (3, 0), (3, -2)]$ を考える。 σ_1 は上半平面 $y \geq 0$ 、 σ_2 は下半平面 $y \leq 0$ に含まれるので、交わり $\sigma_1 \cap \sigma_2$ は x 軸上にあり、線分 $\{(x, 0) \mid 1 \leq x \leq 2\}$ である。これは σ_1 の辺 $[(0, 0), (2, 0)]$ の一部にすぎず、 σ_1 の面ではない。したがって $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ (と面たち) は交わりの条件を満たさない。一方、 σ_2 を $\sigma'_2 = [(2, 0), (3, 0), (3, -2)]$ に取り替えると、交わりは 1 点 $(2, 0)$ となり、これは両方の三角形の頂点 (共通の 0 面) なので条件を満たす。

注意 2.10. 単体的複体の定義は、単に図形を貼り合わせるための約束ではない。この条件があるからこそ、境界作用素やホモロジー群を組合せ的に定義できる。また、埋め込み問題においても、どの単体とどの単体が交わるかを有限のデータとして扱えるようになる。

2.5 多面体と単体分割

単体的複体 K は、単体の集合としての組合せ的な対象である。これに対応する実際の位相空間が多面体である。

定義 2.11 (多面体). 単体的複体 K に属するすべての単体の和集合

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

を、 K の**多面体**、または**幾何学的実現**という。

K は設計図であり、 $|K|$ はその設計図から実際に作られる図形である。たとえば、三角形の周だけからなる複体の多面体は円周 S^1 と同相であり、中身を含む三角形の多面体は閉円板 D^2 と同相である。

直観: K と $|K|$ の区別

記号の使い分けでつまづきやすいので整理しておく。 K は「単体の集合」という組合せ的データであり、要素の個数を数えられる (たとえば三角形の周なら要素は6個)。一方 $|K|$ は $\mathbb{R}^N$ の部分集合としての位相空間であり、点の集まりである。「 $\sigma \in K$ 」と「 $x \in |K|$ 」は全く別の主張である。第I巻のホモロジー群 $H_n(K)$ は K の組合せデータから計算されるが、それが位相空間 $|K|$ の不変量になる、というのが単体的ホモロジーの要点であった。

定義 2.12 (単体分割). 位相空間 X の**単体分割**とは、ある単体的複体 K と同相写像 $h: |K| \rightarrow X$ の組のことである。

単体分割が与えられると、連続的な空間 X を、有限個の単体の貼り合わせとして調べることができる。このことにより、位相的な問題を組合せ的な問題に翻訳できる。

例 2.13. 円周 S^1 は、3つの頂点と3つの辺からなる三角形の周によって単体分割できる。球面 S^2 は、四面体の境界によって単体分割できる。

2.6 抽象的単体複体

単体的複体を、実際にユークリッド空間に置かれた単体の集合としてではなく、頂点集合の部分集合族として扱うこともできる。これを抽象的単体複体という。

定義 2.14 (抽象的単体複体). 有限集合 V の非空部分集合からなる族 $\mathcal{K}$ が**抽象的単体複体**であるとは、 $A \in \mathcal{K}$ かつ $\emptyset \neq B \subset A$ ならば $B \in \mathcal{K}$ が成り立つことをいう。

抽象的単体複体は、どの頂点集合が単体を張るかだけを記録している。これを適切なユークリッド空間内に実現すると、幾何学的な単体的複体が得られる。

例 2.15. $\mathcal{K} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}\}$ は抽象的単体複体である。これは3つの頂点と3つの辺を含むが、2単体 $\{0, 1, 2\}$ は含まない。したがって、その幾何学的実現は三角形の周、すなわち S^1 と同相な空間である。

具体例: 抽象複体を実現してみる

頂点集合 $V = \{0, 1, 2, 3\}$ 上の抽象的単体複体 $\mathcal{K} = \{\{0, 1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \cup (\text{その部分集合すべて})$ を考える。極大な単体は2つの「三角形」 $\{0, 1, 2\}$ と $\{1, 2, 3\}$ であり、共有されるのは「辺」 $\{1, 2\}$

である。これを $\mathbb{R}^2$ で実現するには、たとえば $0 \mapsto (0, 0)$, $1 \mapsto (1, 1)$, $2 \mapsto (1, -1)$, $3 \mapsto (2, 0)$ とすればよく、辺 $[1, 2]$ を共有する 2 つの三角形からなる正方形の図形 (閉円板 D^2 と同相) が得られる。頂点の座標の選び方を変えても、得られる多面体は互いに同相である。組合せデータ K が位相型を決めている、というのが要点である。

直観: なぜ抽象化するのか

グラフを頂点と辺のリストで指定するように、複体も「どの頂点の組が単体を張るか」という有限リストだけで指定できる。これにより、複体を計算機で扱ったり、座標に依存しない議論をしたりできる。本巻の埋め込み問題は、まさに「抽象的に与えられた複体を、指定した次元の空間の中に (必要なら細分して) 幾何学的に実現できるか」という形の問いと言い換えられる。

2.7 重心細分

単体分割をさらに細かくする標準的な操作が重心細分である。重心細分は、多面体そのものは変えずに、単体の分割だけを細かくする。

定義 2.16 (重心). n 単体 $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ の重心を $b(\sigma) = \frac{1}{n+1}(v_0 + \dots + v_n)$ で定義する。

定義 2.17 (重心細分). 単体的複体 K の重心細分 $\text{sd } K$ は、 K の各単体の重心を新しい頂点とし、包含関係 $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_k$ にある単体列に対して、重心 $b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_k)$ が張る単体を加えて得られる細分である。

例 2.18. 線分 $[v_0, v_1]$ の重心細分では、中点 $b = \frac{v_0 + v_1}{2}$ を新しい頂点として加え、線分を $[v_0, b]$, $[b, v_1]$ に分ける。

例 2.19. 2 単体の重心細分では、三角形の重心、3 つの辺の中点、3 つの頂点を用いて、元の三角形が 6 つの小三角形に分けられる。これは三角形そのものを変える操作ではなく、三角形の中に細かいメッシュを入れる操作である。

具体例: 小三角形が 6 つになる理由

2 単体 $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ の重心細分で現れる 2 次元の小単体は、包含列 $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \sigma_2$ (頂点 $\subsetneq$ 辺 $\subsetneq$ 三角形) に対応する。このような列を数えると、頂点の選び方が 3 通り、その頂点を含む辺の選び方が 2 通り、辺を含む三角形は σ 自身の 1 通りなので、 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通りである。たとえば列 $[v_0] \subsetneq [v_0, v_1] \subsetneq [v_0, v_1, v_2]$ には、頂点 v_0 、辺 $[v_0, v_1]$ の中点、三角形の重心を結んだ小三角形が対応する。これが、前の例の「6 つの小三角形」の組合せ的な数え方である。

命題 2.20. 任意の有限単体的複体 K に対して、 $|\text{sd } K| = |K|$ である。したがって、重心細分は多面体の位相型を変えない。

理由. 重心細分は、各単体をその内部でより小さな単体に分けるだけであり、単体の外側に新しい点を加えるわけではない。また、分割した小単体をすべて合わせると、もとの単体全体がちょうど復元さ

れる。したがって、和集合としての多面体は変わらない。 $\square$

直観: 細分は何のためにあるのか

重心細分を繰り返した $\text{sd}^r K$ では、空間 $|K|$ は全く変わらず、単体のサイズだけがどこまでも小さくなる ($r \rightarrow \infty$ で各単体の直径は 0 に近づく)。つまり細分とは、同じ空間に対する「解像度の切り替え」である。後述の単体近似定理では、与えられた連続写像に応じて解像度を十分上げる、という形でこの操作が本質的に使われる。また、悪い貼り合わせを直すときや、PL 写像を単体写像に直すときにも細分が使われる。

2.8 単体写像と PL 写像

単体的複体の間の写像として、まず単体写像を定義する。単体写像は、頂点の行き先を決めると、各単体上では線形に定まる写像である。

定義 2.21 (単体写像). 単体的複体 K, L に対し、写像 $g : V(K) \rightarrow V(L)$ が**単体写像**であるとは、 K の任意の単体 $[v_0, \dots, v_k]$ に対して、像の頂点集合 $\{g(v_0), \dots, g(v_k)\}$ が L のある単体を張ることをいう。このとき、 g は各単体上でアフィン写像として $|K| \rightarrow |L|$ に拡張される。

単体写像では、頂点は頂点に写り、辺は辺または頂点に、三角形は三角形・辺・頂点のいずれかに写る。単体がつぶれることは許されるが、単体の内部が複雑に曲がって写ることではない。

具体例: 単体写像かどうかの判定

K を三角形の周 (頂点 a, b, c と 3 辺)、 L を 1 本の辺 $[w_0, w_1]$ (と両端点) からなる複体とする。頂点の対応 $g(a) = w_0, g(b) = w_1, g(c) = w_0$ を考える。 K の各単体の像の頂点集合を調べると、 $[a, b] \mapsto \{w_0, w_1\}$, $[b, c] \mapsto \{w_1, w_0\}$, $[a, c] \mapsto \{w_0\}$ であり、いずれも L の単体 (辺または頂点) を張るので、 g は単体写像である。このとき辺 $[a, c]$ は 1 点 w_0 につぶれる。一方、 L を折れ線 $w_0-w_1-w_2$ (辺は $[w_0, w_1]$ と $[w_1, w_2]$ のみ) とし、 $g(a) = w_0, g(b) = w_1, g(c) = w_2$ とすると、辺 $[a, c]$ の像の頂点集合 $\{w_0, w_2\}$ は L の単体を張らないので、これは単体写像ではない。

定義 2.22 (PL 写像). 多面体 $|K|$ から $|L|$ への連続写像 $f : |K| \rightarrow |L|$ が**PL 写像**であるとは、 K を適当に細分した複体 K' が存在して、 f が K' 上の単体写像として表されることをいう。

PL 写像は、空間を十分細かく分ければ、各小単体上では線形であるような写像である。したがって、単体写像より柔軟でありながら、なお組合せ的に扱いやすい。

定義 2.23 (PL 埋め込み). PL 写像 $f : |K| \rightarrow |L|$ が埋め込みであるとき、 f を**PL 埋め込み**という。

本巻で単体的複体の埋め込みを考えると、主に PL 圏で考える。これは、交差の有無を単体ごとの線形代数的な問題として扱えるからである。

2.9 開星と単体近似

単体近似定理を述べるために、頂点の星を導入する。

定義 2.24 (開星). 単体的複体 K の頂点 v に対し、 v を含むすべての単体の内部の和を v の開星といい、 $\text{st}(v)$ と書く。直感的には、 v のまわりの小さな縄張りである。

具体例: 三角形の周の開星

K を三角形の周 (頂点 v_0, v_1, v_2 と 3 辺) とし、 $\text{st}(v_0)$ を書き下してみる。 v_0 を含む単体は $[v_0]$, $[v_0, v_1]$, $[v_0, v_2]$ の 3 つであり、それぞれの内部は $\{v_0\}$ 、辺 $[v_0, v_1]$ から両端点を除いた開線分、辺 $[v_0, v_2]$ から両端点を除いた開線分である (0 単体の内部はその点自身と約束する)。したがって $\text{st}(v_0)$ は、 v_0 を通り v_1 と v_2 の手前で止まる「開いた折れ線」であり、 $|K|$ の開集合である。特に、他の頂点 v_1, v_2 は含まれない。3 つの開星 $\text{st}(v_0), \text{st}(v_1), \text{st}(v_2)$ を合わせると $|K|$ 全体が覆われることも確認できる。

単体近似は、連続写像 f と単体写像 g が、頂点のまわりで同じ方向を向いていることを表す条件によって定義される。

定義 2.25 (単体近似). 連続写像 $f: |K| \rightarrow |L|$ に対し、単体写像 $g: K \rightarrow L$ が f の単体近似であるとは、 K の任意の頂点 v に対して $f(\text{st}(v)) \subset \text{st}(g(v))$ が成り立つことをいう。

この条件は、 v の近くの点を f で写したものが、 $g(v)$ の近くに入っていることを意味する。つまり、 g は頂点の行き先だけを使って、 f の局所的な振る舞いを組合せ的に記録している。

2.10 単体近似定理

定理 2.26 (単体近似定理). K, L を有限単体的複体とし、 $f: |K| \rightarrow |L|$ を連続写像とする。このとき、 K の十分細かい重心細分 $\text{sd}^r K$ が存在し、 f にホモトピックな単体写像 $g: |\text{sd}^r K| \rightarrow |L|$ が存在する。この g を f の単体近似と呼ぶ。

復習: ホモトピック

第 I 巻の復習である。連続写像 $f, g: X \rightarrow Y$ がホモトピックであるとは、連続写像 $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ で $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ を満たすものが存在することをいう。ホモトピックな写像は、基本群やホモロジー群に同じ準同型を誘導する。したがって上の定理は、これらの不変量を調べる限り、連続写像 f を単体写像 g で置き換えてよいことを保証している。巻頭の「既習事項の要点」も参照するとよい。

この定理の意味は、次の一文にまとめられる。

どんな連続写像も、定義域を十分細かくすれば、組合せ的な単体写像で近似できる。

これは、連続の世界と組合せの世界をつなぐ非常に重要な橋である。

証明の考え方. 完全な証明はやや技術的なので、ここでは考え方だけ述べる。

まず、行き先 $|L|$ の各頂点 w に対し、開星 $\text{st}(w)$ を考える。これらの開星は $|L|$ 全体を覆う。次に、連続写像 f によってこの被覆を $|K|$ に引き戻す。 K を十分細かく重心細分すると、各頂点 v' の開星 $\text{st}(v')$ の像 $f(\text{st}(v'))$ が、 $|L|$ のどれか一つの開星 $\text{st}(w)$ に入るようにできる。これは、コンパクト性とレベーク数補題によって保証される。

そこで、そのような w を一つ選び、 $g(v') = w$ と定める。このようにして頂点の行き先を決めると、星状条件により g は単体写像になる。さらに、 f と g は各点で同じ単体の中に入るように作られているので、直線的に結ぶことでホモトピーが得られる。□

2.11 具体例：線分を三角形の中へ写す

単体近似定理の意味を、簡単な例で理解する。定義域 K を1本の線分とし、値域 L を中身を含む三角形とする。連続写像 $f: |K| \rightarrow |L|$ が、線分を三角形の内部のなめらかな曲線に写しているとする。このとき、 f は一般には単体写像ではない。なぜなら、線分の端点が三角形の頂点に写るとは限らず、線分全体も辺に沿って線形に写るとは限らないからである。

しかし、線分を十分細かく分割すると、各小区間の像は非常に短くなる。そのため、各小区間の像は三角形のいずれかの頂点の開星の中に収まるようになる。そこで、各新しい頂点を、その像が入っている開星の頂点へ送れば、単体写像が得られる。この単体写像は、もとの滑らかな曲線を、三角形の辺や小単体に沿って進む折れ線状の写像で近似していると考えられる。

注意 2.27. ここで重要なのは、近似された写像が元の写像とホモトピックであるという点である。つまり、ホモロジー群や基本群のようなホモトピー不変量を調べる目的では、元の連続写像の代わりに、組合せ的な単体写像を使ってよい。

2.12 埋め込み問題への応用

本章の用語を使うと、今後扱う埋め込み問題は次のように表せる。

問題 2.28. 有限単体的複体 K に対し、多面体 $|K|$ は $\mathbb{R}^m$ または S^m に PL 埋め込み可能か。

グラフ G の平面性は、 $|G| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ という PL 埋め込みが存在するかどうかを問う問題である。また、2次元複体 K の S^3 への埋め込み問題は、 $|K| \hookrightarrow S^3$ が存在するかどうかを問う問題である。

単体近似定理により、連続的な写像や配置を、十分細かい細分の後で単体写像として扱える。そのため、交差の有無、面の貼り合わせ方、補空間の構造などを有限の組合せデータに翻訳できる。これが、単体的複体を用いる大きな理由である。

2.13 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. アフィン独立、凸包、 n 単体の定義を説明できる。
2. 単体の面を具体的に列挙できる。

3. 単体的複体の面の条件と交わりの条件を説明できる。
4. よい貼り合わせと悪い貼り合わせを判定できる。
5. 多面体 $|K|$ と単体分割の意味を説明できる。
6. 重心細分が空間を変えずにメッシュを細かくする操作であることを理解する。
7. 単体写像と PL 写像の違いを説明できる。
8. 開星と単体近似の条件を説明できる。
9. 単体近似定理が、連続的な問題を組合せ的な問題へ移す道具であることを理解する。
10. PL 埋め込みを今後の埋め込み問題の基本言語として使える。

2.14 練習問題

練習問題 2.1. n 単体の定義を、「アフィン独立」と「凸包」という語句を用いて述べよ。

練習問題 2.2. 2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ のすべての面を列挙せよ。

練習問題 2.3. 単体の有限集合 K が単体的複体であるための 2 つの条件を述べよ。また、それぞれの条件が何を意味しているか説明せよ。

練習問題 2.4. 2 つの三角形が 1 つの辺全体を共有して貼り合わされている図形は、単体的複体の交わりの条件を満たすか。理由を述べよ。

練習問題 2.5. 一方の三角形の頂点が、もう一方の三角形の辺の途中の点に接している図形は、そのまま単体的複体の交わりの条件を満たすか。理由を述べよ。また、単体的複体として扱うにはどうすればよいか説明せよ。

練習問題 2.6. 三角形の周からなる単体的複体と、中身を含む三角形からなる単体的複体の違いを説明せよ。また、それぞれの多面体がどのような空間と同相か答えよ。

練習問題 2.7. 位相空間 X の単体分割とは何か説明せよ。また、単体分割がなぜ位相空間の研究に役立つのか述べよ。

練習問題 2.8. 線分 $[v_0, v_1]$ の重心細分を説明し、新しく現れる頂点と辺を述べよ。

練習問題 2.9. 単体写像と PL 写像の違いを説明せよ。

練習問題 2.10. 単体近似定理の主張と意義を説明せよ。特に、「連続」と「組合せ」という言葉を用いて説明せよ。

2.15 次章への橋渡し

本章では、単体的複体と多面体の基本用語を復習した。また、重心細分と単体近似定理により、連続的な対象を組合せ的な対象として扱う方法を見た。

次章からは、1 次元単体的複体であるグラフの平面埋め込みを扱う。特に、平面グラフに対するオイラーの公式を用いて、完全グラフ K_5 と完全二部グラフ $K_{3,3}$ が平面に埋め込めないことを示す。こ

の議論は、後に高次元の複体に対する埋め込み障害を考えるための最初のモデルケースになる。

第 3 章

平面的グラフとオイラーの公式

3.1 本章の目標

前章では、複雑な位相空間を単体という単純な部品で組み立てる方法を学んだ。本章では、その最も身近な例である**グラフ**を扱う。グラフは、頂点と辺からなる 1 次元単体的複体である。

本章の中心となる問いは、次の非常に素朴なものである。

与えられたグラフを、辺が端点以外で交差しないように平面上に描けるか。

これは、トポロジーの言葉では、1 次元単体的複体 G が $|G| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ と埋め込めるかどうかを問う問題である。電子回路の配線、路線図の作図、ネットワークの可視化などでも、「線をなるべく交差させずに描く」ことは重要である。数学では、この問題を**平面性**の問題として定式化する。

本章では、平面的グラフの定義から始め、平面に埋め込まれた連結グラフが満たす**オイラーの公式** $v - e + f = 2$ を学ぶ。ここで v は頂点数、 e は辺数、 f は面数である。さらに、この公式を用いて、完全グラフ K_5 と完全二部グラフ $K_{3,3}$ が平面に埋め込めないことを証明する。最後に、次章のクラフトスキーの定理への橋渡しとして、グラフの細分と「禁止部分構造」という考え方を紹介する。

本章の目標は次の通りである。

- 平面的グラフと平面グラフの違いを理解する。
- 平面グラフにおける面の意味を理解する。
- オイラーの公式 $v - e + f = 2$ を説明できる。
- オイラーの公式から $e \leq 3v - 6$ および $e \leq 2v - 4$ を導ける。
- K_5 と $K_{3,3}$ が平面的でないことを証明できる。
- クラフトスキーの定理とファン・カンペン障害の考え方への入口を理解する。

学習の指針

本章はグラフ理論を未習でも読めるように書かれている。前提となるのは、第 I 巻で学んだ位相空間・単体的複体の言葉と、第 1 章で導入した埋め込みの言葉だけであり、道・閉路・木・二部グラフなどのグラフ用語は本章の復習ボックスで補う。初出の概念は「平面的グラフ」「面」「オイラーの公式」「細分」である。まずオイラーの公式 $v - e + f = 2$ を小さな例で自分の手で検算し、そこから導かれる辺数の不等式で K_5 と $K_{3,3}$ の非平面性を示す、という一本道の流れを意識して読むとよい。

3.2 グラフを1次元単体的複体として見る

グラフ G は、頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$ からなる。本章では、自己ループや多重辺をもたない単純グラフを主に考える。

グラフを単体的複体として見ると、頂点は0単体、辺は1単体である。したがって、グラフは1次元単体的複体である。この見方により、グラフの平面性は $|G| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ という埋め込み問題として理解できる。

定義 3.1 (グラフ). グラフとは、頂点の集合 V と、頂点の2点を結ぶ辺の集合 E からなる組 $G = (V, E)$ である。単純グラフでは、自己ループや多重辺は考えない。

復習: グラフの基本用語

本章で使うグラフ用語をまとめておく。頂点 x_0 から x_k への**道**とは、辺で順に結ばれた相異なる頂点の列 $x_0, x_1, \dots, x_k$ のことである。また、辺で順に結ばれた頂点の列 $x_0, x_1, \dots, x_k$ で、 $x_0 = x_k$ であり、 $x_0, \dots, x_{k-1}$ が相異なり、しかも $k \geq 3$ であるものを**閉路**という。任意の2頂点が道で結べるとき、グラフは**連結**であるという。連結で閉路をもたないグラフを**木**という。頂点集合を2つの部分 A, B に分け、すべての辺が A の頂点と B の頂点を結ぶようにできるグラフを**二部グラフ**という。

例 3.2. 完全グラフ K_n は、 n 個の頂点の任意の2点の間に1本ずつ辺をもつグラフである。その辺数は $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ である。

具体例: K_4 と K_5 の辺の列挙

頂点を $1, 2, 3, 4$ とすると、 K_4 の辺は $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ の $\binom{4}{2} = 6$ 本である。頂点5を加えて K_5 を作ると、新しい辺は $\{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$ の4本であり、合計 $6 + 4 = 10 = \binom{5}{2}$ 本となる。各頂点の次数は、 K_4 ではすべて3、 K_5 ではすべて4である。

例 3.3. 完全二部グラフ $K_{m,n}$ は、頂点集合を2つの部分 A, B に分け、 $|A| = m, |B| = n$ とし、 A の各頂点と B の各頂点をすべて結んだグラフである。同じ側の頂点どうしは結ばない。その辺数は mn である。

具体例: $K_{3,3}$ の頂点と辺

$A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$ とすると、 $K_{3,3}$ の辺は $\{a_i, b_j\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) の $3 \cdot 3 = 9$ 本である。 a_1 に接続する辺は $\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_2\}, \{a_1, b_3\}$ の3本であり、どの頂点の次数も3である。 a_i どうし、 b_j どうしを結ぶ辺は存在しないことに注意する。

3.3 平面的グラフと平面グラフ

定義 3.4 (平面的グラフ). グラフ G が**平面的**であるとは、多面体 $|G|$ が平面 $\mathbb{R}^2$ に埋め込めることをいう。すなわち、埋め込み $|G| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ が存在することをいう。

復習: 埋め込み

位相空間 X から Y への**埋め込み**とは、連続写像 $h: X \rightarrow Y$ であって、 X から像 $h(X)$ (部分空間の位相を入れる) への同相写像を与えるもののことである。 $|G|$ はコンパクトで $\mathbb{R}^2$ はハウスドルフなので、連続な単射 $|G| \rightarrow \mathbb{R}^2$ は自動的に埋め込みになる。巻頭の既習事項の要点も参照。

平面的であるとは、「交差なしに平面に描ける」という**性質**である。一方、実際に平面内に交差なしで描かれたグラフを平面グラフという。

定義 3.5 (平面グラフ). グラフ G が平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間として埋め込まれているとき、その像を**平面グラフ**という。

したがって、**平面的グラフ**は「平面に埋め込めるグラフ」であり、**平面グラフ**は「実際に平面に埋め込まれたグラフ」である。

例 3.6 (一つの描画だけでは判定できない). 完全グラフ K_4 は、描き方によっては辺が交差する。しかし、別の描き方をすれば辺の交差をなくせる。したがって K_4 は平面的グラフである。

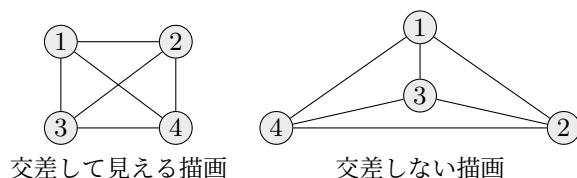


図 3.1 K_4 は描き方を変えると平面に交差なしで描ける。

注意 3.7. ある一つの図で辺が交差していることは、非平面的であることの証明にはならない。非平面的であることを示すには、どのように描いても交差が避けられないことを証明しなければならない。そのためには、平面的グラフが必ず満たす、描き方によらない条件を見つける必要がある。

3.4 平面グラフの面

平面グラフ $G \subset \mathbb{R}^2$ を考える。このとき、補空間 $\mathbb{R}^2 - G$ は一般にいくつかの連結成分に分かれる。これらの連結成分を、平面グラフの**面**という。

定義 3.8 (面). 平面グラフ $G \subset \mathbb{R}^2$ に対し、補空間 $\mathbb{R}^2 - G$ の連結成分を、 G の**面**という。有界な面を**内側の面**、非有界な面を**外側の面**という。

ここでいう面は、単体的複体における 2 単体とは異なる。平面グラフは 1 次元複体であるが、それ

を平面に埋め込むと、補空間の連結成分として2次元的な領域が現れる。これを平面グラフの面と呼ぶのである。

例 3.9 (木の面). 木 T を平面に埋め込むと、補空間 $\mathbb{R}^2 - T$ は連結である。したがって、面は外側の1つだけである。

例 3.10 (円周の面). 円周 S^1 を平面に標準的に埋め込むと、補空間は内側と外側の2つに分かれる。したがって、面数は2である。これはジョルダン曲線定理の最も基本的な例である。

復習: ジョルダン曲線定理

ジョルダン曲線定理とは、平面内の単純閉曲線 $C \subset \mathbb{R}^2$ (円周 S^1 と同相な部分空間) に対し、補空間 $\mathbb{R}^2 - C$ がちょうど2つの連結成分 (有界な内側と非有界な外側) に分かれ、 C がその共通の境界になる、という定理である。平面グラフの閉路は単純閉曲線なので、本章では「閉路の内側と外側は別の面に属する」という形でこの定理を繰り返し使う。

平面グラフの面を数えるときには、外側の非有界成分も必ず1つの面として数える。この点は、オイラーの公式を使う上で重要である。

3.5 オイラーの公式

平面グラフに対して、頂点数、辺数、面数の間には非常に基本的な関係がある。

定理 3.11 (オイラーの公式). G を連結な平面グラフとする。 G の頂点数を v 、辺数を e 、面数を f とすると、 $v - e + f = 2$ が成り立つ。

Proof. 辺の数 e に関する帰納法で証明する。

まず、 G が木である場合を考える。木は連結で閉路をもたないグラフである。このとき $e = v - 1$ である。また、木を平面に埋め込んだ場合、補空間は連結なので $f = 1$ である。したがって $v - e + f = v - (v - 1) + 1 = 2$ となる。

次に、 G が閉路をもつとする。閉路上の1本の辺 a を取り除いても、グラフの連結性は保たれる。平面上では、その辺 a は2つの面の境界の一部になっており、 a を取り除くとその2つの面が1つに合体する。したがって、辺数と面数が同時に1つずつ減る。すなわち $v(G - a) = v(G)$, $e(G - a) = e(G) - 1$, $f(G - a) = f(G) - 1$. 帰納法の仮定より $v(G - a) - e(G - a) + f(G - a) = 2$ であるから、代入して $v(G) - (e(G) - 1) + (f(G) - 1) = 2$ を得る。よって $v(G) - e(G) + f(G) = 2$ である。□

注意 3.12. この証明で大切なのは、閉路をもつ平面グラフから適切な辺を1本取り除くと、辺数と面数が同時に1つ減る、という点である。したがって、 $v - e + f$ は変化せず、木の場合の値2に帰着できる。

直観: 閉路上の辺を取り除くと面が合体する理由

証明中の「閉路上の辺 a の両側は異なる面である」という一言には、ジョルダン曲線定理が隠れている。辺 a を含む閉路は平面内の単純閉曲線を定めるので、その内側と外側は $\mathbb{R}^2 - G$ の中で別々の連結成分に属し、 a のすぐ両側の点は別の面にある。 a を取り除くと、この2つの面が a のあった場所を通してつながり、1つの面に合体する。これが e と f が同時に1ずつ減る理由である。逆に、木の辺 (どの閉路にも属さない辺) の両側は同じ面なので、このような合体は起こらない。

具体例: K_4 の平面埋め込みで検算する

前節の図の右側のように、 K_4 は頂点3を三角形124の内部に置くと交差なしに描ける。このとき頂点数と辺数は $v = 4$ 、 $e = 6$ である。面は、3つの小さい三角形123、134、234(頂点をこの順に囲む内側の面) と外側の面の合計 $f = 4$ 個である。実際に $v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$ となり、オイラーの公式が確認できる。

3.6 辺数評価

オイラーの公式から、平面的グラフが満たす不等式を導くことができる。

定義 3.13 (頂点の次数). グラフ G の頂点 v に接続する辺の本数を、 v の**次数**といい、 $\deg(v)$ と書く。

命題 3.14 (握手補題). 有限グラフ G に対して、

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2e$$

が成り立つ。

Proof. 各辺はちょうど2つの端点をもつ。したがって、頂点の次数をすべて足すと、各辺は両端で1回ずつ数えられる。よって、合計は辺数の2倍である。 $\square$

平面グラフでは、面の境界長の総和も辺数と関係する。各辺は通常、2つの面の境界に現れるので、面の境界長の総和は $2e$ である。

直観: 面の境界長の数え方

面の**境界長**とは、その面の境界を一周歩いたときに通る辺の本数 (重複して通る辺は重複して数える) である。閉路上の辺は両側に異なる面をもち、それぞれの面の境界で1回ずつ、合計2回数えられる。一方、木の辺のように両側が同じ面である辺は、その1つの面の境界を歩くときに往復で2回通る。どちらの場合も各辺はちょうど2回数えられるので、全部の面の境界長を足すと必ず $2e$ になる。これは、握手補題で各辺を両端点で2回数えたのと同じ発想である。

命題 3.15 (単純平面グラフの辺数評価). G を $v \geq 3$ を満たす連結単純平面グラフとする。このとき $e \leq 3v - 6$ が成り立つ。

Proof. 単純平面グラフでは、各面の境界長は少なくとも3である。したがって、面の境界長をすべて足すと $3f \leq 2e$ である。一方、オイラーの公式より $f = 2 - v + e$ である。これを代入すると $3(2 - v + e) \leq 2e$ となる。整理して $6 - 3v + 3e \leq 2e$ すなわち $e \leq 3v - 6$ を得る。□

具体例: K_4 で $e \leq 3v - 6$ を確かめる

K_4 では $v = 4$, $e = 6$ であり、 $3v - 6 = 3 \cdot 4 - 6 = 6$ なので、不等式 $e \leq 3v - 6$ は等号 $6 = 6$ で成り立つ。等号成立は、証明中の不等式 $3f \leq 2e$ が等号になる場合、すなわちすべての面の境界長がちょうど3(すべての面が三角形)の場合である。実際、前節で検算した K_4 の平面埋め込みでは、外側の面も含めて4つの面すべてが三角形で囲まれていた。

命題 3.16 (三角形をもたない場合の辺数評価). G を $v \geq 3$ を満たす連結単純平面グラフとする。さらに、 G が三角形をもたないとする。このとき $e \leq 2v - 4$ が成り立つ。

Proof. G が三角形をもたないので、各面の境界長は少なくとも4である。したがって $4f \leq 2e$ である。オイラーの公式より $f = 2 - v + e$ であるから、 $4(2 - v + e) \leq 2e$ となる。これを整理すると $8 - 4v + 4e \leq 2e$ であり、 $e \leq 2v - 4$ を得る。□

3.7 完全グラフ K_5 の非平面性

K_5 が平面的でないことを、オイラーの公式から導く。

定理 3.17. 完全グラフ K_5 は平面的でない。

Proof. K_5 の頂点数と辺数は $v = 5$, $e = \binom{5}{2} = 10$ である。仮に K_5 が平面的であるとする。オイラーの公式より $5 - 10 + f = 2$ なので $f = 7$ である。一方、 K_5 は単純グラフであるから、各面は少なくとも3本の辺で囲まれる。したがって $3f \leq 2e$ が成り立つはずである。ここに $f = 7$ と $e = 10$ を代入すると $3 \cdot 7 \leq 2 \cdot 10$ すなわち $21 \leq 20$ となる。これは矛盾である。したがって、 K_5 は平面的でない。□

この証明の要点は、平面的であると仮定すると、オイラーの公式から面数 $f = 7$ が強制される一方で、面の境界長を数えると $3f \leq 2e$ が必要になることである。この2つが両立しないため、平面埋め込みは存在しない。

具体例: 不等式 $e \leq 3v - 6$ による確認

前節の辺数評価を直接使っても同じ結論が得られる。 K_5 では $v = 5$, $e = 10$ であり、 $3v - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$ である。もし K_5 が平面的なら $e \leq 3v - 6$ 、すなわち $10 \leq 9$ となり矛盾する。これは、上の証明でオイラーの公式と $3f \leq 2e$ から矛盾を導いた計算を、不等式の形にまとめ直したものである。一方 K_4 では $e = 6 \leq 9 = 3v - 6$ なので矛盾は生じない(実際 K_4 は平面的であった)。

3.8 完全二部グラフ $K_{3,3}$ の非平面性

次に、完全二部グラフ $K_{3,3}$ を考える。これは、「3 軒の家と 3 種類の供給源を、配管が交差しないように結べるか」という古典的な問題としても知られている。

定理 3.18. 完全二部グラフ $K_{3,3}$ は平面的でない。

Proof. $K_{3,3}$ の頂点数と辺数は $v = 6$, $e = 3 \cdot 3 = 9$ である。また、 $K_{3,3}$ は二部グラフなので三角形をもたない。もし $K_{3,3}$ が平面的なら、三角形をもたない単純平面グラフに対する不等式 $e \leq 2v - 4$ を満たすはずである。しかし、右辺は $2 \cdot 6 - 4 = 8$ であり、 $e = 9$ であるから $9 \leq 8$ という矛盾が生じる。したがって、 $K_{3,3}$ は平面的でない。□

復習: 二部グラフに三角形がない理由

二部グラフの閉路の長さは必ず偶数である。実際、閉路に沿って歩くと、辺をたどるたびに A 側と B 側が交互に入れ替わるので、出発点に戻るためには偶数本の辺をたどる必要がある。三角形は長さ 3 (奇数) の閉路だから、二部グラフには存在しない。これが、上の証明で $K_{3,3}$ に対して三角形なしの不等式 $e \leq 2v - 4$ を使えた理由である。

注意 3.19. K_5 の非平面性では $3f \leq 2e$ を用いた。一方、 $K_{3,3}$ は三角形をもたないため、より強い不等式 $4f \leq 2e$ を用いる。この違いを意識しておくと、2 つの証明の構造が分かりやすい。

3.9 細分とクラトフスキーの定理への入口

オイラーの公式は、 K_5 や $K_{3,3}$ の非平面性を示す強力な道具である。しかし、オイラーの公式だけで平面性を完全に判定できるわけではない。平面的であるための完全な特徴づけを与えるのが、次章で詳しく扱うクラトフスキーの定理である。

その準備として、グラフの細分を定義しておく。

定義 3.20 (グラフの細分). グラフ G の細分とは、 G のいくつかの辺の途中で新しい頂点を挿入して得られるグラフのことである。

具体例: 三角形の細分

三角形 (長さ 3 の閉路) の 1 本の辺 $\{1, 2\}$ の途中で新しい頂点 4 を挿入すると、辺 $\{1, 2\}$ が 2 本の辺 $\{1, 4\}, \{4, 2\}$ に置き換わり、長さ 4 の閉路 (四角形) が得られる。1 本の辺が 2 本に置き換わるので、頂点数は 3 から 4 へ、辺数も 3 から 4 へ、それぞれちょうど 1 ずつ増える。多面体としてはどちらも円周 S^1 と同相であり、平面に埋め込むと面数はどちらも $f = 2$ で、 $3 - 3 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$ とオイラーの公式の値も変わらない。

細分は、グラフのトポロジーを変えない。辺の途中で頂点を追加しても、多面体としては同相な空間である。したがって、平面性も細分によって変わらない。

定理 3.21 (クラトフスキーの定理). 有限グラフ G が平面的であるための必要十分条件は、 G が K_5 の細分も $K_{3,3}$ の細分も部分グラフとして含まないことである。

注意 3.22. この定理は、グラフが平面的でないことの本質的な原因が、 K_5 または $K_{3,3}$ という2つの禁止構造に集約されることを述べている。すなわち、 K_5 と $K_{3,3}$ は平面埋め込みに対する根本的な障害である。

3.10 発展的補足：ファン・カンペン障害の直感

クラトフスキーの定理は、グラフを平面に埋め込む際の障害を K_5 と $K_{3,3}$ という組合せ的構造で表したものである。この「埋め込みの障害」という考え方は、より高次元の埋め込み問題へ一般化される。その代表例が**ファン・カンペン障害**である。

ここでは、厳密な定義には踏み込まず、考え方だけを述べる。 k 次元単体的複体 K を $\mathbb{R}^{2k}$ に写すと、一般の位置では、互いに素な k 単体どうしの像が点で交わる可能性がある。この交差をすべて矛盾なく消せるかどうかを代数的に測る量が、ファン・カンペン障害である。

グラフの場合は $k = 1$ であり、 K を平面 $\mathbb{R}^2$ に描いたとき、互いに頂点を共有しない辺どうしが交差するかどうかの問題になる。ファン・カンペン障害は、この「避けられない交差」を代数的に記録する考え方である。

注意 3.23. K_5 の場合、互いに頂点を共有しない辺のペアを考え、それらの交差数を mod 2 で数えると、どのように描いても全体として消えない交差情報が残る。これが、ファン・カンペン障害が非ゼロであるという直感的な意味である。

直観: なぜ mod 2 で数えるのか

交差点の個数そのものは、描き方を少し変えるだけで簡単に変化する。たとえば、2本の辺を少し波打たせて2回余分に交差させれば、交差点は2個増える。このように、描画の連続的な変形で交差点は**2個ずつ**生じたり消えたりするので、変形しても壊れない情報を取り出すには mod 2 で数えるのが自然である。 K_5 では、互いに頂点を共有しない辺のペアの交差数を mod 2 で総和した量が描き方によらず1になることが示せる。交差が1つもない描画(平面埋め込み)ではこの量は0のはずなので、平面埋め込みは存在しない、というのが障害の使い方である。

本巻では後に、2次元複体の高次元ユークリッド空間への埋め込みを扱う際に、この考え方をもう一度取り上げる。

3.11 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. 平面的グラフと平面グラフの違いを説明できる。
2. 平面グラフの面を、補空間の連結成分として説明できる。
3. 連結平面グラフのオイラーの公式 $v - e + f = 2$ を述べられる。
4. 単純平面グラフに対する不等式 $e \leq 3v - 6$ を導ける。

5. 三角形をもたない単純平面グラフに対する不等式 $e \leq 2v - 4$ を導ける。
6. K_5 と $K_{3,3}$ が平面的でないことを証明できる。
7. グラフの細分と、クラトフスキーの定理の主張を理解する。
8. 埋め込み障害という考え方が、高次元ではファン・カンペン障害へ発展することを理解する。

3.12 練習問題

練習問題 3.1. 三角形の周を平面グラフとして考える。頂点数 v 、辺数 e 、面数 f を求め、オイラーの公式を確認せよ。

練習問題 3.2. 四角形の周に対して、頂点数 v 、辺数 e 、面数 f を求めよ。また、オイラーの公式を確認せよ。

練習問題 3.3. 木 T が v 個の頂点をもつとき、辺数が $v - 1$ であることを用いて、平面に埋め込まれた木がオイラーの公式を満たすことを確認せよ。

練習問題 3.4. 完全グラフ K_4 の頂点数と辺数を求めよ。また、 $e \leq 3v - 6$ を満たすことを確認せよ。この事実だけで K_4 が平面的であると結論してよいか考えよ。

練習問題 3.5. 完全グラフ K_5 が平面的でないことを、オイラーの公式と不等式 $3f \leq 2e$ を用いて示せ。

練習問題 3.6. 完全二部グラフ $K_{3,3}$ が平面的でないことを、三角形をもたない平面グラフの不等式 $e \leq 2v - 4$ を用いて示せ。

練習問題 3.7. 完全二部グラフ $K_{2,3}$ の頂点数と辺数を求めよ。また、不等式 $e \leq 2v - 4$ を満たすことを確認せよ。このことから何が分かり、何は分からないか説明せよ。

練習問題 3.8. 「オイラーの公式は埋め込み障害を与える」という意味を、 K_5 または $K_{3,3}$ の例を用いて説明せよ。

練習問題 3.9. グラフの細分とは何か説明せよ。また、細分によってグラフの平面性が変わらない理由を述べよ。

練習問題 3.10. クラトフスキーの定理の主張を述べ、この定理が「埋め込みの障害」をどのように具体化しているか説明せよ。

練習問題 3.11. ファン・カンペン障害の直感的な意味を、「互いに素な単体の像の交差」という言葉を用いて説明せよ。

3.13 次章への橋渡し

本章では、平面的グラフの定義、オイラーの公式、そして K_5 と $K_{3,3}$ の非平面性を学んだ。また、細分とクラトフスキーの定理の主張を紹介し、平面埋め込みに対する基本的な障害が K_5 と $K_{3,3}$ に集約されることを見た。

次章では、クラトフスキーの定理をさらに詳しく扱う。特に、部分グラフ、部分分割、マイナーという考え方を整理し、「禁止部分構造による埋め込み可能性の特徴づけ」という視点を明確にする。この視点は、本巻後半で扱う臨界的複体や埋め込み型の順序構造へつながる。

第 4 章

クラトフスキーの定理の証明

4.1 本章の目標

前章では、平面的グラフの基本性質を学び、オイラーの公式を用いて K_5 と $K_{3,3}$ が平面的でないことを示した。また、クラトフスキーの定理を次の形で述べた。

有限グラフ G が平面的であるための必要十分条件は、 G が K_5 の部分分割も $K_{3,3}$ の部分分割も部分グラフとして含まないことである。

この定理は、グラフの平面性を完全に特徴づける定理である。しかし、なぜ禁止される構造が K_5 と $K_{3,3}$ だけで十分なのだろうか。より大きな非平面的グラフ、たとえば K_6 や $K_{3,4}$ を、別に禁止する必要はないのだろうか。

本章では、クラトフスキーの定理の証明の全体像を学ぶ。完全な証明はやや長く、グラフ理論の多くの補題を必要とする。そこで本章では、細部をすべて追うのではなく、証明の論理構造を理解することを目標とする。

証明の中心にある考え方は次の三つである。

1. 最小の反例を仮定する。
2. グラフの連結度に応じて分解する。
3. 小さな部分に現れた禁止構造を、元のグラフへ復元する。

本章の目標は次の通りである。

- クラトフスキーの定理の証明における「容易な方向」と「難しい方向」を区別できる。
- カット頂点、ブロック、2-連結、3-連結の意味を理解する。
- 最小反例を用いる証明方針を理解する。
- 3-連結グラフの場合の証明の核心を、辺の縮約と復元の言葉で説明できる。
- 2-連結だが 3-連結でない場合の「分解と復元」の考え方を理解する。
- 1-連結の場合がブロック分解によって処理できることを理解する。

証明の厳密度

本章では、定理の「容易な方向」は**（厳密）**として完全に証明する。一方、逆方向は長い古典的証明を必要とするため、**（概要）**として論理構造を追う。特に、最小反例、連結度による場合分け、辺の縮約と復元、という三つの道具がどのように連動するかを理解することを目標とする。

この章の読み方

前提となるのは前章の内容、すなわちオイラーの公式、辺数の評価 $e \leq 3v - 6$ と $e \leq 2v - 4$ による K_5 、 $K_{3,3}$ の非平面性、およびグラフの細分である。一方、カット頂点、ブロック、2-連結・3-連結といった連結度の概念、辺の縮約、最小反例法は本章で初めて登場する。これらは純粋にグラフ理論の道具なので、位相の知識よりも「小さなグラフで手を動かして確かめる」ことが理解の近道である。各定義の直後の具体例を、必ず自分で紙に描いて追ってほしい。

4.2 クラトフスキーの定理の復習

まず、定理を再掲する。

定理 4.1 (クラトフスキーの定理). 有限グラフ G が平面的であるための必要十分条件は、 G が K_5 の部分分割グラフも $K_{3,3}$ の部分分割グラフも部分グラフとして含まないことである。

復習：部分分割グラフ

グラフ H の**部分分割グラフ**とは、 H のいくつかの辺の途中に次数 2 の頂点を挿入して得られるグラフのことであり、前章で定義した H の「細分」と同じものである。たとえば、三角形 K_3 の 1 辺の途中に頂点を 1 つ挿入すると、長さ 4 のサイクル C_4 が得られるので、 C_4 は K_3 の部分分割グラフである。また前章では、オイラーの公式から導いた辺数の評価 $e \leq 3v - 6$ および $e \leq 2v - 4$ を用いて、 K_5 と $K_{3,3}$ が非平面的であることを証明した。本章の議論はこの二つの事実を土台にする。

この定理には二つの方向がある。

1. G が K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むなら、 G は非平面的である。
2. G が非平面的なら、 G は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。

第一の方向は比較的簡単である。実際、 K_5 と $K_{3,3}$ は非平面的であり、部分分割はグラフの位相的な形を変えない。また、平面的グラフの部分グラフは平面的である。したがって、非平面的な部分分割を部分グラフとして含むグラフは非平面的である。

一方、第二の方向は深い。任意の非平面的グラフについて、その内部に必ず K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が潜んでいることを示さなければならないからである。本章で扱うのは、主にこの第二の方向の証明の考え方である。

直観：二つの方向の難しさの違い

第一の方向は、与えられたグラフの中に「非平面性の証拠」が具体的に見ついている状況であり、その証拠が実際に平面描画を妨げることを確かめればよい。一方、第二の方向は「どんな非平面的グラフにも例外なく証拠がある」という全称的な主張である。非平面的グラフは無数にあり、その形は千差万別なので、一つ一つ調べるわけにはいかない。そこで、反例が存在したと仮定して最小のものを取り、その構造を連結度によって追い詰める、という間接的な戦略が必要になる。

4.3 証明のための基本補題

証明で繰り返し用いる基本事実を確認する。

補題 4.2 (部分グラフ). 平面的グラフの任意の部分グラフは平面的である。

Proof. 平面的グラフ G の平面描画を一つ取る。部分グラフは、その図からいくつかの辺と頂点を取り除いて得られる。取り除く操作によって、新たな交差が生じることはない。したがって、部分グラフも平面的である。 $\square$

補題 4.3 (部分分割). グラフ G が平面的であることと、 G の任意の部分分割グラフが平面的であることは同値である。

Proof. G が平面的なら、平面描画された辺の途中に新しい頂点を置けば、部分分割グラフの平面描画が得られる。逆に、 G の部分分割グラフが平面的なら、挿入された次数 2 の頂点を辺の途中の点として無視すれば、もとの G の平面描画が得られる。したがって、部分分割は平面性を変えない。 $\square$

これらから、クラトフスキーの定理の一方がすぐに従う。

系 4.4 (容易な方向). グラフ G が K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を部分グラフとして含むなら、 G は平面的でない。

Proof. もし G が平面的なら、その部分グラフも平面的である。しかし、 K_5 と $K_{3,3}$ は非平面的であり、その部分分割も非平面的である。したがって、 G は平面的ではあり得ない。 $\square$

具体例：ペテルセングラフの非平面性

ペテルセングラフを、外側のサイクル $1-2-3-4-5-1$ 、内側の頂点 $1', \dots, 5'$ (内側では i' と $(i+2)'$ を結ぶ。添字は 5 を法とする)、およびスポーク $i-i'$ からなるグラフとする (頂点 10 個、辺 15 本)。このグラフの中に $K_{3,3}$ の部分分割が見つかる。実際、二組の頂点 $A = \{1, 3', 2'\}$ と $B = \{2, 1', 5'\}$ を取り、次の 9 本の道を考える。

- $1-2, \quad 1-1', \quad 1-5-5'$
- $3'-3-2, \quad 3'-1', \quad 3'-5'$
- $2'-2, \quad 2'-4'-1', \quad 2'-5'$

これらは A の各頂点と B の各頂点を 1 本ずつ結び、途中で使う頂点 $5, 3, 4'$ はすべて相異な

る。つまり、この9本の道の和集合は $K_{3,3}$ の部分分割グラフである。したがって、上の系により、ペテルセングラフは非平面的である。なお、ペテルセングラフの頂点はすべて次数3なので、次数4の分岐頂点を5個必要とする K_5 の部分分割を含むことはあり得ない。禁止構造が2種類用意されていることが、ここで効いている。

4.4 カット頂点とブロック

難しい方向の証明では、グラフの連結性を詳しく調べる。

定義 4.5 (カット頂点). 連結グラフ G の頂点 v が**カット頂点**であるとは、 v を取り除くと $G - v$ が非連結になることをいう。

定義 4.6 (ブロック). グラフ G の**ブロック**とは、カット頂点をもたない極大な連結部分グラフのことである。つまり、それ以上頂点や辺を加えるとカット頂点が見えるような、カット頂点をもたない最大部分である。

具体例：ブロック分解を実行する

頂点 a, b, c, d, e, f をもち、三角形 abc 、三角形 cde 、辺 ef からなるグラフ G を考える (頂点6個、辺7本)。

- c を取り除くと $\{a, b\}$ と $\{d, e, f\}$ に分かれるので、 c はカット頂点である。
- e を取り除くと f が孤立するので、 e もカット頂点である。
- 他の頂点を取り除いても連結のままである。

したがって G のブロックは、三角形 abc 、三角形 cde 、辺 ef の3個である。辺 ef のように、1本の辺だけからなる部分グラフもブロックになり得ることに注意しよう (2頂点と1辺のグラフにはカット頂点がない)。各ブロックは明らかに平面的なので、下の命題により G も平面的である。

グラフは、いくつかのブロックをカット頂点で貼り合わせたものとして見ることができる。平面性はブロックごとに調べられる。

命題 4.7 (ブロックと平面性). 連結グラフ G が平面的であることと、 G のすべてのブロックが平面的であることは同値である。

証明の考え方. G が平面的なら、その部分グラフである各ブロックも平面的である。逆に、各ブロックが平面的なら、それぞれを平面に描き、カット頂点に対応する点で順に貼り合わせることで、 G 全体を平面に描くことができる。ブロックどうしはカット頂点でだけ接しているので、貼り合わせの際に新たな交差を作らないように配置できる。□

この命題により、非平面的グラフを調べるときには、まずカット頂点をもたない部分、つまり2-連結な部分に注目すればよいことが分かる。

4.5 2-連結グラフと 3-連結グラフ

次に、証明で使う連結度を定義する。

定義 4.8 (2-連結). グラフ G が **2-連結**であるとは、 G が連結で頂点数が 3 以上であり、どの 1 頂点を取り除いても連結なままであることをいう。同値に、 G が頂点数 3 以上でカット頂点をもたない連結グラフであることをいう。

定義 4.9 (3-連結). グラフ G が **3-連結**であるとは、 G が連結で頂点数が 4 以上であり、どの 2 頂点を取り除いても連結なままであることをいう。

注意 4.10. 頂点数の下限を付けないと、たとえば三角形 K_3 はどの 2 頂点を除いても 1 頂点が残って連結なので「3-連結」になってしまう。一般に K_n はちょうど $(n-1)$ -連結であるという標準的な約束に合わせるために、 k -連結の定義には「頂点数が $k+1$ 以上」という条件を含めるのが普通である。

直感的には、3-連結グラフは 2-連結グラフよりも頑健である。少数の頂点を取り除いても壊れにくいので、構造が硬く、平面描画も強く制約される。

具体例：連結度を手で確かめる

小さなグラフで連結度を判定してみよう。

- サイクル C_5 (頂点 $1, \dots, 5$) は、どの 1 頂点を除いても道が残るので 2-連結である。しかし隣接しない 2 頂点、たとえば 1 と 3 を除くと、 $\{2\}$ と $\{4, 5\}$ に分かれる。よって C_5 は 3-連結ではない。
- K_4 からどの 2 頂点を除いても、残りは 1 本の辺で連結である。よって K_4 は 3-連結である。
- K_5 はどの 2 頂点を除いても K_3 が残るので 3-連結である。 $K_{3,3}$ も、同じ側の 2 頂点を除けば $K_{1,3}$ 、異なる側から 1 頂点ずつ除けば $K_{2,2}$ が残り、いずれも連結なので 3-連結である。

禁止構造 K_5 と $K_{3,3}$ がどちらも 3-連結であることは、後で 3-連結の場合が証明の核心になることと呼応している。

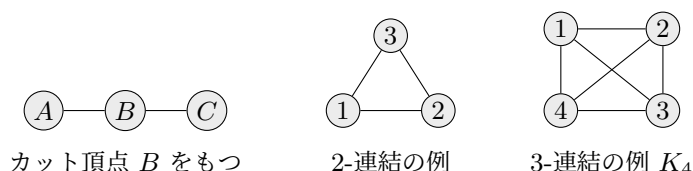


図 4.1 連結性の違い。左はカット頂点を持ち、中央は 2-連結、右の K_4 は 3-連結である。

3-連結な平面的グラフについては、平面への埋め込みが本質的に一意であるという強い性質がある。これは Whitney の定理や Tutte の理論に関する深い事実であり、クラトフスキーの定理の証明の背景にある。本書では、この一意性の詳細な証明には立ち入らないが、3-連結グラフが証明の出発点

として扱いやすい理由として覚えておく。

4.6 証明の全体戦略

クラトフスキーの定理の難しい方向を証明したい。すなわち、

非平面的な有限グラフは、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。

証明は背理法で進める。

証明の全体像. 定理が成り立たないと仮定する。すると、非平面的であるにもかかわらず、 K_5 の部分分割も $K_{3,3}$ の部分分割も含まないグラフが存在する。そのような反例のうち、頂点数または辺数が最小のものを一つ選び、これを G とする。

この G は、最小性のために非常に強い制約を受ける。たとえば、 G の真の部分グラフは、定理を満たす。したがって、真の非平面的部分グラフが存在すれば、そこにすでに K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が見つかり、 G が反例であることに矛盾する。

この最小反例 G を、連結度に応じて調べる。まず、 G は 2-連結でなければならない。次に、3-連結な場合を証明の核心として扱う。最後に、2-連結だが 3-連結でない場合と、1-連結の場合を分解によって処理する。□

直観：最小反例法は帰納法である

「最小の反例を取って矛盾を導く」議論は、辺数 (または頂点数) に関する強い帰納法の言い換えである。最小反例 G を取った瞬間に、「 G より小さいグラフはすべて定理を満たす」という事実が手に入る。これが帰納法の仮定に相当し、以後の議論で何度でも自由に使える。実際この後の各節では、 G から何らかの操作 (ブロックへの分解、頂点の除去、辺の縮約) で小さいグラフを作り、そこに最小性を適用する、という同じ型の議論が繰り返される。「小さくして、最小性を使う」という型を意識して読むと、証明全体の見通しがよくなる。

この証明の流れを短く書くと、次のようになる。

場合	証明の考え方
3-連結	辺の縮約・復元の失敗から K_5 または $K_{3,3}$ を見つける
2-連結だが 3-連結でない	2 頂点分離で小さな部品に分解し、禁止構造を復元する
1-連結	ブロック分解により 2-連結の場合へ帰着する

4.7 最小反例は 2-連結である

最小反例 G が 2-連結であることを説明する。

命題 4.11. クラトフスキーの定理に対する最小反例 G は 2-連結である。

証明の考え方. もし G が 2-連結でなければ、 G はカット頂点をもつ。すると G は複数のブロックをカット頂点で貼り合わせたものとして表される。

もしすべてのブロックが平面的なら、それらをカット頂点に沿って平面上で貼り合わせることで、

G 全体も平面的になる。これは G が非平面的であることに反する。したがって、少なくとも一つのブロック B は非平面的である。

この B は G の真の部分グラフであり、 G より小さい。 G は最小反例なので、 B は反例ではあり得ない。よって B は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。しかし B は G の部分グラフだから、 G もそれを含む。これは G が反例であることに矛盾する。

したがって、最小反例 G はカット頂点をもたず、2-連結である。 $\square$

注意 4.12. この議論は、最小反例法の典型例である。「反例があれば最小の反例を取る」と、その反例は余分な分解や簡単な部分をもてなくなる。その結果、構造が強く制限される。

4.8 次数 2 の頂点を持たないこと

最小反例には、次数 2 の頂点も現れない。

命題 4.13. クラトフスキーの定理に対する最小反例 G は、次数 2 の頂点をもたない。

証明の考え方. G に次数 2 の頂点 v があるとする。 v の隣接頂点を u, w とする。

まず、 u と w が辺で結ばれている場合を考える。このとき、 v を取り除いて得られるグラフ $G - v$ は G より小さいので、 G の最小性より $G - v$ は反例ではない。そこで 2 つの場合に分ける。もし $G - v$ が非平面的なら、 $G - v$ は反例でないので K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。それは G の部分グラフでもあるから、 G が反例であることに矛盾する。したがって $G - v$ は平面的である。その平面描画の中で、辺 uw の近くにパス $u - v - w$ を挿入すれば、 G の平面描画が得られる。これは G が非平面的であることに反する。

次に、 u と w が辺で結ばれていない場合を考える。このとき、 v を取り除き、代わりに辺 uw を加えたグラフ H を考える。 H は G より小さいので、やはり反例ではない。もし H が非平面的なら、 H は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。 G は H の辺 uw を部分分割して得られるグラフだから、 G もその部分分割を含み、 G が反例であることに矛盾する。したがって H は平面的である。部分分割は平面性を変えないので、 G も平面的となる。これも矛盾である。

したがって、 G は次数 2 の頂点をもたない。

なお、ここで「最小性より小さいグラフは平面的」と一足飛びに結論してはいけない。最小性から直接従うのは「小さいグラフは反例ではない」ということだけであり、非平面的な場合には禁止構造を含むという上の場合分けが必要である。 $\square$

具体例：次数 2 の頂点の除去

上の証明の第二の場合の操作を、小さなグラフで実行してみよう。 K_4 (頂点 x, y, z, t) の辺 xy の途中に頂点 v を挿入したグラフを G とする(頂点 5 個、辺 7 本)。 v は次数 2 で、その隣接頂点 x, y は G の中では辺で結ばれていない(もとの辺 xy は道 $x-v-y$ に置き換わったからである)。そこで v を取り除いて辺 xy を加えると、グラフ $H = K_4$ が得られる(頂点 4 個、辺 6 本)。 G は H の辺 xy を部分分割したものにはほかならないので、 H の平面描画から G の平面描画が直ちに得られる。このように、次数 2 の頂点は「部分分割で挿入された頂点」として吸収でき、平面性の議論では本質的な情報をもたない。

この事実は、禁止構造を探すときに重要である。次数2の頂点は、部分分割によって挿入された頂点と同じ役割を果たすため、最小反例には本質的には不要なのである。

4.9 3-連結グラフの場合：縮約と復元

証明の核心は、3-連結な最小非平面的グラフを扱う部分である。ここでは、その考え方を述べる。

G を、 K_5 の部分分割も $K_{3,3}$ の部分分割も含まない 3-連結非平面的グラフのうち、辺数が最小のもの（すなわち 3-連結な最小反例）とする。ここで「辺数が最小の 3-連結非平面的グラフ」とだけ言っていると、それは $K_{3,3}$ （辺 9 本）になってしまい、議論にならないことに注意する。禁止構造を含まないという条件を込めて最小性を取るのが要点である。

G から適当な辺

$e = uv$ を選び、これを縮約して新しいグラフ G/e を作る。辺を縮約するとは、端点 u と v を一つの頂点に同一視する操作である。

定義 4.14 (辺の縮約). グラフ G の辺 $e = uv$ を縮約するとは、 u と v を一つの頂点に同一視し、辺 e を消す操作をいう。得られるグラフを G/e と書く。

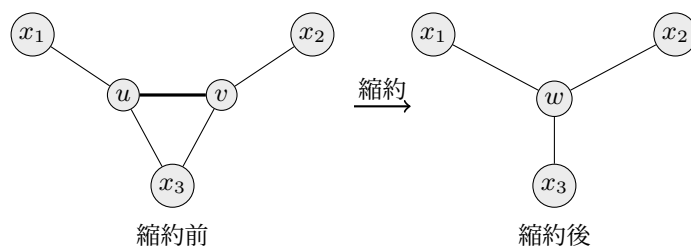


図 4.2 辺 uv を縮約し、端点 u, v を一つの頂点 w にまとめる。

具体例：縮約を手で実行する

単純グラフの範囲で考えるため、縮約の結果重複して生じた辺は 1 本にまとめる約束とする。

- サイクル C_5 の 1 辺を縮約すると、サイクル C_4 になる。
- K_5 の辺 uv を縮約すると、まとめられた頂点 w は残り 3 頂点すべてと隣接するので、 $K_5/e = K_4$ である。頂点は $5 \rightarrow 4$ 、辺は $10 \rightarrow 6$ に減る (uv が消え、3 組の平行辺がそれぞれ 1 本にまとまる)。
- 先のペテルセングラフで、5 本のスポーク $i-i'$ をすべて縮約してみよう。 i と i' をまとめた頂点を w_i と書くと、外側のサイクルから w_i と $w_{i\pm 1}$ が、内側の辺から w_i と $w_{i\pm 2}$ が隣接する。つまりどの 2 頂点も隣接し、 K_5 が得られる。

最後の例が示すように、縮約は強力な操作であり、部分グラフとしては K_5 の部分分割を含まないグラフ (ペテルセングラフの頂点はすべて次数 3 であった) から K_5 を作り出すことがある。一般に、部分グラフを取って辺の縮約を繰り返して得られるグラフを**マイナー**と呼ぶ。この言葉は本章後半の禁止マイナー定理で再び現れる。

ここで、 G が 3-連結で頂点数が 5 以上なら、 G/e がふたたび 3-連結になるような辺 e が存在する

(Tutte–Thomassen の縮約可能辺の補題)。以下ではそのような e を選ぶ。また、 G/e が K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含めば、それを G の中に引き戻せることも確かめられる（縮約した頂点を再び分けるときに、分岐頂点を結ぶ道を G の中で選び直せばよい）。したがって G の最小性より、 G/e は非平面的ではあり得ず、 G/e は平面的である。

そこで、 G/e の平面描画を取り、縮約された頂点を再び u と v に分けて、辺 uv を戻すことを試みる。

もしこの復元がうまくいけば、 G も平面的になる。しかし G は非平面的であるから、復元は必ず失敗する。この失敗の原因を調べると、縮約された頂点のまわりの隣接点の並び方が、 u と v を交差なしに分けることを妨げていることが分かる。

その妨げ方を詳しく分類すると、本質的には二つの場合しかない。

- 4つの頂点が互いに絡むように配置され、 u, v と合わせて K_5 の部分分割を作る場合。
- 6つの頂点が二つの側に分かれ、 u, v と合わせて $K_{3,3}$ の部分分割を作る場合。

したがって、3-連結な非平面的グラフは、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。

注意 4.15. この部分が証明の最も難しい箇所である。完全な証明では、復元を妨げる構造を平面描画の面の配置やサイクルを用いて厳密に分類する。本書では、縮約したグラフの平面描画から元のグラフを戻そうとすると、失敗の原因としてちょうど K_5 型または $K_{3,3}$ 型の構造が現れる、という流れを押さえる。

直観：復元はなぜ失敗するか

G/e の平面描画で、まとめられた頂点 w のまわりを小さな円で囲むと、 w から出る辺はこの円と決まった巡回順序で交わる。 w を再び u と v に分けるには、この円周上の辺たちを「 u につなぐ弧」と「 v につなぐ弧」の二つの弧に分ける必要がある。ところが、 u の隣接点へ向かう辺と v の隣接点へ向かう辺が円周上で交互に現れていると、どう分けても円の内側で線が交差してしまう。これは、円周上の4点を結ぶ2本の弦が、端点が交互に並ぶとき必ず交わるのと同じ現象である。この「交互に絡む」パターンを頂点と道の言葉で書き直したものが $K_{3,3}$ 型の構造であり、 u と v が3個以上の隣接点を共有して絡む場合が K_5 型の構造である。

4.10 2-連結だが 3-連結でない場合

次に、 G が 2-連結だが 3-連結でない場合を考える。このとき、ある2頂点 u, v を取り除くとグラフが非連結になる。このような集合 $\{u, v\}$ を2頂点分離と呼ぶ。

G を、 $\{u, v\}$ を共有するいくつかの小さなグラフに分解する。各部品は、 u と v を共有し、必要に応じて仮想的な辺 uv を加えて作られる。

直観：なぜ仮想辺を加えるのか

部品 G_1 だけを見ると、 u から v へは G_1 の中の道でしか行けないように見える。しかし元のグラフ G の中では、他の部品 G_2 を通って u から v へ行く道が存在する。仮想辺 uv は、この「外側を回る道の存在」を部品の中に1本の辺として記憶させたものである。こうしておけば、

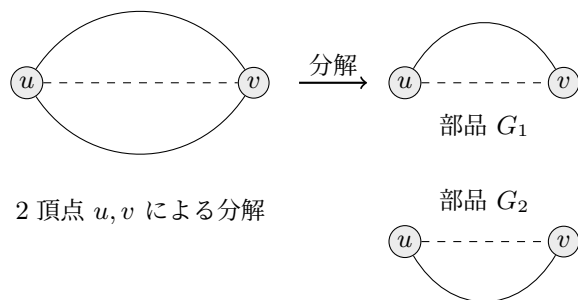


図 4.3 2 頂点分離 $\{u, v\}$ による分解。部品には仮想的な辺 uv を加える。

部品の中で見つけた禁止構造が仮想辺を使っている、その辺を実際の道 (他の部品を通る道) に置き換えて元のグラフに戻せる。逆に、貼り合わせの立場からは、仮想辺付きの部品が平面的であれば、辺 uv に沿って部品どうしを貼り合わせて全体の平面描画が作れる。

命題 4.16 (分解と復元). 2-連結だが 3-連結でない非平面的グラフ G は、より小さな部品の中に非平面的なものをもつ。その部品に現れる K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割は、元のグラフ G の中に復元できる。

証明の考え方. G を 2 頂点 u, v によって部品 $G_1, G_2, \dots$ に分解する。もしすべての部品が平面的なら、それらの平面描画を u, v に沿って貼り合わせることで、 G 全体の平面描画が得られる。したがって、 G が非平面的なら、少なくとも一つの部品、たとえば G_1 は非平面的である。

G_1 は G より小さいので、帰納法の仮定により、 G_1 は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。もしその部分分割が、分解時に加えた仮想的な辺 uv を使っていなければ、それはそのまま G の中に存在する。

もしその部分分割が仮想的な辺 uv を使っている場合には、元のグラフ G の別の部品を通る u から v への道で、その仮想辺を置き換える。すると、 G の中に K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が得られる。これが「復元」である。□

具体例: $K_{2,3}$ を 2 頂点分離で分解する

完全二部グラフ $K_{2,3}$ を、 $\{u, v\}$ と $\{a, b, c\}$ を二つの側とするグラフとして考える (頂点 5 個、辺 6 本)。 u と v を取り除くと a, b, c が孤立するので、 $\{u, v\}$ は 2 頂点分離である (一方、どの 1 頂点を除いても連結が保たれるので、 $K_{2,3}$ は 2-連結だが 3-連結ではない)。この分離で分解すると、部品は 3 個の道 $u-a-v$ 、 $u-b-v$ 、 $u-c-v$ であり、それぞれに仮想辺 uv を加えると 3 個の三角形になる。各三角形は平面的なので、辺 uv に沿って 3 枚を貼り合わせれば $K_{2,3}$ の平面描画が得られる。実際 $K_{2,3}$ は平面的である。非平面的なグラフの場合には、この貼り合わせがどこかで破綻し、その原因となる非平面的な部品の中に禁止構造が見つかる、というのが上の命題の内容である。

この議論により、3-連結の場合が分かれば、2-連結の場合も処理できる。

4.11 1-連結の場合

最後に、一般の連結グラフを考える。連結だが2-連結でないグラフは、カット頂点をもち、ブロックに分解される。

もしすべてのブロックが平面的なら、ブロックごとの平面描画をカット頂点で貼り合わせることで、グラフ全体も平面的になる。したがって、連結グラフ G が非平面的なら、あるブロック B が非平面的である。この B は2-連結グラフであるから、すでに扱った場合に帰着できる。よって、 B は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含み、したがって G もそれを含む。

これで、一般の連結グラフについてクラトフスキーの定理が示される。非連結グラフの場合は、各連結成分ごとに同じ議論を適用すればよい。

4.12 証明のまとめ

クラトフスキーの定理の証明は、次のようにまとめられる。

1. K_5 と $K_{3,3}$ は非平面的である。
2. 部分分割は平面性を変えない。
3. 平面的グラフの部分グラフは平面的である。
4. よって、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むグラフは非平面的である。
5. 逆に、非平面的であるがこれらを含まない最小反例 G を仮定する。
6. 最小性から、 G は2-連結で、次数2の頂点をもたない。
7. 3-連結の場合には、辺の縮約と復元の失敗から、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が現れる。
8. 2-連結だが3-連結でない場合は、2頂点分離で部品に分解し、部品に現れた禁止構造を元のグラフへ復元する。
9. 1-連結の場合は、ブロック分解により2-連結の場合へ帰着する。
10. したがって、最小反例は存在せず、定理が成り立つ。

分解し、小さな部品で見つけ、元のグラフへ復元する。

これが証明全体の基本思想である。

4.13 発展：高い種数の曲面への埋め込み

クラトフスキーの定理は、平面または球面へのグラフ埋め込みを、 K_5 と $K_{3,3}$ という二つの禁止構造で完全に特徴づける。では、トーラスや、さらに高い種数の曲面への埋め込みについても、同じような定理があるだろうか。

実は、任意の固定された曲面に対して、その曲面に埋め込めないグラフを特徴づける有限個の禁止構造が存在することが知られている。ただし、平面の場合と違って、そのリストは非常に大きく複雑になる。たとえば、トーラスの場合でさえ、禁止構造の数は非常に多くなる。

この事実は、クラトフスキーの定理が例外的に美しい分類であることを示している。同時に、本書後半で扱う2次元複体の S^3 への埋め込み問題でも、禁止対象や臨界的複体の分類が非常に難しいこ

とを予告している。

4.14 曲面上のグラフ埋め込み

平面グラフは、球面 S^2 に埋め込めるグラフと同じである。したがって、クラトフスキーの定理は「種数 0 の閉曲面への埋め込み」の完全な特徴づけと見ることができる。専門的には、次に考えるべき自然な問題は、トーラスや高い種数の閉曲面への埋め込みである。

定義 4.17 (曲面上のグラフ埋め込み). 有限グラフ G と閉曲面 F に対し、 $|G|$ から F への位相的埋め込みを、 G の F への**曲面埋め込み**という。補空間 $F - |G|$ の各連結成分が開円板であるとき、この埋め込みを**胞体的埋め込み**という。

復習：閉曲面とオイラー標数

第 I 巻で学んだように、向き付け可能な閉曲面は種数 g で分類され、 Σ_g は球面に g 個のハンドルを付けた曲面である ($\Sigma_0 = S^2$, Σ_1 はトーラス)。そのオイラー標数は $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ であり、セル分割の取り方によらない。巻頭の「既習事項の要点」も参照してほしい。以下ではこの事実を、埋め込まれたグラフの頂点数・辺数・面数の関係式として使う。

胞体的埋め込みでは、 G は曲面 F のセル分割の 1 スケルトンになる。頂点数、辺数、面数をそれぞれ V, E, R と書くと、 $\chi(F) = V - E + R$ である。向き付け可能閉曲面 Σ_g では $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ なので、 $2 - 2g = V - E + R$ となる。この式は、曲面上のグラフ埋め込みを調べる最初の道具である。

定義 4.18 (グラフの向き付け可能種数). 有限グラフ G が埋め込める向き付け可能閉曲面 Σ_g の種数 g の最小値を、 G の**向き付け可能種数**といい、 $\gamma(G)$ と書く。すなわち

$$\gamma(G) = \min\{g \mid G \hookrightarrow \Sigma_g\}$$

である。

この記号では、 G が平面的であることと $\gamma(G) = 0$ であることは同値である。 K_5 と $K_{3,3}$ は平面的ではないが、トーラスには埋め込めるので、 $\gamma(K_5) = \gamma(K_{3,3}) = 1$ である。

例 4.19 (トーラス上の交差の解消). 平面上で K_5 を描くと、少なくとも一つの交差が避けられない。しかしトーラスでは、平面上で交差していた辺の一方をハンドルのまわりに回すことで、交差を解消できる。この例は、非平面性が「どの曲面にも入らない」ことを意味するのではなく、「種数 0 では足りない」ことを意味することを示している。

具体例：トーラス上の K_5 でオイラーの公式を検算する

K_5 は $V = 5$, $E = 10$ である。もし K_5 が球面に胞体的に埋め込めたとすると、 $2 - 2 \cdot 0 = V - E + R$ から $R = 7$ となるはずだが、前章の評価 $E \leq 3V - 6 = 9$ が $E = 10$ で破れるので、これは不可能であった。一方、トーラス Σ_1 への胞体的埋め込みでは $\chi(\Sigma_1) = 0$ なので、 $0 = V - E + R = 5 - 10 + R$ から $R = 5$ が得られる。すなわち、 K_5 をトーラスに胞体的に埋め込むと、面はちょうど 5 個になる。このように、埋め込み先の種数が上がると許される辺

数の上限が緩み、平面では収まらなかったグラフが収まるようになる。

4.15 閉曲面上の禁止マイナーと有限性

クラトフスキーの定理は、 S^2 への埋め込みに対して、禁止構造が K_5 と $K_{3,3}$ の 2 つだけで済むことを述べる。より一般に、固定された閉曲面 F に対して、 F に埋め込めないグラフをマイナーで特徴づける有限個の禁止グラフが存在する。これはグラフマイナー理論の深い結果であり、平面の場合のクラトフスキーの定理を大きく拡張する。

定理 4.20 (固定曲面に対する有限禁止マイナー定理の形). 閉曲面 F を固定する。このとき、有限個のグラフ $H_1, \dots, H_N$ が存在し、有限グラフ G が F に埋め込めないことは、 G がある H_i をマイナーとして含むことと同値である。

注意 4.21. この定理は本書では証明しない。重要なのは、平面の場合には禁止構造が 2 個で具体的に分かるのに対し、トーラス以上ではリストが急激に複雑になるという点である。この複雑さは、2 次元複体の S^3 への埋め込み問題において、臨界的複体の分類が難しくなることと対応している。

4.16 回転系と曲面埋め込みの組合せデータ

グラフを曲面に埋め込むには、頂点のまわりで 接続する辺がどの巡回順序で現れるかを指定する必要がある。この巡回順序の組を**回転系**と呼ぶ。回転系は、グラフの曲面埋め込みを組合せ的に記録する道具である。

定義 4.22 (回転系). 有限グラフ G の各頂点 v に対し、 v に接続する半辺の集合に巡回順序を与えたものを、 G の**回転系**という。

直観：回転系は頂点のまわりの「辺の並び」である

「半辺」とは、1 本の辺を両端点から見て二つに分けたときの片方のことであり、頂点 v の半辺は「 v から出ていく辺の根元」と思えばよい。グラフが向き付け可能な曲面に埋め込まれていれば、各頂点のまわりで辺の根元は (たとえば反時計回りに) 一列に並ぶ。この並びを頂点ごとに記録したものが回転系である。逆に回転系を先に与えると、面の境界のたどり方が決まり、埋め込み先の曲面が (面数 R と $2 - 2g = V - E + R$ を通して) 復元される。つまり回転系は、「曲面への埋め込み」という位相的な情報を有限の組合せデータに置き換える辞書の役割を果たす。

向き付け可能曲面への胞体的埋め込みでは、回転系から面境界の巡回列を復元できる。その面数 R を用いれば、 $2 - 2g = V - E + R$ によって埋め込み先の種数を計算できる。したがって、グラフの種数問題は、すべての回転系の中で最小の種数を与えるものを探す問題としても定式化できる。

第11章への接続

第11章では、有限グラフ G から直積型多重分岐曲面 $G \times S^1$ を作る。そのとき、 G の曲面埋め込みの種数と、 $G \times S^1$ の多重分岐曲面としての種数が対応する。したがって、本節の曲面上のグラフ埋め込みは、後半で扱う多重分岐曲面の種数論の基礎になる。

4.17 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. クラトフスキーの定理の二つの方向を区別できる。
2. 部分グラフと部分分割が平面性に与える影響を説明できる。
3. カット頂点、ブロック、2-連結、3-連結を定義できる。
4. 最小反例法の考え方を説明できる。
5. 最小反例が2-連結であり、次数2の頂点をもたない理由を説明できる。
6. 3-連結グラフの場合に、辺の縮約と復元の失敗から禁止構造が現れることを理解する。
7. 2-連結だが3-連結でない場合に、分解と復元を用いることを説明できる。
8. 証明全体を「分解、小さな部品で証明、元のグラフへ復元」という流れで説明できる。

4.18 練習問題

練習問題 4.1. 2-連結グラフと3-連結グラフの定義を述べよ。

練習問題 4.2. クラトフスキーの定理の証明で、なぜ3-連結グラフの場合が証明の核心になるのか説明せよ。

練習問題 4.3. 平面的グラフの部分グラフは平面的であることを説明せよ。また、この事実から、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むグラフが非平面的であることを導け。

練習問題 4.4. クラトフスキーの定理に対する最小反例 G が2-連結でなければならない理由を説明せよ。

練習問題 4.5. 最小反例 G が次数2の頂点をもたない理由を、隣接頂点が結ばれている場合と結ばれていない場合に分けて説明せよ。

練習問題 4.6. 2-連結だが3-連結でない非平面的グラフ G を、2頂点 $\{u, v\}$ によって部品 $G_1, G_2, \dots$ に分解する。このとき、なぜ少なくとも一つの部品が非平面的でなければならないか説明せよ。

練習問題 4.7. 分解された部品 G_1 の中で見つかった K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が、仮想的な辺 uv を使っている場合、それを元のグラフ G の中にどのように復元するか説明せよ。

練習問題 4.8. 3-連結な非平面的グラフの場合の証明の考え方を、「最小性」と「辺の縮約」という語を用いて説明せよ。

練習問題 4.9. クラトフスキーの定理の証明全体を、「最小反例」「分解」「復元」という三つの語を用いて要約せよ。

4.19 次章への橋渡し

本章では、クラトフスキーの定理の証明の流れを学んだ。重要なのは、非平面性を単に図形的な直感として扱うのではなく、最小反例、連結度、分解、復元という組合せ的な方法で制御する点である。

次章では、グラフに限らず、一般の単体的複体を高次元ユークリッド空間に埋め込む問題へ進む。特に、一般の位置の考え方をを用いて、任意の n 次元有限単体的複体が $\mathbb{R}^{2n+1}$ に埋め込めることを学ぶ。さらに、境界的な次元 $\mathbb{R}^{2n}$ で現れる交差点と、ファン・カンペン障害の考え方へ進む。

第 5 章

高次元ユークリッド空間への埋め込み

5.1 本章の目標

前章までに、グラフの平面埋め込みを学んだ。グラフは 1 次元単体的複体であり、平面性とは $|G| \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ という埋め込みが存在するかどうかを問う問題であった。クラトフスキーの定理は、この問いに対して K_5 , $K_{3,3}$ という 2 つの禁止構造を与えた。

本章では、問いを一般の単体的複体へ拡張する。すなわち、 k 次元単体的複体 K に対して、 $|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ という埋め込みが存在するかどうかを考える。中心となる問いは次である。

k 次元の単体的複体は、何次元のユークリッド空間に埋め込めるのだろうか。

直感的には、行き先の空間の次元が十分高ければ、交差しそうな部分を少し動かして避けることができる。たとえば、グラフは平面では交差してしまうことがあるが、3 次元空間では辺を上下にずらして交差を避けられる。一方、2 次元曲面を 3 次元空間に置くと、クラインの壺のように自己交差を避けられない場合がある。このように、埋め込み可能性は、対象の次元 k と行き先の次元 m の関係に大きく依存する。

第 3・4 章からの橋渡し

平面グラフの問題は、「1 次元複体であるグラフ G を、2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ に埋め込めるか」という問題であった。本章では、対象の次元を 1 から k へ、周囲空間の次元を 2 から m へ一般化する。つまり、

$$\text{グラフ } G \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow k \text{ 次元複体 } K \hookrightarrow \mathbb{R}^m$$

という視点で、前章までの平面性問題を高次元埋め込み問題へ拡張する。

学習の指針

本章の前提は、第 I 巻で学んだ単体的複体の言葉と、線形代数 (線形独立・行列式) である (巻頭の既習事項の要点も参照)。初出の概念は、一般の位置、削除積、コチェイン (コホモロジー)、ファン・カンペン障害の 4 つである。前半 (アフィン幾何から線形埋め込み定理まで) は、行列式の計算で手を動かして確かめられる部分なので、具体例を自分で計算しながら読むとよい。後半 (削除積以降) は厳密な証明よりも「交点数のパリティが埋め込みを妨げる」という考え方をつかむことを目標にすればよい。

本章の目標は次の通りである。

- アフィン結合、アフィン包、アフィン独立を復習する。
- 一般の位置という考え方を理解する。
- 任意の有限 k 次元単体的複体が $\mathbb{R}^{2k+1}$ に線形に埋め込めることを理解する。
- 次元条件 $m > 2k$ が、互いに素な単体の交差を避けるために重要であることを理解する。
- 臨界次元 $m = 2k$ では交差が本質的に残り得ることを理解する。
- ファン・カンペン障害とファン・カンペン–フローレスの定理を、直感的に理解する。

5.2 アフィン結合とアフィン包

高次元ユークリッド空間への線形埋め込みを扱うには、まずアフィン幾何の言葉を確認しておく必要がある。ここでいうアフィン幾何とは、原点を特別視せず、点の配置だけを見る幾何である。

定義 5.1 (アフィン結合). 点 $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}^m$ と実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ に対し、 $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r$ がアフィン結合であるとは、係数が $\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$ を満たすことをいう。

係数の和が1であることが重要である。たとえば、2点 P, Q のアフィン結合 $(1-t)P + tQ$ ($t \in \mathbb{R}$) 全体は、 P と Q を通る直線である。ここで $0 \leq t \leq 1$ に制限すれば、 P と Q を結ぶ線分になる。

具体例: アフィン結合を計算する

$\mathbb{R}^2$ の3点 $P = (0, 0)$ 、 $Q = (2, 0)$ 、 $R = (0, 2)$ で確かめてみよう。係数 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ のアフィン結合は $\frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = (1, 0)$ で、 P と Q の中点である。係数 $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ なら $\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ で、三角形 PQR の重心である。係数は負でもよい。たとえば $-1 \cdot P + 2 \cdot Q = (4, 0)$ も係数の和が1なのでアフィン結合であり、直線 PQ 上の (Q の外側の) 点になる。一方、係数の和が1でない $0 \cdot P + 0 \cdot Q = (0, 0)$ のような線形結合は、原点の取り方に依存するので、アフィン幾何では使わない。

定義 5.2 (アフィン包). 点集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ に対し、 S の点のすべてのアフィン結合からなる集合を $\text{Aff}(S)$ と書き、 S のアフィン包という。これは、 S を含む最小のアフィン部分空間である。

例 5.3. 2点 P, Q が異なるとき、 $\text{Aff}\{P, Q\}$ は、 P と Q を通る直線である。3点 P, Q, R が同一直線上になければ、 $\text{Aff}\{P, Q, R\}$ は、それら3点を通る平面である。

5.3 アフィン独立と一般の位置

線形埋め込み定理の証明では、頂点の像を「一般の位置」に選ぶ。そのためには、アフィン独立を理解しておく必要がある。

定義 5.4 (アフィン独立). 点 $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{R}^m$ がアフィン独立であるとは、ベクトル $P_1 - P_0, P_2 - P_0, \dots, P_r - P_0$ が線形独立であることをいう。

同値に、 $P_0, \dots, P_r$ がアフィン独立であるとは、これらの点が r 次元単体を張ることである。

例 5.5. 2 点がアフィン独立であるとは、2 点が異なることである。3 点がアフィン独立であるとは、3 点が同一直線上にないことである。4 点がアフィン独立であるとは、4 点が同一平面上にないことである。

具体例: $\mathbb{R}^3$ の 4 点で確かめる

$P_0 = (0, 0, 0)$ 、 $P_1 = (1, 0, 0)$ 、 $P_2 = (0, 1, 0)$ 、 $P_3 = (1, 1, 1)$ とする。差のベクトルを行に並べた行列式は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

なので、3 つのベクトルは線形独立であり、4 点はアフィン独立である。すなわち、この 4 点は四面体 (3 次元単体) を張る。一方、 P_3 を $(1, 1, 0)$ に取り替えると、行列式は 0 になる。実際、4 点はすべて平面 $z = 0$ の上にあり、アフィン独立ではない。

定義 5.6 (一般の位置にある点集合). 有限個の点集合 $P \subset \mathbb{R}^m$ が**一般の位置**にあるとは、 P の任意の $m + 1$ 個以下の点のアフィン独立であることをいう。

たとえば、 $\mathbb{R}^2$ では、3 点以下の任意の点のアフィン独立であることを求めるので、これは「どの 3 点も同一直線上にない」という条件である。 $\mathbb{R}^3$ では、4 点以下の任意の点のアフィン独立であることを求めるので、どの 4 点も同一平面上にないことを含む。

注意 5.7. 一般の位置とは、「偶然の一致が起きていない配置」と考えればよい。高次元空間では、点をほんの少し動かすことで、一般の位置にすることができる。この「少し動かす」操作を摂動という。

具体例: $\mathbb{R}^3$ 内の一般の位置とモーメント曲線

一般の位置にある点は、明示的に作ることができる。曲線 $\gamma(t) = (t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3$ をモーメント曲線という。相異なるパラメータ $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ に対する 4 点 $\gamma(t_i)$ がアフィン独立であることは、行列式

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (t_j - t_i) \neq 0$$

(ヴァンデルモンドの行列式) から分かる。よって、たとえば $t = 0, 1, 2, 3, 4$ に対応する 5 点は、どの 4 点も同一平面上になく、一般の位置にある。同様に $\mathbb{R}^m$ では $\gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^m)$ 上の相異なる点をいくつか取っても一般の位置になる。逆の例として、立方体の頂点集合 $\{0, 1\}^3$ は、上面の 4 頂点が同一平面上にあるので、一般の位置にはない。

5.4 線形埋め込み定理

K を有限 k 次元単体的複体とする。 K の頂点をユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の点に写し、各単体をその頂点の像の凸包へ線形に写すと、 K から $\mathbb{R}^m$ への PL 写像が得られる。問題は、この写像が自己交差をもたないように頂点を配置できるかどうかである。

定理 5.8 (線形埋め込み定理). 任意の有限 k 次元単体的複体 K は、 $m \geq 2k + 1$ ならば、 $\mathbb{R}^m$ に線形に埋め込むことができる。

証明. K の頂点集合を $V(K) = \{v_1, \dots, v_N\}$ とする。これらの頂点の像 $f(v_1), \dots, f(v_N) \in \mathbb{R}^m$ を一般の位置に選ぶ。そして、各単体 $\sigma = [v_{i_0}, \dots, v_{i_p}]$ の点

$$x = \lambda_0 v_{i_0} + \dots + \lambda_p v_{i_p}, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \sum_j \lambda_j = 1$$

を $f(x) = \lambda_0 f(v_{i_0}) + \dots + \lambda_p f(v_{i_p})$ で写す。これにより $|K|$ から $\mathbb{R}^m$ への PL 写像 f が定まる。

あとは、 f が単射であることを示せばよい。単体の内部でつぶれが起こらないことは、一般の位置により、各単体の頂点の像がアフィン独立であることから従う。また、頂点を共有する 2 つの単体 σ, τ については、 $\sigma \cup \tau$ に含まれる頂点の総数は高々 $2k + 2 \leq m + 1$ なので、それらの像はアフィン独立である。したがって $f(\sigma)$ と $f(\tau)$ は、それぞれ頂点像全体が張る単体の面であり、その交わりは共有面 $\sigma \cap \tau$ の像にちょうど一致する。よって、ここでも新しい交わりは生じない。問題は、互いに素な 2 つの単体 $\sigma \cap \tau = \emptyset$ の像が交わるかどうかである。

$\dim \sigma = p, \dim \tau = q$ とする。 K は k 次元なので $p \leq k, q \leq k$ であり、したがって $p + q \leq 2k$ 。もし $f(\sigma) \cap f(\tau) \neq \emptyset$ なら、ある点が両方の像に属する。これは、 σ の頂点の像と τ の頂点の像を合わせた $(p + 1) + (q + 1) = p + q + 2$ 個の点の間に、非自明なアフィン従属関係があることを意味する。

しかし、 $p + q + 2 \leq 2k + 2 \leq m + 1$ である。頂点の像は一般の位置にあるので、 $m + 1$ 個以下の点はアフィン独立である。よって、このようなアフィン従属関係は存在しない。したがって $f(\sigma) \cap f(\tau) = \emptyset$ である。

互いに素な単体の像が交わらないので、 f は単射である。 $|K|$ はコンパクトで $\mathbb{R}^m$ はハウスドルフ空間であるから、連続単射 $f: |K| \rightarrow \mathbb{R}^m$ は像への同相写像を与える。よって f は埋め込みである。 $\square$

直観: なぜ $2k + 1$ 次元で十分なのか

証明の核心は、頂点の個数の数え上げである。最悪の場合は、互いに素な 2 つの k 単体 σ, τ で、頂点は合わせて $(k + 1) + (k + 1) = 2k + 2$ 個ある。 $m \geq 2k + 1$ なら $2k + 2 \leq m + 1$ なので、一般の位置の仮定により、この $2k + 2$ 個の頂点像はアフィン独立、すなわち 1 つの $(2k + 1)$ 次元以下の単体を張る。1 つの単体の中では、頂点を共有しない 2 つの面は決して交わらない (たとえば四面体の向かい合う 2 辺を思い浮かべよ)。これが $f(\sigma) \cap f(\tau) = \emptyset$ の理由である。つまり $m = 2k + 1$ とは、「問題になり得る頂点の組をすべて 1 つの単体の中に収められる最小の次元」である。

例 5.9 (グラフの場合). グラフは $k = 1$ 次元複体である。定理より、任意の有限グラフは $\mathbb{R}^{2 \cdot 1 + 1} = \mathbb{R}^3$ に線形に埋め込める。平面 $\mathbb{R}^2$ では K_5 や $K_{3,3}$ が障害になるが、 $\mathbb{R}^3$ では一般の位置に置くことで辺どうしの交差を避けられる。

具体例: K_5 を $\mathbb{R}^3$ に埋め込む

証明の方法は具体的な座標で実行できる。 K_5 の 5 つの頂点をモーメント曲線上の点 $v_i \mapsto (i, i^2, i^3)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) に置き、各辺を線分で結ぶ。ヴァンデルモンドの行列式により、この 5 点のうちどの 4 点もアフィン独立である。互いに素な 2 辺は合わせて 4 個の頂点をもつ

ので、その像は四面体の向かい合う2辺となり、交わらない。頂点を共有する2辺は、その共有頂点でのみ交わる(3点はアフィン独立なので、2線分が重なることはない)。よって、この直線的な描き方だけで K_5 の $\mathbb{R}^3$ への埋め込みが得られる。

例 5.10 (2次元複体の場合). 2次元複体では $k = 2$ である。したがって、任意の有限2次元複体は $\mathbb{R}^{2 \cdot 2 + 1} = \mathbb{R}^5$ に線形に埋め込める。一方、 $\mathbb{R}^4$ や $\mathbb{R}^3$ に埋め込めるかどうかは、別の問題である。

5.5 一般の位置の定理

線形埋め込み定理は、頂点を一般の位置に置くことで証明された。より一般には、任意の連続写像を少し動かして、一般の位置にある PL 写像に近似することができる。

定理 5.11 (一般の位置の定理). K を有限 k 次元単体的複体とし、 $m > 2k$ とする。このとき、任意の連続写像 $f: |K| \rightarrow \mathbb{R}^m$ は、いくらでも近く、一般の位置にある PL 埋め込み $g: |K| \rightarrow \mathbb{R}^m$ で近似できる。

証明の考え方. まず、単体近似定理や PL 近似を用いて、連続写像 f を PL 写像で近似する。次に、 K の各頂点の像を、元の位置から非常に小さく動かして、一般の位置に置く。これを頂点の摂動という。

頂点の像が一般の位置にあれば、各単体上ではアフィン結合により写像が定まる。このとき、互いに素な単体 σ, τ の像の交わりを考えると、線形埋め込み定理の証明と同じ次元計算により、 $g(\sigma) \cap g(\tau) = \emptyset$ が従う。ここで使っているのが $m > 2k$ という条件である。

このようにして、 f に任意に近い埋め込み g が得られる。 □

注意 5.12. $|K|$ がコンパクトで $\mathbb{R}^m$ がハウスドルフ空間であるため、構成した g が連続単射であれば、自動的に像への同相写像となる。したがって、この文脈では「単射性を示すこと」が埋め込み性の中心になる。

5.6 次元の数え上げ

一般の位置の考え方は、次の単純な次元計算で理解できる。

原理 5.13 (次元の数え上げ). $\mathbb{R}^m$ の中に、 p 次元の図形と q 次元の図形を一般の位置に置くと、その交わりの期待される次元は $p + q - m$ である。特に、 $p + q < m$ ならば、一般には交わらない。

例 5.14. $\mathbb{R}^3$ 内の2本の直線を考える。どちらも1次元なので、期待される交わりの次元は $1 + 1 - 3 = -1$ である。負の次元の交わりは存在しないので、一般には交わらない。このため、3次元空間では2本の直線はねじれの位置をとることができる。

例 5.15. $\mathbb{R}^2$ 内の2本の曲線を考える。どちらも1次元なので、期待される交わりの次元は $1 + 1 - 2 = 0$ である。したがって、一般には点で交わる。これが、平面においてグラフの辺どうしの交差が本質的な問題になる理由である。

k 次元複体の中で最も問題になるのは、互いに素な k 単体どうしである。これらを $\mathbb{R}^m$ に一般の位置

で置くと、期待される交わりの次元は $k+k-m = 2k-m$ である。 $m = 2k+1$ なら $2k-(2k+1) = -1$ であり、交差は一般には起こらない。一方、 $m = 2k$ なら $2k-2k = 0$ であり、交差点が一般的に現れ得る。

具体例: $\mathbb{R}^4$ 内で点で交わる 2 枚の平面

$k = 2$, $m = 4$ の場合の局所模型を座標で見よう。 $\mathbb{R}^4$ の座標を (x, y, z, w) とし、2 枚の平面 $A = \{(x, y, 0, 0)\}$, $B = \{(0, 0, z, w)\}$ を取る。 $A \cap B$ の点は $x = y = 0$ かつ $z = w = 0$ を満たすので、交わりは原点ただ 1 点である。期待される次元 $2+2-4 = 0$ と一致している。しかも、この交わりは $\mathbb{R}^3$ 内の 2 直線の交差とは違い、平面を少し平行移動しても消えない。実際、 A を (x, y, a, b) (a, b は定数) へ動かしても、 B との交点 $(0, 0, a, b)$ が 1 つ残る。これが、臨界次元で 2 単体どうしの交差点が「一般に現れる」ことの意味である。

5.7 臨界次元 $m = 2k$

$m \geq 2k+1$ では、任意の有限 k 次元複体が $\mathbb{R}^m$ に埋め込める。では、次元を 1 つ下げた $m = 2k$ ではどうなるだろうか。この次元は**臨界次元**、または**ダブルディメンション**と呼ばれることがある。

対象	臨界次元	典型的な問題
グラフ ($k = 1$)	$\mathbb{R}^2$	平面性、 K_5 、 $K_{3,3}$
2 次元複体 ($k = 2$)	$\mathbb{R}^4$	ファン・カンペン障害
k 次元複体	$\mathbb{R}^{2k}$	交差点の消去問題

臨界次元では、互いに素な k 単体の像が点で交わることが一般に起こる。したがって、単に「少し動かす」だけでは、すべての交差を消せるとは限らない。交差点の総体に、どうしても消せない代数的な情報が含まれることがある。これがファン・カンペン障害の出発点である。

例 5.16 (クラインの壺). クラインの壺は 2 次元閉曲面である。3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ では、よく見る図は自己交差をもつはめ込みであり、埋め込みではない。一方、4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ ではクラインの壺は埋め込める。ただし、一般の位置の定理が任意の 2 次元複体の埋め込みを保証するのは $m \geq 2 \cdot 2 + 1 = 5$ である。したがって、 $\mathbb{R}^4$ への埋め込み可能性は、一般定理だけでは従わない、より繊細な事実である。

補足: はめ込みと埋め込みの違い

はめ込みとは、各点の十分小さい近傍に制限すれば埋め込みになっている写像のことである。局所的には自己交差がないが、離れた部分どうしが大域的に交わることは許される。クラインの壺の $\mathbb{R}^3$ 内のよく見る図は、首の部分で曲面が自分自身を横切っており、はめ込みではあるが埋め込みではない。埋め込みは、大域的にも単射であることを要求する。本章の主題である「局所ではなく大域の障害」は、まさにこの差を測っている。

5.8 削除積と差の写像

埋め込み性を調べるには、異なる2点が同じ点に写るかどうかを調べればよい。このために、削除積を考える。

定義 5.17 (削除積). 位相空間 X に対し、 $X^* = (X \times X) - \Delta$ を X の削除積という。ここで $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ は対角線集合である。

具体例: 区間の削除積

$X = [0, 1]$ で削除積を絵に描いてみよう。直積 $X \times X$ は単位正方形であり、対角線集合 Δ は左下から右上への線分 $\{(x, x)\}$ である。したがって削除積 $X^* = (X \times X) - \Delta$ は、正方形から対角線を取り除いた図形で、 $\{(x, y) \mid x > y\}$ と $\{(x, y) \mid x < y\}$ という2つの三角形(の内部と一部の辺)に分かれる。 X 自身は連結だが、 X^* は連結でないことに注意しよう。2つの成分は「組 (x, y) のどちらが大きいか」という順序の情報に対応しており、削除積が元の空間には無い情報をもつことが分かる。

削除積 X^* の点は、 X の異なる2点の組 (x, y) である。写像 $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ が埋め込みであることは、 $x \neq y$ なら $f(x) \neq f(y)$ であることに対応する。したがって、差の写像 $g : X^* \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g(x, y) = f(x) - f(y)$ が原点0を取らないことが重要になる。

もし $g(x, y) = 0$ なら $f(x) = f(y)$ であり、自己交差が起きている。逆に、 g が原点を避ければ、 f は単射である。

$m = 2k + 1$ の場合、削除積の次元は高々 $2k$ であり、行き先の次元は $2k + 1$ である。したがって、次元の余裕により、 g を少し動かして原点を避けることができる。一方、 $m = 2k$ の場合には、 $2k$ 次元の対象が $2k$ 次元空間の原点を避ける必要があり、代数的な障害が現れ得る。

直観: 削除積の次元が高々 $2k$ である理由

K が k 次元複体のとき、直積 $|K| \times |K|$ は、 p 単体と q 単体の直積 $\sigma \times \tau$ ($p + q \leq 2k$ 次元)を貼り合わせたものなので、次元は高々 $2k$ である。削除積 K^* はその部分集合だから、やはり高々 $2k$ 次元である。つまり、埋め込み問題は「高々 $2k$ 次元の対象 K^* 上の差の写像 g が、 $\mathbb{R}^m$ の原点という1点を避けられるか」という問題に言い換えられる。1点は余次元 m の対象なので、次元の数え上げの原理から、 $2k < m$ なら一般の位置で避けられ、 $2k = m$ ではちょうど点として衝突が起こり得る。これが前節までの次元計算と同じ結論を与えることを確かめてほしい。

5.9 ファン・カンペン障害の考え方

ファン・カンペン障害は、臨界次元 $|K| \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ において、交差点をすべて消せるかどうかを測る代数的な障害である。ここでは厳密な定義には踏み込まず、考え方を述べる。

K を k 次元複体とし、一般の位置にある写像 $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ を考える。互いに素な k 単体 σ, τ の像は、一般には有限個の点で交わる。これらの交差点を、符号付き、あるいは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数で数える。

この交点数は、写像 f の描き方を変えると変化する。しかし、局所的な変形で変わる部分をコバウンダリーとして取り除くと、複体 K 自身に付随するコホモロジー類が得られる。このコホモロジー類がファン・カンペン障害である。

ファン・カンペン障害の流れ

1. K を $\mathbb{R}^{2k}$ に一般の位置で写す。
2. 互いに素な k 単体の像の交点数を数える。
3. 描き方の変更で消える交差をコバウンダリーとして扱う。
4. 残ったコホモロジー類が 0 でなければ、交差は本質的である。
5. したがって、 K は $\mathbb{R}^{2k}$ に埋め込めない。

注意 5.18. グラフの場合 $k = 1$ では、この考え方は平面上の辺どうしの交点数を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で数えることに対応する。 K_5 や $K_{3,3}$ の非平面性は、ファン・カンペン障害の最初の例と見ることができる。

具体例: K_5 の交点数のパリティ

$k = 1$ の場合を実際に数えてみよう。 K_5 の 5 頂点を凸五角形の頂点に置き、10 本の辺をすべて線分で描く。互いに素な (端点を共有しない) 辺の組は、各辺に対して残り 3 頂点の張る 3 辺が相手になるので、全部で $10 \times 3/2 = 15$ 組ある。このうち実際に交差するのは、5 頂点から 4 頂点を選んで得られる凸四角形の 2 本の対角線の組で、ちょうど $\binom{5}{4} = 5$ 組である。よって交点数の合計は $5 \equiv 1 \pmod{2}$ となる。描き方を変えて交差を 1 回だけにしても、合計は $1 \equiv 1 \pmod{2}$ で、パリティは変わらない。この「どう描いても残る 1」が、 K_5 に対するファン・カンペン障害の姿である。

5.10 削除積の商とガウス写像

ファン・カンペン障害を本格的に扱うには、削除積に入れ替え対称性を入れて考える必要がある。削除積 $K^* = (|K| \times |K|) - \Delta$ には、 (x, y) と (y, x) を入れ替える自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用がある。この商を $\overline{K} = K^*/\mathbb{Z}_2$ と書く。点 $\{x, y\} \in \overline{K}$ は、 K の異なる 2 点の unordered pair を表す。

埋め込み $f: |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ が与えられると、差の写像を正規化して

$$\tilde{g}_f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{\|f(x) - f(y)\|}$$

が得られる。これは K^* から S^{m-1} への写像であり、入れ替え作用に関して同変 ($\mathbb{Z}_2$ -equivariant) である。すなわち、 (x, y) を (y, x) に替えると、像は反対点へ移る (K^* 上の入れ替え作用と S^{m-1} 上の対蹠写像が対応する、という意味である)。このような写像が存在することが、埋め込み可能性の必要条件である。

定義 5.19 (ガウス写像). 埋め込み $f: |K| \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ に対し、上の正規化差写像 $\tilde{g}_f: K^* \rightarrow S^{m-1}$ を、 f に付随するガウス写像という。

具体例: 区間のガウス写像

最も簡単な場合として、 $X = [0, 1]$ の $\mathbb{R}^1$ への埋め込み $f(x) = x$ を考える ($m = 1$)。このとき $S^{m-1} = S^0 = \{+1, -1\}$ であり、ガウス写像は

$$\tilde{g}_f(x, y) = \frac{x - y}{|x - y|} = \begin{cases} +1 & (x > y) \\ -1 & (x < y) \end{cases}$$

となる。つまり、削除積 (対角線を除いた正方形) の2つの三角形成分が、それぞれ S^0 の1点ずつに写る。 (x, y) と (y, x) を入れ替えると値の符号が反転すること、すなわち像が S^0 の反対点に移ることも、この式から直接確かめられる。これが定義中の「入れ替え作用に関して同変」という条件の最も簡単な姿である。

臨界次元 $m = 2k$ では、互いに素な k 単体の積 $\sigma \times \tau$ が $2k$ 次元になり、差の写像が原点を避けられるかどうかは交点数の問題になる。このとき、ガウス写像の存在を妨げるコホモロジー類が、ファン・カンペン障害である。

5.11 交点コチェインとしての障害

K を k 次元有限単体的複体とし、 $f: |K| \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$ を一般の位置にある PL 写像とする。互いに素な k 単体 σ, τ に対して、 $f(\sigma)$ と $f(\tau)$ は有限個の点で交わる。係数を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ にすれば、向きを気にせずにその個数の偶奇を数えられる。

定義 5.20 (交点コチェイン). 互いに素な k 単体の unordered pair $\{\sigma, \tau\}$ に対し、

$$\varphi_f(\{\sigma, \tau\}) = \#(f(\sigma) \cap f(\tau)) \pmod{2}$$

で定める $2k$ 次元コチェインを、 f の**交点コチェイン**という。

補足: コチェインとコホモロジー類

第I巻では、鎖群 C_n と境界作用素 ∂ からホモロジーを定義した (巻頭の既習事項の要点も参照)。**コチェイン**とは、その双対で、鎖に係数 (ここでは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) を対応させる関数のことである。コチェイン φ に対し、コバウンダリーを $(\delta\varphi)(c) = \varphi(\partial c)$ で定めると、 $\partial \circ \partial = 0$ から $\delta \circ \delta = 0$ が従い、ホモロジーと同様に「コバウンダリーの差を無視した同値類」=コホモロジー類が定義できる。本節の φ_f は、正確には削除積に付随する複体の上のコチェインであるが、当面は「写像 f の描き方の変更で生じる差がコバウンダリーであり、それを無視した類 $[\varphi_f]$ が K 自身の不変量になる」と読めば十分である。

写像 f を一般の位置を保ちながら変形すると、交点コチェイン自体は変わり得る。しかし、その変化はコバウンダリーとして記述される。したがって、交点コチェインのコホモロジー類 $[\varphi_f]$ は K に付随する不変量になる。これが、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数のファン・カンペン障害の基本形である。

定理 5.21 (ファン・カンペン障害の必要条件). k 次元有限単体的複体 K が $\mathbb{R}^{2k}$ に PL 埋め込みをもつならば、ファン・カンペン障害は 0 である。特に、ある一般位置写像に対して得られる障害類が非零なら、 K は $\mathbb{R}^{2k}$ に埋め込めない。

証明の考え方. K が埋め込めるなら、互いに素な k 単体の像は交わらないようにできる。したがって交点コチェインは 0 になる。一方、一般位置写像を変えても交点コチェインのコホモロジー類は変わらない。よって、ある写像で非零の障害類が得られれば、埋め込みは存在しない。□

注意 5.22 (完全障害ではない場合). 高次元では、ファン・カンペン障害が消えることが埋め込み可能性と強く結びつく場合がある。しかし低次元、とくに 2 次元複体の $\mathbb{R}^4$ への埋め込み問題では、障害が 0 でも埋め込みが存在するとは限らない。本書で扱う S^3 への埋め込み問題では、さらに補空間の 3 次元的情報が必要になる。

5.12 ファン・カンペン – フローレスの定理

高次元の代表的な非埋め込み定理として、ファン・カンペン – フローレスの定理がある。

定理 5.23 (ファン・カンペン – フローレスの定理の例). 7つの頂点をもつ 6 次元単体 Δ^6 の 2 スケルトン $\Delta_6^{(2)}$ は、 $\mathbb{R}^4$ に埋め込めない。

ここで $\Delta_6^{(2)}$ とは、7つの頂点と、それらが張るすべての辺および三角形からなる 2 次元複体である。これは、 $k = 2$ の臨界次元 $\mathbb{R}^{2k} = \mathbb{R}^4$ における基本的な障害例である。

具体例: $\Delta_6^{(2)}$ の大きさを数える

$\Delta_6^{(2)}$ がどれくらいの複体か、実際に数えてみよう。頂点は 7 個、辺は 7 頂点から 2 つ選ぶ $\binom{7}{2} = 21$ 本、2 単体 (三角形) は $\binom{7}{3} = 35$ 枚である。互いに素な三角形の組は、7 頂点のうち 6 頂点を選んで 3 個ずつの 2 組に分ければよいので、 $\binom{7}{3} \times \binom{4}{3} \div 2 = 35 \times 4 \div 2 = 70$ 組ある。証明に現れる和 $I(f)$ は、この 70 組にわたる交点数の合計である。 $k = 1$ の $K_5 = \Delta_4^{(1)}$ で 15 組の辺の対を数えたことの、ちょうど 1 次元上の類似になっている。

証明の考え方. 背理法で、埋め込み $f: \Delta_6^{(2)} \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ が存在すると仮定する。埋め込みならば、互いに頂点を共有しない 2 つの 2 単体 $\sigma, \tau \subset \Delta_6^{(2)}$ について、像 $f(\sigma)$ と $f(\tau)$ は交わらない。

ここで重要なのは、矛盾は一組の 2 単体だけから出るのではない、という点である。正確には、 $\Delta_6^{(2)}$ の中の互いに素な 2 単体の組すべてにわたって、交点数を合計する。一般の位置にある写像 $f: \Delta_6^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^4$ に対し、

$$I(f) = \sum_{\{\sigma, \tau\}} \#(f(\sigma) \cap f(\tau)) \pmod{2}$$

を考える。ここで和は、互いに頂点を共有しない 2 単体の unordered pair 全体を走る。

この $I(f)$ は、写像を一般の位置を保って変形しても変わらない。交点は生成・消滅することがあるが、そのときは通常 2 個ずつ生じるため、mod 2 の合計は保たれる。一方、標準的な配置でこの量を計算すると $I(f) = 1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる。これは、7 頂点から作られる互いに素な三角形の組全体に現れるパリティに由来する。

ところが、もし f が埋め込みであれば、互いに素な 2 単体の像はすべて交わらないので $I(f) = 0$ でなければならない。これは $I(f) = 1$ に矛盾する。したがって、 $\Delta_6^{(2)}$ は $\mathbb{R}^4$ に埋め込めない。 $\square$

注意 5.24 (証明スケッチの正確な読み方). 上の議論は、ファン・カンペン障害の最も基本的な形を述べたものである。一組の 2 単体 σ, τ だけを取り出して次数を計算しても、一般には矛盾は得られない。必要なのは、互いに素な 2 単体の組すべてにわたる交点数の合計、またはそれと同値な削除積上の障害類である。本書では細部の証明を省き、以後に用いる考え方、すなわち「臨界次元では交点数のパリティが埋め込みを妨げる」という点を押さえる。詳しい証明は、ファン・カンペン障害やボルス・ウラム型定理を扱う文献、例えば [9] を参照されたい。

注意 5.25. 同じ考えの $k = 1$ の場合は、5 頂点完全グラフ $\Delta_4^{(1)} = K_5$ が $\mathbb{R}^2$ に埋め込めないことに対応する。この意味で、ファン・カンペン–フローレスの定理は、 K_5 の非平面性の高次元版である。

5.13 本章のまとめ

本章で見た内容を、次の表にまとめる。

次元条件	埋め込み可能性	キーワード
$m \geq 2k + 1$	常に可能	一般の位置、線形埋め込み
$m = 2k$	可能とは限らない	臨界次元、交差点、ファン・カンペン障害
$m < 2k$	一般にさらに困難	より強い制約

$2k + 1$ 次元では、空間に 1 次元分の余裕があるため、互いに素な k 単体の交差を一般の位置によって避けられる。一方、 $2k$ 次元では、交差点が一般に現れ、それを消せるかどうか为非自明な問題になる。この臨界次元で現れる代数的な障害が、ファン・カンペン障害である。

5.14 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. アフィン結合、アフィン包、アフィン独立の意味を説明できる。
2. 一般の位置にある点集合の定義を説明できる。
3. 線形埋め込み定理 $m \geq 2k + 1$ の主張を述べられる。
4. 頂点を一般の位置に選び、単体上で線形に拡張するという証明方針を説明できる。
5. 互いに素な 2 つの単体の像が交わらない理由を、アフィン独立性から説明できる。
6. 臨界次元 $m = 2k$ で、交差点が一般に現れ得ることを説明できる。
7. 削除積と差の写像の考え方を理解する。
8. ファン・カンペン障害を、交点数から作られる代数的障害として理解する。

5.15 練習問題

練習問題 5.1. $\mathbb{R}^3$ 内の 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 がアフィン独立であることは、幾何学的には何を意味するか述べよ。

練習問題 5.2. 点集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ のアフィン包 $\text{Aff}(S)$ を定義せよ。また、2 点 P, Q のアフィン包が何になるか説明せよ。

練習問題 5.3. k 次元単体的複体 K が $\mathbb{R}^m$ に必ず線形埋め込み可能であるための十分条件を述べよ。

練習問題 5.4. 線形埋め込み定理の証明において、なぜ頂点の像を一般の位置に選ぶ必要があるのか説明せよ。

練習問題 5.5. 互いに素な p 次元単体 σ と q 次元単体 τ の像が一般の位置で交わらないための次元条件を、 p, q, m を用いて述べよ。

練習問題 5.6. 任意の有限グラフが $\mathbb{R}^3$ に埋め込める理由を、線形埋め込み定理を用いて説明せよ。また、 $\mathbb{R}^2$ に埋め込めないグラフの例を 2 つ挙げよ。

練習問題 5.7. 任意の有限 2 次元複体が必ず埋め込めるユークリッド空間の次元を答えよ。また、この結果だけではクラインの壺が $\mathbb{R}^4$ に埋め込めることを説明できない理由を述べよ。

練習問題 5.8. 臨界次元 $m = 2k$ が特別である理由を、互いに素な k 単体どうしの交差の期待次元を用いて説明せよ。

練習問題 5.9. 削除積 X^* と差の写像 $g(x, y) = f(x) - f(y)$ を用いて、埋め込み性をどのように言い換えられるか説明せよ。

練習問題 5.10. ファン・カンペン–フローレスの定理において、 $\Delta_6^{(2)}$ がどのような 2 次元複体であり、なぜ $\mathbb{R}^4$ への埋め込み問題が臨界次元の問題であるか説明せよ。

第 6 章

ホモロジー群と埋め込み障害

6.1 本章の目標

前章までは、単体的複体をどの次元のユークリッド空間に埋め込めるかを考えた。本章では、そのような埋め込み問題を調べるための代数的な道具として、ホモロジー群を復習する。

ホモロジー群は、空間の「穴」を数えるための不変量である。ただし、ここでいう穴は、単に図を見て数えるものではない。単体的複体の単体を形式的に足し合わせ、その境界を計算し、「境界をもたない鎖」と「何かの境界である鎖」の差を調べることで定義される。

本章では、次の問いを中心に考える。

空間に、さまざまな次元の穴がいくつあるかを、どのように数学的に定義し計算するのか。

たとえば、円周 S^1 には 1 次元の穴が 1 つある。球面 S^2 は 1 次元の穴をもたないが、2 次元の基本類をもつ。トーラス T^2 は、縦方向と横方向の 2 つの独立な 1 次元サイクルをもつ。このような直感を、厳密な代数的対象として定式化したものがホモロジー群である。

本章の目標は次の通りである。

- 向き付けられた単体と鎖群 $C_p(K)$ を理解する。
- 境界作用素 ∂_p を定義し、低次元で計算できるようにする。
- 「境界の境界は 0」、すなわち $\partial^2 = 0$ の意味を理解する。
- サイクル群 $Z_p(K)$ 、バウンダリ群 $B_p(K)$ 、ホモロジー群 $H_p(K)$ を定義する。
- ベッチ数とオイラー標数の関係を理解する。
- ホモロジー群が埋め込み障害として働く考え方を理解する。

学習の指針

本章は、第 I 巻で学んだ単体的ホモロジーを、以後の章で使える形に固め直す復習の章である。初出の概念はほとんどないが、後半の「トーションと埋め込み障害」の節で扱う考え方は本書後半の主役になるので、特に丁寧に読んでほしい。手を動かす題材としては、三角形の周と、2 頂点 2 辺の円周という 2 つの小さな複体を繰り返し使う。鎖群と境界作用素を自分で書き下し、 H_0 と H_1 を最後まで計算できるようになることが本章の到達目標である。忘れていた事項があれば、巻頭の「既習事項の要点」も参照するとよい。

6.2 向き付けられた単体

ホモロジー群を定義するためには、まず単体に向きを付ける。

1 単体 $[v_0, v_1]$ は、 v_0 から v_1 へ向かう向きをもつ辺と考える。逆向きの辺は符号を反対にしたものとして扱う。すなわち、 $[v_1, v_0] = -[v_0, v_1]$ である。

2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ は、頂点を $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ の順にたどる向きをもつ三角形である。頂点の順序を奇置換すると符号が反対になり、偶置換では同じ向きを表す。

例 6.1. 三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ と $[v_1, v_2, v_0]$ は同じ向きを表す。一方、 $[v_0, v_2, v_1]$ は反対向きを表す。

具体例: 置換の符号で向きを確かめる

上の例を置換の符号で検算しよう。 $[v_1, v_2, v_0]$ は $[v_0, v_1, v_2]$ の巡回置換であり、巡回置換 $(v_0 v_1 v_2)$ は互換 2 つの積、すなわち偶置換である。したがって同じ向きを表す。一方、 $[v_0, v_2, v_1]$ は互換 $(v_1 v_2)$ を 1 回施したもの、すなわち奇置換なので $[v_0, v_2, v_1] = -[v_0, v_1, v_2]$ である。同様に、並びを完全に逆にした $[v_2, v_1, v_0]$ は互換 $(v_0 v_2)$ による奇置換なので、これも反対向きを表す。

この向きは、境界を符号付き和として書くために必要である。符号があるからこそ、後で $\partial\partial = 0$ という打ち消しが起こる。

6.3 鎖群

単体的複体 K が与えられたとき、 p 次元単体を形式的に足し合わせたものを p 次元鎖という。

定義 6.2 (鎖群). K の向き付き p 単体を基底とする自由アーベル群を $C_p(K)$ と書き、 K の p 次元鎖群という。その元を p 次元鎖、または単に p 鎖という。

つまり、 K の p 単体を $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ と書くと、 p 鎖は $c = a_1\sigma_1 + \dots + a_r\sigma_r$ ($a_i \in \mathbb{Z}$) という形式和である。

復習: 自由アーベル群と形式和

集合 $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ を基底とする自由アーベル群とは、整数係数の形式和 $a_1\sigma_1 + \dots + a_r\sigma_r$ の全体に、係数ごとの加法を入れたアーベル群のことで、 $\mathbb{Z}^r$ と同型である。形式和 $2\sigma_1 - 3\sigma_2$ は「 σ_1 を 2 回、 σ_2 を逆向きに 3 回数える」という重み付きの数え上げと思えばよい。とくに係数 -1 は、向きを逆にした単体を 1 回数えることを表す。巻頭の「既習事項の要点」も参照。

注意 6.3. ホモロジーは実数係数 $\mathbb{R}$ で導入されることも多いが、本書では埋め込み障害への応用を見据えて整数係数 $\mathbb{Z}$ を基本にする。実数係数で考えるとベッチ数を計算しやすいが、整数係数で考えるとトーションを検出できる。

例 6.4 (三角形の周). 三角形の周 K を考える。頂点を v_0, v_1, v_2 、辺を $e_{01} = [v_0, v_1]$, $e_{12} = [v_1, v_2]$, $e_{20} = [v_2, v_0]$ とする。このとき $C_0(K) = \mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$, $C_1(K) = \mathbb{Z}e_{01} \oplus \mathbb{Z}e_{12} \oplus \mathbb{Z}e_{20}$,

$C_p(K) = 0$ ($p \geq 2$) である。

6.4 境界作用素

鎖群だけでは、単体がどのようにつながっているかはまだ分からない。そのつながりを記録するのが境界作用素である。

定義 6.5 (境界作用素). 境界作用素 $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ を、向き付き p 単体 $[v_0, \dots, v_p]$ に対して

$$\partial_p[v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_p]$$

で定義し、線形に拡張する。ここで $\widehat{v_i}$ は v_i を取り除くことを表す。

低次元では、この定義は次のように見える。まず、1 単体については $\partial_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$ 。つまり、辺の境界は「終点から始点を引いたもの」である。

2 単体については $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ 。向きをそろえて書けば $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ である。

具体例: 貼り合わせた 2 枚の三角形の境界

正方形 $v_0v_1v_2v_3$ を対角線 v_0v_2 で 2 枚の三角形に分け、2 鎖 $c = [v_0, v_1, v_2] + [v_0, v_2, v_3]$ を考える。境界を計算すると

$$\partial_2 c = ([v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]) + ([v_2, v_3] - [v_0, v_3] + [v_0, v_2]) = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_3] + [v_3, v_0]$$

となる。内部の対角線 $[v_0, v_2]$ は符号が反対で打ち消され、正方形の外周だけが残った。このように、境界作用素は「内部で共有される辺を打ち消し、輪郭を取り出す」演算である。

6.5 境界の境界は 0

境界作用素の最も重要な性質は、境界の境界が 0 になることである。

定理 6.6 (境界の境界は 0). 任意の p に対して $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ が成り立つ。すなわち $\partial^2 = 0$ である。

証明の考え方. p 単体の境界を取ると、 $(p-1)$ 単体の符号付き和が得られる。さらにその境界を取ると、 $(p-2)$ 単体は 2 通りの方法で現れる。たとえば、頂点 v_i と v_j を取り除く操作は、 v_i を先に除く場合と v_j を先に除く場合の 2 通りで現れる。この 2 つの項は符号が反対であるため打ち消し合う。すべての項がこのように対になって打ち消されるので、 $\partial^2 = 0$ である。□

具体例:3 単体で符号の打ち消しを見る

3 単体では $\partial_3[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]$ である。さらに ∂_2 を施したとき、辺 $[v_2, v_3]$ がどこから現れるかを追跡しよう。 $[v_2, v_3]$ は v_0 と v_1 の両方を取り除いた面なので、 $+ [v_1, v_2, v_3]$ の境界から $+ [v_2, v_3]$ として、 $- [v_0, v_2, v_3]$ の境界から $- [v_2, v_3]$ として、ちょうど 2 回現れ、打ち消し合う。これは「 v_0 を先に除くか v_1 を先に除くか」の 2 通りに対応しており、符号が必ず反対になる。他のすべての辺についても同じ打ち消しが起こり、 $\partial_2 \partial_3[v_0, v_1, v_2, v_3] = 0$ となる。

この性質は、ホモロジー群を定義するための土台である。なぜなら、 $\partial^2 = 0$ により、次に定義するバウンダリが必ずサイクルになるからである。

6.6 サイクル、バウンダリ、ホモロジー群

定義 6.7 (サイクル群). $Z_p(K) = \text{Ker } \partial_p = \{c \in C_p(K) \mid \partial_p c = 0\}$ を、 K の p 次元サイクル群という。

サイクルとは、境界をもたない鎖である。閉じた曲線や閉じた面は、サイクルの典型例である。

定義 6.8 (バウンダリ群).

$$B_p(K) = \text{Im } \partial_{p+1} = \{c \in C_p(K) \mid c = \partial_{p+1} d \text{ for some } d \in C_{p+1}(K)\}$$

を、 K の p 次元バウンダリ群という。

バウンダリとは、何か一つ高い次元の鎖の境界として現れる鎖である。

$\partial^2 = 0$ より、 $B_p(K) \subset Z_p(K)$ である。つまり、何かの境界として現れる鎖は、必ず境界をもたない。

定義 6.9 (ホモロジー群). 単体的複体 K の第 p ホモロジー群を $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ で定義する。

復習: 剰余群とホモロジー類

アーベル群 Z とその部分群 B に対し、剰余群 Z/B の元は剰余類 $z + B (z \in Z)$ である。 $H_p(K)$ の元 $[z] = z + B_p(K)$ を、サイクル z の**ホモロジー類**という。2つのサイクル z, z' が同じ類を定める、すなわち $[z] = [z']$ となるのは、差 $z - z'$ がバウンダリするときであり、このとき z と z' は**ホモログス**であるという。「バウンダリの分だけずれたサイクルは同じものと見なす」というのが剰余群を取る意味である。巻頭の「既習事項の要点」も参照。

この定義は、次のように読める。

ホモロジー群とは、境界をもたない鎖を、何かの境界である鎖を 0 と見なして得られる群である。

したがって、ホモロジー群は「閉じているが、埋まっていないもの」を測る。これが「穴」を測るという直感の正確な意味である。

6.7 例：円周のホモロジー

三角形の周 K をもう一度考える。1 鎖 $z = e_{01} + e_{12} + e_{20}$ は $\partial_1 z = 0$ を満たすので 1 サイクルである。しかし、この複体には 2 単体がないため、 z は 2 鎖の境界としては現れない。したがって、 z は非自明なホモロジー類を定める。実際、 $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ である。

一方、中身を含む三角形 D では、2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ が存在し、 $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = e_{01} + e_{12} + e_{20}$ となる。したがって、三角形の周はバウンダリになり、 $H_1(D) = 0$ である。

この違いは重要である。円周では周回する 1 サイクルが穴を囲んでいるが、円板ではその穴が 2 単体によって埋められている。

具体例: 三角形の周の H_0

同じ複体 K で H_0 も最後まで計算してみよう。 $\partial_0 = 0$ なので $Z_0(K) = C_0(K)$ である。 $B_0(K)$ は $\partial_1 e_{01} = v_1 - v_0$, $\partial_1 e_{12} = v_2 - v_1$, $\partial_1 e_{20} = v_0 - v_2$ で生成される。係数の和を取る準同型 $\varepsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\varepsilon(av_0 + bv_1 + cv_2) = a + b + c$ を考えると、 ε は全射で、上の 3 つの生成元の像はすべて 0 なので $B_0(K) \subset \text{Ker } \varepsilon$ である。逆に $a + b + c = 0$ なら $av_0 + bv_1 + cv_2 = b(v_1 - v_0) + c(v_2 - v_0) \in B_0(K)$ と書けるので $\text{Ker } \varepsilon = B_0(K)$ である。よって ε が誘導する写像により $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ となり、連結成分が 1 つであることと合致する。

6.8 例：2 つの頂点と 2 本の辺からなる円周

次に、2 つの頂点 v_1, v_2 と、それらを結ぶ 2 本の辺 e_1, e_2 からなる複体を考える。これは円周 S^1 の別の分割である。厳密には、同じ 2 頂点を結ぶ辺が 2 本あるので単体的複体ではなく、胞体複体（セル複体）であるが、鎖群と境界作用素は単体的複体の場合とまったく同様に定義でき、同じホモロジー群が得られる。

辺の向きを $e_1 : v_1 \rightarrow v_2$, $e_2 : v_2 \rightarrow v_1$ とする。このとき $\partial_1(e_1) = v_2 - v_1$, $\partial_1(e_2) = v_1 - v_2$ 。一般の 1 鎖を $c = ae_1 + be_2$ と書くと、 $\partial_1 c = a(v_2 - v_1) + b(v_1 - v_2) = (b - a)v_1 + (a - b)v_2$ 。したがって $\partial_1 c = 0$ となる条件は $a = b$ である。よって $Z_1(K) = \mathbb{Z}(e_1 + e_2)$ 。また $C_2(K) = 0$ なので $B_1(K) = 0$ 。したがって $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ 。さらに K は連結なので $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ 。

この例は、同じ円周でも単体分割が変わると鎖群の見かけは変わるが、ホモロジー群は同じであることを示している。

復習: ホモロジー群の位相不変性

第 I 巻で学んだように、ホモロジー群は単体分割の取り方によらず、同相な空間には同型なホモロジー群が対応する。だから、特定の単体分割を明示せずに $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ のように空間の記号で書いてよい。三角形の周 (3 頂点 3 辺) と本節の複体 (2 頂点 2 辺) の計算が一致したことは、この事実の検算になっている。

6.9 ベッチ数とオイラー標数

定義 6.10 (ベッチ数). $H_p(K)$ の自由部分の階数を $\beta_p(K) = \text{rank } H_p(K)$ と書き、 K の第 p ベッチ数という。

復習: 有限生成アーベル群の構造定理

有限生成アーベル群 A は $A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}$ ($d_i \geq 2, d_i \mid d_{i+1}$) の形に分解される。 r を A の階数 ($\text{rank } A$) といい、右側の有限巡回群の直和をトーション部分という。たとえば $A \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ なら $\text{rank } A = 2$ であり、トーション部分は階数に寄与しない。有限単体的複体のホモロジー群は有限生成なので、必ずこの形に書ける。巻頭の「スミス標準形の読み方」も参照。

直感的には、 $\beta_p(K)$ は p 次元の独立な穴の個数を数える。たとえば、連結成分の数は β_0 、独立な閉路の数は β_1 に対応する。

定義 6.11 (オイラー標数). 有限単体的複体 K に対し、 p 単体の個数を c_p と書く。このとき

$$\chi(K) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p c_p$$

を K のオイラー標数という。

ホモロジー群を用いると、オイラー標数はベッチ数で表される。

定理 6.12 (オイラー・ポアンカレの公式). 有限単体的複体 K に対して

$$\chi(K) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \beta_p(K)$$

が成り立つ。

証明の考え方. 鎖群 $C_p(K)$ の階数は p 単体の個数 c_p である。また、 $C_p(K)$ はサイクル部分と境界に写る部分に分解される。階数について交代和を取ると、境界に関する項が隣り合う次元で打ち消し合い、単体数の交代和とホモロジー群の階数の交代和が一致する。これがオイラー・ポアンカレの公式である。□

具体例: 円周での検算

三角形の周 K で公式を検算しよう。単体数は $c_0 = 3, c_1 = 3$ なので $\chi(K) = 3 - 3 = 0$ である。一方、 $H_0(K) \cong \mathbb{Z}, H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ より $\beta_0(K) = 1, \beta_1(K) = 1$ なので、ベッチ数の交代和も $1 - 1 = 0$ となり一致する。右辺はベッチ数だけで決まるので、円周 S^1 のどんな単体分割でもオイラー標数は 0 になるはずである。

6.10 グラフと曲面の基本例

連結グラフ G の頂点数を v 、辺数を e とする。グラフは 1 次元複体なので $H_p(G) = 0$ は $p \geq 2$ で成り立つ。また連結性より $\beta_0(G) = 1$ である。オイラー標数は $\chi(G) = v - e$ であり、オイラー・ポアンカレの公式より $v - e = \beta_0(G) - \beta_1(G) = 1 - \beta_1(G)$ 。したがって $\beta_1(G) = e - v + 1$ 。

具体例: 完全グラフ K_4 の第一ベッチ数

頂点 v_1, v_2, v_3, v_4 をすべて辺で結んだ完全グラフ K_4 では、 $v = 4$ 、 $e = 6$ なので $\beta_1(K_4) = 6 - 4 + 1 = 3$ である。実際、3 つの三角形の閉路 $v_1v_2v_3$ 、 $v_1v_2v_4$ 、 $v_1v_3v_4$ はそれぞれ他の 2 つに含まれない辺 (v_2v_3 、 v_2v_4 、 v_3v_4) をもつので独立である。残る三角形 $v_2v_3v_4$ の閉路は、この 3 つの閉路の整数係数の 1 次結合として書ける。辺の向きを決めて実際に確かめてみよ。

向き付け可能閉曲面 Σ_g については

$$H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$$

である。したがって $\chi(\Sigma_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ 。

向き付け不可能閉曲面 N_g については、整数係数では $H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となり、トーションが現れる。このトーションは、後で埋め込み障害を考える際に重要になる。

直観: なぜ整数係数か

係数を実数にして同じ計算をすると、 $H_1(N_g; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{g-1}$ となって $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の情報は消えてしまう。実数係数では $2x = 0$ の解が $x = 0$ しかないためである。埋め込み障害として効くのはまさにこのトーションなので、本書では整数係数を基本にしている。鎖群の節の remark で述べた係数の選び方の違いが、ここで実際に意味をもつ。

6.11 トーションと埋め込み障害

定義 6.13 (トーション元). アーベル群 A の元 a がトーション元であるとは、 $a \neq 0$ であり、ある正整数 m に対して $ma = 0$ となることをいう。

たとえば、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明な元は、2 倍すると 0 になるのでトーション元である。自由アーベル群 $\mathbb{Z}^r$ にはトーション元は存在しない。

直観: ホモロジー群のトーション元の意味

ホモロジー群 $H_p(K)$ において $[z]$ が位数 m のトーション元であるとは、サイクル z 自身はどの $(p+1)$ 鎖の境界にもならないが、 m 倍した mz はある鎖の境界になる、ということである。いわば「1 周では埋められないが、 m 周すると埋められる」穴であり、前節の向き付け不可能閉曲面では $m = 2$ でこの現象が実際に起きている。自由部分の階数だけを見るベッチ数では、この情報は落ちてしまう。

埋め込み問題では、次のような論理がよく使われる。

もし X が Y に埋め込めるなら、あるホモロジー群は特定の性質をもつはずである。

その性質が実際には成り立たないことを計算で示せば、 X は Y に埋め込めないと結論できる。これがホモロジーによる埋め込み障害である。

直観: 埋め込み障害の論法の型

この論法は、次の 4 段階の型として整理できる。

1. 埋め込みが存在すると仮定する。
2. 埋め込みの存在から従う、ホモロジー群などの不変量に関する必要条件を導く。
3. 不変量を実際に計算し、その必要条件が破れていることを示す。
4. 対偶により、埋め込みは存在しないと結論する。

グラフの平面性の議論で「平面に描けるならオイラーの公式が成り立つはず」という必要条件から辺数の制限を導き、 K_5 などを排除したのも、この型の一例である。次章では「 S^3 内のコンパクト 3 次元部分多様体の H_1 はトーションをもたない」という必要条件を確立し、これを S^3 への埋め込みの障害として用いる。

次章では、この論理の具体例として、 S^3 に埋め込まれた部分多様体のホモロジーを調べる。特に、 S^3 内のコンパクト 3 次元部分多様体の H_1 にはトーションが現れないことを示す。

6.12 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. 向き付き単体と鎖群 $C_p(K)$ の定義を説明できる。
2. 境界作用素 ∂_p を低次元で計算できる。
3. $\partial^2 = 0$ の意味を説明できる。
4. サイクル群 $Z_p(K)$ 、バウンダリ群 $B_p(K)$ 、ホモロジー群 $H_p(K)$ を定義できる。
5. 2 つの頂点と 2 本の辺からなる円周のホモロジーを計算できる。
6. ベッチ数とオイラー標数の関係を説明できる。
7. グラフの第一ベッチ数 $\beta_1 = e - v + 1$ を導ける。
8. トーションが埋め込み障害に関係する理由を説明できる。

6.13 練習問題

練習問題 6.1. 三角形の周 K について、 $C_0(K)$, $C_1(K)$, $C_2(K)$ をそれぞれ書け。

練習問題 6.2. 2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ に対して、 $\partial_2[v_0, v_1, v_2]$ を計算せよ。さらに、その境界をもう一度取って $\partial_1\partial_2[v_0, v_1, v_2] = 0$ を確認せよ。

練習問題 6.3. p 次元サイクル群 $Z_p(K)$ 、 p 次元バウンダリ群 $B_p(K)$ 、 p 次ホモロジー群 $H_p(K)$ を、

境界作用素を用いて定義せよ。

練習問題 6.4. 2つの頂点 v_1, v_2 と、それらを結ぶ2本の辺 e_1, e_2 からなる複体 K を考える。向きを $e_1 : v_1 \rightarrow v_2, e_2 : v_2 \rightarrow v_1$ とする。このとき $H_0(K)$ と $H_1(K)$ を計算せよ。

練習問題 6.5. 前問の複体について、単体数からオイラー標数を計算し、ベッチ数による計算と一致することを確認せよ。

練習問題 6.6. 連結グラフ G の頂点数を v 、辺数を e とする。オイラー標数を用いて $\beta_1(G) = e - v + 1$ を導け。

練習問題 6.7. トーラス T^2 のホモロジー群 $H_0(T^2), H_1(T^2), H_2(T^2)$ を述べ、オイラー標数を求めよ。

練習問題 6.8. 射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の第一ホモロジー群に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が現れることは、どのような意味でトーシオンをもつと言えるか説明せよ。

練習問題 6.9. 「もし埋め込めるなら、ホモロジー群がある性質を満たす」という形の議論が、なぜ埋め込み障害になるのか説明せよ。

6.14 次章への橋渡し

本章では、ホモロジー群を定義し、ベッチ数、オイラー標数、トーシオンを確認した。次章では、ホモロジー群を効率的に計算する道具としてマイヤー・ヴィートリス完全系列を導入し、それを用いて球面のホモロジーや S^3 内の部分多様体のホモロジーを調べる。

第 7 章

S^3 に埋め込まれた部分多様体のホモロジー

7.1 本章の目標

前章では、ホモロジー群を「サイクルをバウンダリで割ったもの」として定義した。しかし、定義に戻って直接計算する方法は、複雑な空間ではすぐに大変になる。たとえば、トーラスや球面のホモロジーでさえ、単体分割を細かく書き出して計算するのは煩雑である。

本章では、空間を 2 つの部分に分けてホモロジーを計算する道具であるマイヤー・ヴィートリス完全系列を導入する。これは、集合の包含排除原理 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ のホモロジー版と考えることができる。ただし、ホモロジーでは単なる数ではなく、群と準同型の長い系列が現れる。

本章の後半では、この完全系列を S^3 の分解 $S^3 = M \cup E(M)$, $M \cap E(M) = \partial M$ に適用し、 S^3 に埋め込まれたコンパクト 3 次元部分多様体 M の $H_1(M)$ がトーションをもたないことを示す。これは、多重分岐曲面の埋め込み障害を考えるための基本的な準備である。

本章の目標は次の通りである。

- 完全系列の意味を理解する。
- マイヤー・ヴィートリス完全系列の形と各写像の役割を理解する。
- つなぎ準同型が「縫い目」のホモロジーを検出する写像であることを理解する。
- 球面のホモロジーをマイヤー・ヴィートリス完全系列で計算する。
- S^3 内のコンパクト 3 次元部分多様体の H_1 にトーションが現れないことを証明する。

学習の指針

本章の前提は、第 I 巻のホモロジー群・完全系列・マイヤー・ヴィートリス完全系列である (巻頭「既習事項の要点」も参照)。定着していなくても、本章で復習しながら進めるので心配はいらない。初出の概念は、余核、コホモロジー、アレクサンダー双対性の 3 つである。読み方としては、まず前半で S^2 を 2 つの半球に分ける例を通してマイヤー・ヴィートリス完全系列に慣れ、後半の分解 $S^3 = M \cup E(M)$ への適用 (トーション消滅定理) を山場として読むとよい。完全系列は眺めるだけでは身につかないので、各例で群と写像を自分の手で書き下すこと。

7.2 完全系列

まず、完全系列という代数的な概念を確認する。

定義 7.1 (完全系列). アーベル群と準同型の列

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

が**完全**であるとは、すべての n について $\text{Im } f_{n+1} = \text{Ker } f_n$ が成り立つことをいう。

完全性は、次のように読める。

次の写像で 0 になるものは、ちょうど前の写像から来たものである。

この条件は非常に強い。系列の一部の群と写像が分かると、未知の群についてかなり多くの情報が得られる。

例 7.2 (短い完全系列). $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ が完全であるとする。このとき f は単射、 g は全射であり、さらに $\text{Im } f = \text{Ker } g$ である。したがって、 C は B を A に対応する部分群で割ったものと見なせる。

例 7.3. 整数に対して

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は短い完全系列である。ここで最初の写像は $k \mapsto nk$ であり、次の写像は自然な剰余写像である。

7.3 マイヤー・ヴィートリス完全系列

空間 X が 2 つの部分空間 A, B の和集合 $X = A \cup B$ として表されているとする。ここでは、 A と B は十分よく重なっており、マイヤー・ヴィートリス完全系列を適用できると仮定する。

定理 7.4 (マイヤー・ヴィートリス完全系列). $X = A \cup B$ とする。このとき、次の長い完全系列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow H_p(A \cap B) \xrightarrow{i_*} H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{j_*} H_p(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

特に低次元では

$$\cdots \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{\partial_*} H_0(A \cap B) \longrightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0$$

となる。

ここで、 i_* は共通部分を A と B に入れる包含写像から誘導される写像であり、符号の規約を込めて $i_*(c) = ((i_A)_*c, -(i_B)_*c)$ と考えられる。また j_* は、 A 側のサイクルと B 側のサイクルを X の中で足し合わせる写像である。

直観: 「十分よく重なる」という仮定

マイヤー・ヴィトリス完全系列を使うには、 A と B が境界のところで少し重なっている必要がある (たとえば A, B がともに開集合で $X = A \cup B$ 、あるいは単体的複体の部分複体の対など)。球面を「ぴったり半分」に切るのではなく、赤道を越えて少し太らせた半球を取るのはこのためである。少し太らせても各部分のホモトピー型は変わらないので、計算には影響しない。なお、本章で使う記号 $\simeq$ はホモトピー同値を表す。第 I 巻で学んだように、ホモトピー同値な空間はホモロジー群が同型なので、系列の各項は「ホモトピー同値で見やすい空間に取り替えて」計算してよい。

最も重要で、最初は理解しにくいのがつなぎ準同型 $\partial_* : H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(A \cap B)$ である。

7.4 つなぎ準同型の直感

つなぎ準同型 ∂_* は、 X 中の p 次元の穴が、 A と B を貼り合わせることでどのように生まれたかを表す。より直感的には、その穴の原因となる「縫い目」を $A \cap B$ の中に見つける写像である。

代表的な例は球面 S^2 である。 S^2 を北半球側の少し大きい開集合 A と、南半球側の少し大きい開集合 B に分ける。すると A と B はそれぞれ円板のような空間であり、可縮である。一方、共通部分 $A \cap B$ は赤道のまわりの帯であり、 S^1 にホモトピー同値である。

このとき、 S^2 の 2 次元の基本類は、 A と B を赤道に沿って貼り合わせることで生まれる。つなぎ準同型は、この 2 次元の基本類を、赤道が表す $H_1(A \cap B)$ の生成元に対応させる。

S^2 の 2 次元の穴は、赤道という 1 次元の縫い目から生まれる。

7.5 つなぎ準同型の構成

つなぎ準同型を鎖の言葉で説明しておく。 $[z] \in H_p(X)$ を取る。ここで z は p 次サイクルであり、 $\partial z = 0$ を満たす。

$X = A \cup B$ なので、細分を必要なら行っただけで、 z を $z = a + b$ と書ける。ここで a は A 中の p 鎖、 b は B 中の p 鎖である。

z がサイクルなので $0 = \partial z = \partial a + \partial b$ であり、 $\partial a = -\partial b$ となる。左辺は A の中にあり、右辺は B の中にある。したがって、この鎖は共通部分 $A \cap B$ の中にあると見なせる。そこで $\partial_*[z] = [\partial a] \in H_{p-1}(A \cap B)$ と定める。

この定義が代表元や分解の取り方によらないことを確かめるには少し準備が必要であるが、本書では直感を重視する。重要なのは、つなぎ準同型が全体の穴 $\longmapsto$ 貼り合わせの縫い目 に対応させる写像だという点である。

直観: なぜ ∂a は $A \cap B$ のサイクルなのか

上の構成で確認すべき点は 2 つある。まず、 ∂a は A 中の鎖であるが、 $\partial a = -\partial b$ より B 中の鎖でもあるから、 $A \cap B$ 中の鎖である。次に、 $\partial(\partial a) = 0$ であるから、 ∂a は $A \cap B$ 中の $(p-1)$ 次サイクルであり、ホモロジー類 $[\partial a]$ を定める。 S^2 の例でいえば、 z を基本類

を表す2次サイクル、 a を北半球側の2次鎖、 b を南半球側の2次鎖とすると、 ∂a はちょうど赤道を表す1次サイクルになる。「サイクル z 自身は境界をもたないが、半分に切った a には境界(縫い目)が現れる」というのが ∂_* の姿である。

7.6 球面のホモロジーへの応用

n 次元球面 S^n を、北半球側 A と南半球側 B に分ける。 A と B はどちらも可縮であり、 $A \cap B \simeq S^{n-1}$ である。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の中で $p \geq 2$ の部分を見ると、 $H_p(A) \oplus H_p(B) = 0$, $H_{p-1}(A) \oplus H_{p-1}(B) = 0$ であるから、完全性より $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$ が得られる。

これを帰納的に用いると、

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。

具体例: S^1 のホモロジーを計算する

帰納法の出発点として、 S^1 を手で計算してみよう。 S^1 を上側の弧を少し太らせた A と、下側の弧を少し太らせた B に分けると、 A, B は可縮で、 $A \cap B$ は左右2つの短い弧の非交和、すなわち2点 $\{p, q\}$ とホモトピー同値である。低次元部分の系列は

$$0 = H_1(A) \oplus H_1(B) \longrightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\partial_*} H_0(A \cap B) \xrightarrow{i_*} H_0(A) \oplus H_0(B)$$

となる。 $H_0(A \cap B) \cong \mathbb{Z}^2$ (生成元 $[p], [q]$) である。 A, B は連結なので、 $H_0(A), H_0(B)$ の中では $[p]$ と $[q]$ は同じ類になり、 i_* は $[p]$ と $[q]$ を同じ元 $([p]_A, -[p]_B)$ に送る。よって $\text{Ker } i_*$ は $[p] - [q]$ で生成される $\mathbb{Z}$ である。完全性より ∂_* は単射で像は $\text{Ker } i_*$ に一致するから、 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ を得る。同じ低次元部分の読み方で、 $n \geq 2$ のとき ($A \cap B \simeq S^{n-1}$ が連結なので) $H_1(S^n) = 0$ も分かる。

注意 7.5. これは、球面 S^n が0次元には1つの連結成分をもち、 n 次元には1つの基本類をもつが、その中間次元には穴をもたないことを表している。

7.7 余核と短い完全系列

マイヤー・ヴィートリス完全系列から特定のホモロジー群を取り出すとき、余核を使うと便利である。

定義 7.6 (余核). 準同型 $f: A \rightarrow B$ に対し、 $\text{Coker}(f) = B/\text{Im } f$ を f の余核という。

余核は、 f が全射でないとき、到達先 B の中で f の像が届かなかった部分を測る。完全系列 $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3 \xrightarrow{h} G_4$ においては、 $\text{Im } f = \text{Ker } g$, $\text{Im } g = \text{Ker } h$ である。したがって、第一同

型定理を用いると、しばしば

$$0 \longrightarrow \text{Coker}(f) \longrightarrow G_3 \longrightarrow \text{Im } h \longrightarrow 0$$

という短い完全系列が得られる。

具体例: 余核と分裂で中央の群を求める

まず余核そのものを計算してみる。 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $k \mapsto nk$ とすると $\text{Coker}(f) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であり、 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ を $k \mapsto (k, 0)$ とすると $\text{Coker}(f) \cong \mathbb{Z}$ である。次に、上の短い完全系列の使い方を見る。アーベル群の完全系列

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

において G を求めよう。 $\text{Coker}(\times 2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、 h の次が 0 なので h は全射、すなわち $\text{Im } h = \mathbb{Z}$ である。よって $0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ が完全である。右端の $\mathbb{Z}$ は自由アーベル群なので、この短い完全系列は分裂し、 $G \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と決まる。「右端が自由アーベル群なら分裂して直和になる」という読み方は、この後もくり返し使う。

この考え方は、トーラスや閉曲面を分割してホモロジーを計算するときに有効である。本書では、完全系列を読み解くための補助的な道具として使う。

7.8 S^3 内の部分多様体と外部

ここから、 S^3 に埋め込まれたコンパクト 3 次元部分多様体のホモロジーを調べる。

定義 7.7 (外部). $M \subset S^3$ をコンパクト 3 次元部分多様体とする。 M の外部を $E(M) = \overline{S^3 - \text{int } M}$ で定義する。

直観: S^3 中の部分多様体を思い描く

S^3 は $\mathbb{R}^3$ に無限遠点 ∞ を 1 つ加えた空間と思えばよい。したがって、 $\mathbb{R}^3$ の中に置いた「境界付きのコンパクトな立体」はすべて S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体の例である。たとえば、球体 D^3 、ソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ (結び目に沿って曲がったものでもよい)、穴が g 個あるハンドル体などを思い浮かべるとよい。外部 $E(M)$ は「 M の外側全体 (∞ を含む)」であり、これもコンパクトな 3 次元多様体で、 M と同じ境界曲面 ∂M をもつ。 M と $E(M)$ は境界の曲面 ∂M でぴったり貼り合わさって S^3 全体を作っている。この「内側と外側が同じ曲面を共有する」形が、マイヤー・ヴィートリス完全系列の $A \cap B$ にちょうど当てはまる。

このとき $S^3 = M \cup E(M)$, $M \cap E(M) = \partial M$ である。したがって、この分解にマイヤー・ヴィートリス完全系列を適用できる。

必要な部分だけを書き出すと、

$$H_2(S^3) \longrightarrow H_1(\partial M) \xrightarrow{\Phi} H_1(M) \oplus H_1(E(M)) \longrightarrow H_1(S^3)$$

である。ここで $\Phi = (i_M)_* \oplus -(i_E)_*$ であり、 $i_M: \partial M \hookrightarrow M$, $i_E: \partial M \hookrightarrow E(M)$ は包含写像である。

S^3 のホモロジーは $H_2(S^3) = 0$, $H_1(S^3) = 0$ である。したがって完全性より

$$0 \longrightarrow H_1(\partial M) \xrightarrow{\Phi} H_1(M) \oplus H_1(E(M)) \longrightarrow 0$$

が完全である。よって Φ は同型である。

定理 7.8 (境界から内部・外部への同型). $M \subset S^3$ をコンパクト 3次元部分多様体とし、 $E(M) = \overline{S^3 - \text{int } M}$ とする。このとき $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ である。

具体例: 球体とハンドル体で確かめる

$M = D^3$ (球体) のとき、 $\partial M = S^2$ 、 $E(M)$ も球体である。このとき $H_1(S^2) = 0$, $H_1(D^3) = 0$ なので、同型は $0 \cong 0 \oplus 0$ となり確かに成り立つ。

M を種数 g のハンドル体 (穴が g 個の立体) とすると、 $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^g$ 、 $\partial M = \Sigma_g$ 、 $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ である。定理より $\mathbb{Z}^{2g} \cong \mathbb{Z}^g \oplus H_1(E(M))$ となるので、外部の形を直接調べなくても $H_1(E(M)) \cong \mathbb{Z}^g$ と分かる。「境界の情報から、見えにくい外部のホモロジーが決まる」のがこの定理の強みである。

7.9 トーションの消滅

S^3 は向き付け可能であり、その部分多様体 M も向き付け可能である。したがって、 ∂M は向き付け可能閉曲面の有限和である。向き付け可能閉曲面の第一ホモロジー群は自由アーベル群なので、 $H_1(\partial M)$ は自由アーベル群である。

復習: トーションと自由アーベル群

アーベル群 G の元 $x \neq 0$ がトーション元であるとは、ある整数 $n \geq 1$ について $nx = 0$ となることをいう ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の 1 など)。 $\mathbb{Z}^r$ の形の群を階数 r の自由アーベル群といい、自由アーベル群はトーション元をもたない。第 I 巻で見たように、種数 g の向き付け可能閉曲面では $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ であり (球面は $g = 0$ で $H_1 = 0$)、向き付け不可能閉曲面では $H_1(N_k) \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とトーションが現れる。また、有限生成自由アーベル群の部分群はふたたび自由アーベル群である。直和因子は部分群でもあるから、下の議論のように「自由アーベル群の直和因子にトーションはない」が従う。

前節の同型より、 $H_1(M)$ と $H_1(E(M))$ は $H_1(\partial M)$ の直和因子である。自由アーベル群の直和因子にはトーションがない。したがって次を得る。

定理 7.9 (S^3 内の部分多様体の一次ホモロジー). $M \subset S^3$ をコンパクト 3次元部分多様体とする。このとき $H_1(M)$ はトーションをもたない。同様に、 $H_1(E(M))$ もトーションをもたない。

Proof. 上で示した同型 $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ を用いる。左辺は自由アーベル群である。もし $H_1(M)$ に非自明なトーション元があれば、直和の中にも非自明なトーション元が生じる。これは左辺が自由アーベル群であることに反する。したがって $H_1(M)$ はトーションをもたない。 $E(M)$ についても同様である。 $\square$

この定理は、埋め込み障害として使える。もしあるコンパクト 3 次元多様体 M の $H_1(M)$ にトーシオンがあるなら、その M は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体としては埋め込めない。

7.10 例：ソリッドトーラスと結び目外部

$M = S^1 \times D^2$ をソリッドトーラスとする。このとき $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$, $\partial M = T^2$, $H_1(\partial M) \cong \mathbb{Z}^2$. 標準的なソリッドトーラスの外部もソリッドトーラスなので $H_1(E(M)) \cong \mathbb{Z}$ であり、 $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ は $\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ という同型になる。

具体例: 同型 Φ を基底で書き下す

標準的なソリッドトーラス M では、 S^3 は 2 つのソリッドトーラス M と $E(M)$ を境界のトーラス T^2 で貼り合わせたものになる。 $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ の基底として、円板 $\{*\} \times \partial D^2$ を回る $\times$ リディアン μ と、芯 S^1 方向に一周する **ロンジチュード** λ を取る。

- M の中では、 μ は円板 $\{*\} \times D^2$ の境界なので $(i_M)_*\mu = 0$ 。一方 λ は芯の円にホモロガスで、 $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ の生成元にうつる。
- $E(M)$ の中では役割が入れ替わる。 μ は $E(M)$ の芯を一周する生成元にうつり、 λ は $E(M)$ の中で円板を張って 0 になる。

したがって $\Phi(\mu) = (0, -1)$ 、 $\Phi(\lambda) = (1, 0)$ であり、行列で書けば行列式 ± 1 の整数行列となつて、確かに $\Phi: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は同型である。

直観: 半分が生き残り、半分が死ぬ

上の例が示すように、境界のトーラスの $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ のうち、 M に入ると死ぬ方向 (μ) と生き残る方向 (λ) がちょうど半々である。定理の同型 $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ は、境界のホモロジーが「内側で生き残る部分」と「外側で生き残る部分」に過不足なく振り分けられることを意味する。一般に、境界付きコンパクト向き付け可能 3 次元多様体 M では、有理数係数で見ると $H_1(\partial M; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M; \mathbb{Q})$ の像の次元は $\dim H_1(\partial M; \mathbb{Q})$ のちょうど半分になることが知られている (half lives, half dies と呼ばれる)。「境界の 1 次元サイクルのうち半分は内部で円板や曲面を張って死ぬ」という描像を持っておくとよい。

結び目 $K \subset S^3$ の正則近傍 $N(K)$ はソリッドトーラスである。外部を $E(K) = \overline{S^3 - \text{int } N(K)}$ と書くと、 $H_1(\partial N(K)) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_1(N(K)) \cong \mathbb{Z}$. よって $\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z} \oplus H_1(E(K))$ となり、 $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}$ を得る。

コラム：結び目理論とのつながり

結び目 $K \subset S^3$ そのものは常に S^1 と同相であり、 $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ である。しかし、結び目の情報は補空間 $E(K)$ に現れる。本章の視点では、埋め込みを調べるときは「埋め込まれた対象」だけでなく「その外部」を見ることが重要である。多重分岐曲面の場合も同様に、正則近傍とその外部のホモロジーを比較することで、 S^3 への埋め込み障害が得られる。

7.11 閉曲面の場合

$F \subset S^3$ を連結な閉曲面とし、さらに F が S^3 を分離する、すなわち $S^3 = A \cup B$, $A \cap B = F$ となるコンパクト 3 次元部分多様体 A, B が存在すると仮定する。

上の定理を $M = A$ に適用すると、 $H_1(F) \cong H_1(A) \oplus H_1(B)$ である。特に $H_1(F)$ は自由アーベル群であり、トーションをもたない。

系 7.10. S^3 を分離する連結閉曲面 F について、 $H_1(F)$ はトーションをもたない。

Proof. $F = \partial A$ であり、 A は向き付け可能多様体 S^3 の中の 3 次元部分多様体だから向き付け可能である。向き付け可能コンパクト 3 次元多様体の境界は向き付け可能なので、 $F \cong \Sigma_g$ であり、 $H_1(F) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ である。特にトーションをもたない。 $\square$

注意：分離性を仮定してよいか

上で「 F が S^3 を分離する」ことを仮定した点に注意してほしい。ジョルダン曲線定理やジョルダン–ブラウアー分離定理は、埋め込まれる対象が球面 S^{n-1} である場合の主張であって、一般の閉曲面 $F \subset S^3$ に対して分離性を無条件に使うことはできない。実際、次節のアレクサンダー双対性が示すように、 F が S^3 を分離するかどうかは $\tilde{H}^2(F)$ で決まり、向き付け不可能閉曲面ではこれが $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となって「補空間の成分数」としては読めなくなる。したがって、「向き付け不可能閉曲面は S^3 に埋め込めない」ことを上の系から導こうとすると（分離性 $\Rightarrow$ 向き付け可能性 $\Rightarrow$ 非埋め込み性、という）循環論法になってしまう。正しい証明は、後の節の命題「向き付け不可能閉曲面の非埋め込み性」でアレクサンダー双対性を用いて与える。

7.12 コホモロジーの最小限の準備

アレクサンダー双対性では、補空間のホモロジーを、取り除いた空間のコホモロジーで表す。第 I 巻では主にホモロジーを扱ったので、ここで必要な範囲に限りコホモロジーを準備しておく。本節の目的は、コホモロジー論を一般に展開することではなく、以後に現れる $H^1(G)$ や $H^2(F)$ の意味を読めるようにすることである。

単体的複体 X の k 次チェイン群を $C_k(X)$ とする。ホモロジーでは、境界準同型 $\partial : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$ を用いてサイクルと境界を考えた。コホモロジーでは、これを双対化する。すなわち、 k 次コチェイン群を

$$C^k(X; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_k(X), \mathbb{Z})$$

で定義する。元 $\varphi \in C^k(X; \mathbb{Z})$ は、各 k 単体に整数を割り当てる写像と考えてよい。

境界作用素 ∂ を双対化すると、コバウンダリ作用素

$$\delta : C^k(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow C^{k+1}(X; \mathbb{Z})$$

が得られる。これは、 $\varphi \in C^k(X; \mathbb{Z})$ と $c \in C_{k+1}(X)$ に対して

$$(\delta\varphi)(c) = \varphi(\partial c)$$

で定義される。 $\partial^2 = 0$ から $\delta^2 = 0$ が従う。したがって、ホモロジーと同様に

$$H^k(X; \mathbb{Z}) = \text{Ker}(\delta : C^k \rightarrow C^{k+1}) / \text{Im}(\delta : C^{k-1} \rightarrow C^k)$$

を定義できる。これを X の k 次コホモロジー群という。

ホモロジーとコホモロジーの見方

ホモロジー類は、空間の中にある「閉じた k 次元的なもの」を測る。これに対して、コホモロジー類は、そのような k 次元サイクルに整数を対応させる「測定器」と見ることができる。たとえば $H^1(X)$ の元は、 X の閉曲線に整数を対応させる量であり、閉曲線を境界で変えても値が変わらないものを表す。

本書で使う範囲では、コホモロジーを環構造まで考える必要はない。アレクサンダー双対性では、 A のコホモロジー群が $S^n - A$ のホモロジー群と対応する、という点だけを用いる。

有限複体については、コホモロジーはホモロジーからほぼ読める。正確には、普遍係数定理により短完全列

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{k-1}(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \text{Hom}(H_k(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

がある。特に $H_{k-1}(X)$ にトーションがなければ、 $H^k(X)$ はおおよそ $H_k(X)$ の双対群と考えてよい。

復習: Hom と Ext の計算規則

普遍係数定理を使うには、次の計算規則だけ知っていれば十分である。

$$\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0, \quad \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = 0, \quad \text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

どちらも直和を直和にうつす ($\text{Hom}(A \oplus B, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \oplus \text{Hom}(B, \mathbb{Z})$ など)。標語的には、 $\text{Hom}(-, \mathbb{Z})$ は自由部分 $\mathbb{Z}^r$ をそのまま拾ってトーションを消し、 $\text{Ext}(-, \mathbb{Z})$ はトーションをそのまま拾って自由部分を消す。したがって $H_k \cong \mathbb{Z}^r \oplus T_k$ (T_k はトーション部分) と書けば、 $H^k \cong \mathbb{Z}^r \oplus T_{k-1}$ と読める。「トーションは次数が 1 つ上のコホモロジーに現れる」ことに注意する。

本書で主に使う例は次の二つである。

例 7.11 (グラフの一次コホモロジー). 連結グラフ G について $H_1(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)}$ であり、 $H_0(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ にはトーションがない。したがって $H^1(G; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(G; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)}$ である。この事実は、後で $H_1(S^3 - G)$ を計算するときに用いる。

例 7.12 (閉曲面の二次コホモロジー). 向き付け可能閉曲面 F については、 $H_2(F; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であり、 $H_1(F; \mathbb{Z})$ は自由アーベル群である。したがって普遍係数定理より $H^2(F; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_2(F; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ である。

一方、向き付け不可能閉曲面 N_k では $H_2(N_k; \mathbb{Z}) = 0$ であるが、 $H^2(N_k; \mathbb{Z})$ は 0 にはならない。実際、 $H_1(N_k; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ はトーション $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ をもつので、普遍係数定理より

$$H^2(N_k; \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}(H_1(N_k; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

である。

アレクサンダー双対性を通して見ると、向き付け可能な場合の $H^2 \cong \mathbb{Z}$ は、補空間が2つの連結成分に分かれることに対応する。向き付け不可能な場合の $H^2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は、次節で見るように、 N_k が S^3 に埋め込めないことの証明を与える。

なお、アレクサンダー双対性では $\tilde{H}^k$ という記号も現れる。これは被約ホモロジー $\tilde{H}_k$ と同様に、0次元だけを少し調整した被約コホモロジーである。正の次数では通常のコホモロジーと同じなので、本書では主に $\tilde{H}^0$ が出る場合だけ注意すればよい。

復習：被約ホモロジーと連結成分

被約ホモロジー $\tilde{H}_k$ は、 $k \geq 1$ では通常の H_k と同じであり、0次だけが異なる。空間 X の連結成分の個数を c とすると

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^c, \quad \tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}^{c-1}$$

である。特に「 X が連結 $\iff \tilde{H}_0(X) = 0$ 」であり、「 X が2つの成分をもつ $\iff \tilde{H}_0(X) \cong \mathbb{Z}$ 」である。コホモロジー側も同様で、 $\tilde{H}^0(X) \cong \mathbb{Z}^{c-1}$ となる。どちらの場合も、 $\tilde{H}_0$ と $\tilde{H}^0$ は連結成分の個数から決まる自由アーベル群であり、トーションをもち得ない。この一点が、次節の非埋め込み性の証明の急所になる。

7.13 アレクサンダー双対性

マイヤー・ヴィトリス完全系列は、 S^3 を部分多様体と外部に分けたときのホモロジーを調べる道具であった。これと並ぶ基本定理が、アレクサンダー双対性である。前節で見たように、コホモロジーはホモロジーを双対化した不変量であり、サイクルを測る量と考えられる。アレクサンダー双対性は、球面内の部分空間 A のコホモロジーと、その補空間 $S^n - A$ のホモロジーを結びつける。

定理 7.13 (アレクサンダー双対性). $A \subset S^n$ を有限単体的複体と同相なコンパクト部分空間で、空でなく、 S^n 全体でもないものとする。このとき、任意の i について自然な同型

$$\tilde{H}_i(S^n - A; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^{n-i-1}(A; \mathbb{Z})$$

が成り立つ。

$n = 3$ の場合、特に次の情報が得られる。

$$\tilde{H}_0(S^3 - A) \cong \tilde{H}^2(A), \quad H_1(S^3 - A) \cong H^1(A).$$

第一の同型は、 A が S^3 をいくつの領域に分けるかを $H^2(A)$ が支配することを示す。第二の同型は、補空間の一次ホモロジーが、 A の一次コホモロジーによって支配されることを示す。

直観：アレクサンダー双対性の使い方の型

使い方はいつも次の3段階である。

1. 取り除く空間 A のホモロジー $H_*(A)$ を求める (A はグラフや閉曲面など、よく知った空

間であることが多い)。

2. 普遍係数定理でコホモロジー $H^*(A)$ に読み替える (トーションは次数が1つ上がることに注意)。
3. 次数の対応 $i \leftrightarrow n - i - 1$ (両辺の次数の和が $n - 1$) で補空間のホモロジーを読む。

$n = 3$ では、和が2になるように $\tilde{H}_0(S^3 - A) \leftrightarrow \tilde{H}^2(A)$ 、 $H_1(S^3 - A) \leftrightarrow H^1(A)$ 、 $\tilde{H}_2(S^3 - A) \leftrightarrow \tilde{H}^0(A)$ と組になる。重要なのは、右辺が A 自身だけで決まり、 S^3 への埋め込み方によらないことである。これが双対性の威力であると同時に、埋め込み方の違い (結び目の結ばれ方など) はホモロジーでは見えない、という限界も示している。

例 7.14 (グラフの補空間). 有限グラフ $G \subset S^3$ に対して、 $H^2(G) = 0$ である。したがって $\tilde{H}_0(S^3 - G) = 0$ であり、 $S^3 - G$ は連結である。また、 $H_1(S^3 - G) \cong H^1(G)$ である。特に、連結グラフなら $H_1(S^3 - G) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)}$ である。

例 7.15 (閉曲面の補空間). 連結な向き付け可能閉曲面 $F \subset S^3$ では、 $H^2(F) \cong \mathbb{Z}$ である。したがって $\tilde{H}_0(S^3 - F) \cong \mathbb{Z}$ となり、 $S^3 - F$ は2つの連結成分をもつ。これはジョルダン - ブラウアー分離定理のホモロジー的な形である。

具体例: 絡み目の補空間の H_1

m 成分の絡み目 $L \subset S^3$ 、すなわち互いに交わらない m 個の円周の和集合を考える。 L は m 個の S^1 の非交和と同相なので、

$$H_1(L) \cong \mathbb{Z}^m, \quad H^1(L) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m, \quad H^2(L) = 0$$

である。よってアレクサンダー双対性より、 $S^3 - L$ は連結で、 $H_1(S^3 - L) \cong H^1(L) \cong \mathbb{Z}^m$ となる ($m = 1$ の場合は、マイヤー・ヴィートリス完全系列で求めた $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}$ と整合する。外部 $E(K)$ と補空間 $S^3 - K$ はホモトピー同値である)。右辺は埋め込み方によらないので、自明な結び目でも三葉結び目でも H_1 は同じ $\mathbb{Z}$ であり、2成分の自明な絡み目でもホップ絡み目でも同じ $\mathbb{Z}^2$ である。結ばれ方・絡まり方を区別するには、基本群などのより精密な不変量が必要になる。

命題 7.16 (向き付け不可能閉曲面の非埋め込み性). 向き付け不可能閉曲面 N_k は S^3 に埋め込めない。

Proof. N_k が S^3 に埋め込まれたと仮定する。アレクサンダー双対性より $\tilde{H}_0(S^3 - N_k; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}^2(N_k; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。しかし、 $\tilde{H}_0$ は連結成分の個数から定まる自由アーベル群であり、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のようなトーション群にはなり得ない。これは矛盾である。したがって、 N_k は S^3 に埋め込めない。□

注意 7.17. この証明は、 H^2 のトーションが「補空間の成分数」という素朴な量と両立しないことを利用している。第8章で扱う $\mathbb{R}P^2$ ($k = 1$ の場合) のトーション障害は、この現象を正則近傍の側から見たものと考えることができる。

7.14 双対性と多重分岐曲面への準備

多重分岐曲面 X では、 $S^3 - X$ は一般に非連結になる。これは、セクターが空間を仕切るためである。一方、次章で導入する双対グラフ G_X のような 1 次元部分複体については、上の例により $S^3 - G_X$ は連結である。そのため、双対グラフの辺のメリディアンや、ブランチが表すループを、一つの群 $H_1(S^3 - G_X)$ の中で比較できる。

マイヤー・ヴィートリスと双対性の役割分担

マイヤー・ヴィートリス完全系列は、 $S^3 = N \cup E(N)$ のように 3 次元部分多様体と外部を貼り合わせて調べるときに使う。アレクサンダー双対性は、補空間そのもののホモロジーを、取り除いた複体のコホモロジーから読むときに使う。多重分岐曲面の章では、この二つを組み合わせ、正則近傍のトーション障害と、ブランチまわりの関係式を導く。

7.15 発展：ジョルダン閉曲線定理との関係

マイヤー・ヴィートリス完全系列は、ジョルダン閉曲線定理の証明にも現れる。平面に無限遠点を加えて S^2 とし、単純閉曲線 $C \subset S^2$ を考える。 C を 2 つの弧 L_1, L_2 の和に分け、 $A = S^2 - L_1$, $B = S^2 - L_2$ とおくと、 $A \cap B = S^2 - C$ が調べたい補空間になる。

ここで、 $A \cup B = S^2 - (L_1 \cap L_2)$ は S^2 から 2 点を除いた空間であり、円周 S^1 とホモトピー同値である。また、弧の補空間 A, B は連結で、 $H_1(A) = H_1(B) = 0$ であることが示せる（多角線の弧なら A, B は開円板と同相である。一般の弧については別に証明が必要で、ここが証明の本質的な部分である）。これらをマイヤー・ヴィートリス完全系列

$$H_1(A) \oplus H_1(B) \rightarrow H_1(A \cup B) \rightarrow H_0(A \cap B) \rightarrow H_0(A) \oplus H_0(B) \rightarrow H_0(A \cup B) \rightarrow 0$$

に代入すると

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_0(S^2 - C) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

となり、 $H_0(S^2 - C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が得られる。これは、 $S^2 - C$ が 2 つの連結成分をもつことを意味する。したがって、単純閉曲線は球面を 2 つの領域に分ける。これは、ジョルダン閉曲線定理のホモロジー的な証明の骨格である。

7.16 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. 完全系列の定義 $\text{Im} = \text{Ker}$ を説明できる。
2. マイヤー・ヴィートリス完全系列の中心部分を書ける。
3. つなぎ準同型 ∂_* の直感的な役割を説明できる。
4. 球面のホモロジーをマイヤー・ヴィートリス完全系列から導ける。
5. 余核を用いて完全系列を短い完全系列として読み替える考え方を理解する。
6. $S^3 = M \cup E(M)$ にマイヤー・ヴィートリス完全系列を適用できる。

7. $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ を証明できる。
 8. S^3 内のコンパクト 3 次元部分多様体の H_1 がトーションをもたないことを説明できる。

7.17 練習問題

練習問題 7.1. 空間 $X = A \cup B$ に対するマイヤー・ヴィートリス完全系列のうち、 $H_p(X)$ を含む中心部分を、 $H_p(A \cap B)$ から $H_{p-1}(A \cap B)$ まで書け。

練習問題 7.2. 系列が完全であるとはどういう意味か、像と核という言葉を用いて説明せよ。

練習問題 7.3. 短い完全系列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ が完全であるとき、最初の写像が単射で、最後の写像が全射である理由を説明せよ。

練習問題 7.4. n 次元球面 S^n を 2 つの半球で分解することにより、 $p \geq 2$ について $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$ が得られる理由を説明せよ。

練習問題 7.5. 前問の結果から、 $n \geq 1$ に対して

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を導け。

練習問題 7.6. つなぎ準同型 ∂_* は、なぜ「縫い目」を検出する写像と考えられるのか、 S^2 を 2 つの半球に分ける例で説明せよ。

練習問題 7.7. $M \subset S^3$ をコンパクト 3 次元部分多様体、 $E(M) = \overline{S^3 - \text{int } M}$ とする。マイヤー・ヴィートリス完全系列を用いて $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ を示せ。

練習問題 7.8. $M = S^1 \times D^2$ を標準的なソリッドトーラスとする。 $H_1(M)$, $H_1(\partial M)$ を求め、外部もソリッドトーラスである場合に $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ を確認せよ。

練習問題 7.9. 結び目 $K \subset S^3$ の外部 $E(K) = \overline{S^3 - \text{int } N(K)}$ について、 $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}$ であることを説明せよ。

練習問題 7.10. $H_1(M)$ に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 型のトーションがあるとき、なぜ M は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体として埋め込めないのか説明せよ。

練習問題 7.11. マイヤー・ヴィートリス完全系列を用いたジョルダン閉曲線定理の証明では、なぜ $H_0(S^2 - C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を示せば十分なのか説明せよ。

7.18 次章への橋渡し

本章では、マイヤー・ヴィートリス完全系列を導入し、球面のホモロジー計算と S^3 内の部分多様体のホモロジーへの応用を学んだ。次章からは、多重分岐曲面を導入する。多重分岐曲面の正則近傍は 3 次元多様体になるため、本章で得たトーション消滅定理が埋め込み障害として使われる。

第 8 章

多重分岐曲面と S^3 への埋め込み障害

8.1 本章の目標

前章までに、ホモロジー群、マイヤー・ヴィートリス完全系列、そして S^3 に埋め込まれた部分多様体の H_1 に関する制約を学んだ。本章では、これらの道具を用いて、2次元複体の S^3 への埋め込み障害を考える。

グラフの平面性では、クラトフスキーの定理により、 K_5 と $K_{3,3}$ が基本的な障害として現れた。では、次元を一つ上げて、2次元複体を S^3 に埋め込む問題では、どのような障害が現れるだろうか。

本章では、すべての2次元複体を一度に扱うのではなく、**多重分岐曲面**という重要なクラスに注目する。多重分岐曲面は、円周状のブランチに曲面片であるセクターが貼り付いた2次元複体であり、3次元多様体のスパインとしても自然に現れる。

本章の中心的な考え方は次である。

多重分岐曲面が S^3 に埋め込めるなら、その埋め込みから双対グラフが得られ、その正則近傍の一次ホモロジー群にはトーションが現れない。

一方、セクターがブランチに巻き付く様子を代数的次数行列にまとめると、その行列はホモロジーの関係式を表す表示行列になる。したがって、代数的次数行列の余核にトーションが現れることを示せば、もとの多重分岐曲面は S^3 に埋め込めない。つまり、幾何学的な埋め込み問題を、整数行列のミス標準形を調べる問題へ変換する。

本章の目標は次の通りである。

- 多重分岐曲面のブランチ、セクター、プレブランチを復習する。
- セクターがブランチに巻き付く代数的次数を理解する。
- S^3 への埋め込みから双対グラフを作る方法を理解する。
- 補空間のホモロジーに現れる関係式

$$\sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j] + [m_i] = 0$$

を理解する。

- 代数的次数行列が補空間のホモロジーの関係式行列であること、およびその余核による埋め込み障害を理解する。
- 実射影平面や臨界的多重分岐曲面の例を通して、定理の使い方を学ぶ。

重点項目

多重分岐曲面のブランチ・セクター、代数的次数、双対グラフ、基本関係式、代数的次数行列、および「トーションがあれば S^3 に埋め込めない」という結論を中心に扱う。

発展として扱う項目

全域木の取り方による行列の違い、スミス標準形による余核の計算、実射影平面型の例、臨界的多重分岐曲面への応用は発展的内容であり、必要に応じて選択的に読めばよい。

学習の指針

本章で初めて登場する概念は、多重分岐曲面 (ブランチ・セクター・プレブランチ)、代数的次数、双対グラフである。整数行列のスミス標準形は、巻頭の「既習事項の要点」でも触れたが、本章で実際の計算に使う。前提として使うのは、第 7 章のトーション消滅定理 (S^3 内のコンパクト 3 次元部分多様体の H_1 にトーションがない) とアレクサンダー双対性、および第 I 巻のホモロジー計算である (巻頭の既習事項の要点も参照)。はじめて読むときは、まず最後の例である実射影平面 (1×1 行列 [2] から $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が出る) を頭に置き、「幾何の埋め込み問題が整数行列の計算に化ける」という流れを追うとよい。各節の具体例は必ず紙の上で手を動かして確かめること。

8.2 多重分岐曲面の復習

研究ノート：多重分岐曲面を選ぶ理由

多重分岐曲面は、曲面とグラフの中間に位置する対象である。局所的には曲面のように見える部分と、複数の曲面片が集まる分岐部分を同時に持つため、 S^3 への埋め込み障害を調べる際に自然に現れる。本書では、この対象を「複雑な 2 次元複体を扱うための整理された模型」として用いる。

多重分岐曲面とは、大まかに言えば、複数の曲面片が円周状の集合に沿って貼り合わされた 2 次元複体である。通常の曲面では、各点の近くは平面の開集合のように見える。これに対して多重分岐曲面では、特別な円周上で複数の面が集まる。

定義 8.1 (多重分岐曲面). コンパクト空間 X が**多重分岐曲面**であるとは、互いに素な有限個の単純閉曲線 $\ell_1, \dots, \ell_n \subset X$ (これらを**ブランチ**と呼ぶ) が指定されていて、次の 2 条件を満たすことをいう。

1. 各 $x \in \ell_1 \cup \dots \cup \ell_n$ に対し、ある整数 $k \geq 1$ が存在して、 x の開近傍が「 k 本の半直線を 1 点で束ねた図形」と直線の積 $\text{Cone}(k \text{ 点}) \times \mathbb{R}$ と同相である。
2. それ以外の点 x は $\mathbb{R}^2$ と同相な開近傍をもつ。

$X - (\ell_1 \cup \dots \cup \ell_n)$ の各連結成分を**セクター**という。セクター e の閉包 $\bar{e}$ のことも、誤解のおそれがないときはセクターと呼ぶ。

注意：ブランチは「与えられたデータ」である

定義でブランチを X から一意に決まるものとせず、指定されたデータとして扱っている点に注意してほしい。上の条件で $k \geq 3$ のときは l_i 上の点は確かに曲面の点ではないが、 $k = 2$ のときは $\text{Cone}(2 \text{ 点}) \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ なので、局所的には曲面と区別がつかない。それでも l_i をブランチとして指定してよい、という約束にしておく。この約束がないと、たとえば本章の主要例である実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ (円板の境界を 2 対 1 で 1 つの円周に貼り付けたもの) は、どの点も曲面の点なので「ブランチをもたない閉曲面」となってしまう、「ブランチ 1 本・セクター 1 枚」という見方ができなくなる。なお、以下で「 X が向き付け可能である」というときは、各セクターが向き付け可能で、その向きを一つ固定してあることを意味する (代数的次数を定義するのに必要なのはこれだけである。実際 $\mathbb{RP}^2$ 自身は向き付け不可能だが、唯一のセクターである円板は向き付け可能である)。

直観：ブランチのまわりの局所モデル

曲面の点の近くは平面 $\mathbb{R}^2$ の開集合のように見えるが、ブランチ上の点の近くはそうではない。Y 字型 (1 点で 3 本以上の線分が集まった図形) を Y とすると、ブランチ上の点の近傍は $Y \times (-1, 1)$ 、すなわち「本の背に 3 ページ以上が集まった形」の局所モデルをもつ。ブランチに沿って一周すると、この局所モデルが円周状につながっていく (一周する間にページの並びが入れ替わることもある)。「背表紙の円周がブランチ、ページたちがセクター」という絵を常に思い浮かべるとよい。

ブランチを $l_1, \dots, l_n$ と書き、セクターを $e_1, \dots, e_s$ と書くことにする。各セクター e_i は、境界をもつコンパクト曲面 E_i の内部と同相である。その閉包を $\bar{e}_i$ と書く ($\bar{e}_i$ は E_i の境界をブランチに貼り付けた像である)。

セクターの境界成分は、いずれかのブランチに貼り付く。貼り付け前の境界成分を**プレブランチ**という。

例 8.2 (円板が 1 本のブランチに集まる例). 3 枚の円板 D_1, D_2, D_3 の境界を同じ円周 ℓ に貼り付けると、 ℓ がブランチになり、3 枚の円板がセクターになる。ブランチ上の点の近くでは、3 枚の半平面が共通の境界線に沿って集まっているように見える。

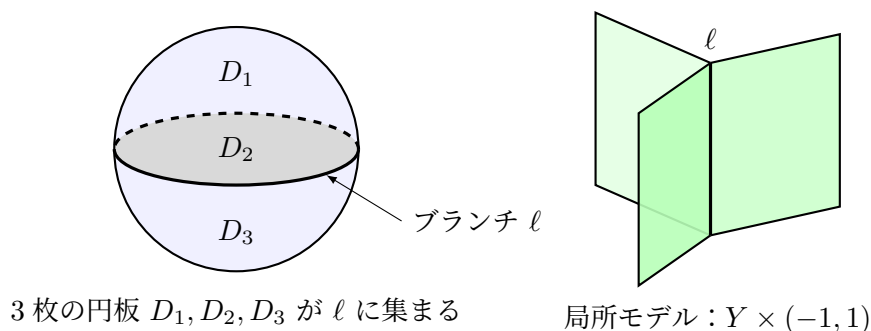


図 8.1 多重分岐曲面の模式図。左は球面を赤道円板で仕切った例で、上半球面 D_1 ・赤道円板 D_2 ・下半球面 D_3 の 3 枚の円板がブランチ ℓ (赤道円) に集まる。右はブランチ上の点の近傍で、セクターが本のページのように ℓ に集まる。

具体例: トーラスと円板からなる多重分岐曲面

S^3 内の標準的なトーラス T^2 の上にメリディアン円周 ℓ を取り、 ℓ を境界とする円板 D をトーラスの内側に貼った複体 $X = T^2 \cup D$ を考える。 ℓ 上の点の近くでは、トーラスの 2 枚の面と円板の 1 枚、合計 3 枚の面が集まるので、 ℓ がただ 1 本のブランチである。セクターは、円板 D と、トーラスを ℓ で切り開いて得られるアニュラス $T^2 - \ell$ の閉包の 2 枚である。プレブランチ (貼り付け前の境界成分) は、 D の境界円が 1 本、アニュラスの境界円が 2 本の、合計 3 本であり、いずれも ℓ に貼り付く。ブランチ 1 本、セクター 2 枚、プレブランチ 3 本、という数え方を自分で確認せよ。

8.3 構成データとしての多重分岐曲面

専門的には、多重分岐曲面は次のデータによって記述される。第一に、有限個のブランチ $\ell_1, \dots, \ell_n$ がある。第二に、有限個のコンパクト曲面 $E_1, \dots, E_s$ があり、それぞれの境界成分がブランチへ貼り付けられる。第三に、各境界成分 $c \subset \partial E_i$ について、貼り付け写像 $c \rightarrow \ell_j$ の次数が指定される。

このデータをまとめると、次の表のようになる。

構成要素	幾何学的意味	代数的に記録する情報
ブランチ ℓ_j	分岐する円周	メリディアン、ロンジチュード
セクター E_i	貼り付く曲面片	種数、境界成分数
プレブランチ c	貼り付け前の境界成分	貼り付き次数、代数的次数
双対グラフ G_X	補空間の部屋の隣接関係	全域木、第一ベッチ数

この表は、以後の議論の地図である。多重分岐曲面の埋め込み問題では、局所的な貼り付き方、セクターの曲面としての型、補空間の双対グラフが同時に現れる。

復習: メリディアンとロンジチュード

第 7 章のソリッドトーラス $V = S^1 \times D^2$ の例を思い出そう。 $\{\text{点}\} \times \partial D^2$ の形の円周、すなわち芯の円周のまわりを小さく 1 回まわる円周を**メリディアン**といい、 $S^1 \times \{\text{点}\}$ の形の、芯に沿って走る円周を**ロンジチュード**という。本章では、円周状のブランチ ℓ_j や双対辺のまわりを小さく 1 回まわる円周を、そのメリディアンと呼ぶ。

8.4 近傍同値と正則近傍

多重分岐曲面を 3 次元多様体の中に入れると、その小さな正則近傍が得られる。同じ多重分岐曲面でも、ブランチのまわりでセクターを並べる順序が違えば、正則近傍が異なることがある。この違いを整理するために、近傍同値という見方が有効である。

補足: 正則近傍

複体 X が 3 次元多様体の中に入っているとき、 X を少しだけ「太らせた」コンパクト 3 次元部分多様体を X の**正則近傍**といい、 $N(X)$ と書く。たとえば $\mathbb{R}^3$ 内のグラフの正則近傍はハンドル体 (取っ手付き球体) である。重要なのは、 $N(X)$ が X に変形レトラクトすること、したがって $H_1(N(X); \mathbb{Z}) \cong H_1(X; \mathbb{Z})$ が成り立つことである。本章の埋め込み障害は、この同型を通して第 7 章のトーション消滅定理を X に適用することで得られる。

定義 8.3 (近傍同値). 多重分岐曲面 X の二つの正則近傍 N_1, N_2 が**近傍同値**であるとは、 X 上では恒等写像を誘導するような同相 $N_1 \rightarrow N_2$ が存在することをいう。

近傍同値を考えると、 X そのものの組合せデータだけではなく、セクターがブランチのまわりにどの巡回順序で配置されるかが重要になる。これは、曲面上のグラフ埋め込みで回転系が重要であったことと対応している。

注意 8.4. 曲面上のグラフでは、頂点のまわりの辺の巡回順序が曲面の種数を決める。多重分岐曲面では、ブランチのまわりのプレブランチの巡回順序が正則近傍の境界成分数や種数を左右する。この意味で、近傍同値は多重分岐曲面版の回転系である。

8.5 代数的次数

多重分岐曲面では、単にどのセクターがどのブランチに貼り付くかだけでなく、**どの向きに何回巻き付くか**が重要である。これを記録する整数が代数的次数である。

セクター e_i の閉包 $\overline{e_i}$ を向き付ける。また、ブランチ l_j にも向きを入れておく。境界 $\partial \overline{e_i}$ のうち、ブランチ l_j に貼り付く部分を考えると、これは向き付き円周から向き付き円周への写像を与える。その符号付き次数を用いて、次を定義する。

定義 8.5 (代数的次数). セクター e_i がブランチ l_j に沿って貼り付くとき、その境界成分が l_j のまわりを符号付きで何回まわるかを表す整数を、 e_i の l_j に関する**代数的次数**といい、 $\text{ade}_{e_i}(l_j)$ と書く。

たとえば、向きがそろって 1 回巻き付けば $\text{ade}_{e_i}(l_j) = 1$ であり、逆向きに 1 回巻き付けば $\text{ade}_{e_i}(l_j) = -1$ である。また、同じ向きに 2 回巻き付けば $\text{ade}_{e_i}(l_j) = 2$ となる。

注意 8.6. 本章の前半で出てきた「貼り付き次数」は、向きを忘れた正の整数であった。本章の代数的次数は向きを反映するため、正負の符号をもつ。埋め込み障害を行列で表すには、この符号付きの情報が重要になる。

具体例: アニュラスの代数的次数を数える

アニュラス (円環) A の 2 本の境界円を、どちらも同じブランチ l に 1 回ずつ貼り付けるとする。 A と l に向きを固定すると、各境界円の符号付き次数は $+1$ か -1 である。

- 2 本とも l と同じ向きに貼り付くとき、 $\text{ade}_A(l) = 1 + 1 = 2$ 。

- 一方が同じ向き、他方が逆向きに貼り付くとき、 $\text{ade}_A(\ell) = 1 - 1 = 0$ 。

どちらの場合も、向きを忘れた貼り付き次数は「2回貼り付く」で同じである。先の例 $X = T^2 \cup D$ では、向き付けたトーラスを切り開いたアニュラスの2本の境界円は ℓ に互いに逆向きに貼り付くので、アニュラスの代数的次数は0、円板 D の代数的次数は ± 1 となる。

8.6 埋め込みから双対グラフを作る

ここから、 X が S^3 に埋め込まれていると仮定する。この仮定から、埋め込みの周囲に双対グラフという組合せ的な対象を作る。

定義 8.7 (双対グラフ). 多重分岐曲面 $X \subset S^3$ に対し、双対グラフ G_X を次のように定める。

1. $S^3 - X$ の各連結成分に対して、 G_X の頂点を1つ置く。
2. 2つの連結成分がセクター e_i をはさんで隣り合うとき、対応する2頂点を辺 e_i^* で結ぶ。

直感的には、 X が S^3 をいくつかの「部屋」に分けているとき、各部屋を点で表し、セクターを通して隣り合う部屋どうしを辺で結んだものが双対グラフである。

注意 8.8. 双対グラフは、平面グラフに対する双対グラフの3次元版と考えると分かりやすい。平面グラフでは、面を頂点に置き換え、辺を横切って双対辺を引く。ここでは、 $S^3 - X$ の領域を頂点に置き換え、セクターを横切って双対辺を引いている。

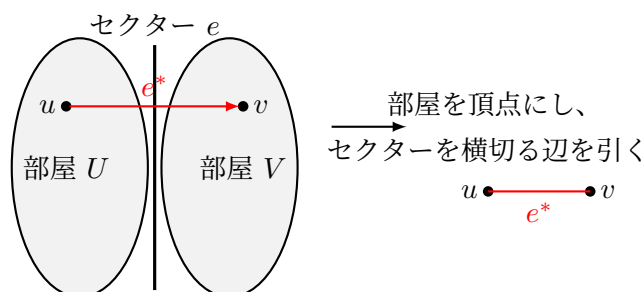


図 8.2 双対グラフの作り方。補空間の部屋を頂点にし、セクターを横切る双対辺を引く。

具体例: 球面と赤道円板の双対グラフ

S^3 内の球面 S^2 に、その赤道円 ℓ を境界とする赤道円板を貼った多重分岐曲面 $X = S^2 \cup D$ を考える。ブランチは赤道円 ℓ の1本、セクターは上半球面・下半球面・赤道円板の3枚である。補空間 $S^3 - X$ の部屋は、上半球の内側、下半球の内側、球面の外側の3個である。上半球面は「上の部屋」と「外側」を隔て、下半球面は「下の部屋」と「外側」を隔て、赤道円板は「上の部屋」と「下の部屋」を隔てる。したがって双対グラフ G_X は、頂点3個と辺3本からなる三角形である。

双対グラフ G_X の全域木を T とする。 G_X の辺のうち T に含まれないものは、 G_X の独立な閉路に対応する。その本数を $m = \beta_1(G_X)$ と書く。この m が、後で出てくる代数的次数行列の行数に

なる。

復習: 全域木と第一ベッチ数

連結グラフ G の全域木 T とは、 G のすべての頂点を含み、閉路をもたない部分グラフである。第 I 巻で見たように、頂点数 V 、辺数 E の連結グラフでは、全域木の辺数は $V - 1$ であり、木に含まれない辺の本数は $\beta_1(G) = E - V + 1$ に等しい。これが G の独立な閉路の個数 (第一ベッチ数) である。先ほどの三角形の双対グラフでは $V = 3, E = 3$ なので、 $\beta_1(G_X) = 3 - 3 + 1 = 1$ である。たとえば上下の半球面に対応する 2 辺を全域木 T に取ると、木に含まれない辺は赤道円板に対応する 1 本で、 $m = 1$ となる。

8.7 メリディアンとホモロジーの関係式

T に含まれない双対辺を $e_1^*, \dots, e_m^*$ とし、それぞれが横切るセクターを $e_1, \dots, e_m$ と書く。各双対辺 e_i^* に対して、その近くに小さなメリディアン円周 m_i を取る。これは、双対辺を一回まわる小さな円周である。

なぜ $S^3 - X$ ではなく $S^3 - G_X$ を見るか

X 自身の補空間 $S^3 - X$ は、セクターが空間を分けるため、一般には非連結になり得る。そのため、異なる部屋にあるループどうしを $H_1(S^3 - X)$ の中で比較することはできない。一方、双対グラフ G_X は X とセクターの内部の有限個の点で交わるだけの 1 次元複体なので、 $S^3 - G_X$ は連結であり、ブランチ ℓ_j はすべて $S^3 - G_X$ の中の閉曲線になっている。したがって、各双対辺のメリディアン $[m_i]$ と各ブランチが表す類 $[\ell_j]$ を、同じ $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z})$ の元として扱える。

このとき、補空間 $S^3 - G_X$ の 1 次ホモロジー群の中で、次の関係式が成り立つ。

定理 8.9 (基本関係式). X が S^3 に埋め込まれているとする。上の記号のもとで、 $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z})$ において、各 $i = 1, \dots, m$ に対して

$$\sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j] + [m_i] = 0$$

が成り立つ。

証明の考え方. 双対辺 e_i^* はセクター e_i とただ 1 点 p_i で横断的に交わり、他の双対辺は e_i と交わらないとしてよい。 e_i の中に p_i を中心とする小さな円板 δ_i を取ると、その境界 $\partial\delta_i$ は双対辺 e_i^* を 1 回まわる円周であるから、これをメリディアン m_i として採用できる (向きは下の式が成り立つように選ぶ)。

セクターを与えるコンパクト曲面 E_i から δ_i の内部を除いた曲面を F_i とする。 F_i は向き付けられたコンパクト曲面で、その境界は ∂E_i と $\partial\delta_i$ からなる。貼り付け写像 $f_i: E_i \rightarrow X \subset S^3$ を F_i に制限すると、像は G_X と交わらないので、写像 $F_i \rightarrow S^3 - G_X$ が得られる。曲面の境界全体はその曲

面の中で 0 にホモログスであるから、 $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z})$ において

$$(f_i)_*[\partial E_i] + [m_i] = 0$$

が成り立つ。

∂E_i の各成分 (プレブランチ) は、いずれかのブランチ ℓ_j に符号付きで何回か巻き付く。それらを ℓ_j ごとに合計したものが代数的次数 $\text{ade}_{e_i}(\ell_j)$ であるから、

$$(f_i)_*[\partial E_i] = \sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j]$$

となる。したがって、

$$\sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j] + [m_i] = 0$$

を得る。全域木 T に属する双対辺が横切るセクターについても同様の関係式が成り立つが、その場合のメリディアンは $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z})$ の中で T に属さない辺のメリディアンたちの整数結合で表される。本章では、基底をなすメリディアンに対応する m 本の関係式だけを用いる。□

復習: グラフの補空間の一次ホモロジー

第 7 章のアレクサンダー双対性より、 S^3 内の連結な 1 次元複体 (グラフ) G に対して $H_1(S^3 - G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)}$ が成り立つ。さらに、 G の全域木に含まれない各辺のメリディアンたちが、この自由アーベル群の基底を与える。本章では $G = G_X$ に適用して、 $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$ がメリディアン $[m_1], \dots, [m_m]$ を基底にもつことを使う。

この式の意味は単純である。

セクターの境界がブランチたちに巻き付く量と、双対辺をまわるメリディアンが、ホモロジー的に釣り合っている。

8.8 代数的次数行列

上の関係式を行列でまとめる。ブランチを $\ell_1, \dots, \ell_n$ とし、全域木 T に含まれない双対辺に対応するセクターを $e_1, \dots, e_m$ とする。

定義 8.10 (代数的次数行列). $m \times n$ 行列 $A_T = (a_{ij})$ を $a_{ij} = \text{ade}_{e_i}(\ell_j)$ によって定める。この行列を、全域木 T に関する**代数的次数行列**という。

このとき、先ほどの関係式は、形式的に

$$A_T \begin{pmatrix} [\ell_1] \\ \vdots \\ [\ell_n] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [m_1] \\ \vdots \\ [m_m] \end{pmatrix} = 0$$

と書ける。

具体例: 球面と赤道円板の代数的次数行列

球面と赤道円板の例 $X = S^2 \cup D$ で代数的次数行列を書いてみよう。ブランチは赤道円 ℓ の1本 ($n = 1$)、全域木に含まれない双対辺は赤道円板 D に対応する1本 ($m = 1$) であった。 D の境界は ℓ にちょうど1回巻き付くので、向きを適切に選べば $\text{ade}_D(\ell) = 1$ であり、 $A_T = [1]$ という 1×1 行列になる。基本関係式は $[\ell] + [m_1] = 0$ 、すなわち $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の中で赤道円 ℓ はメリディアン m_1 の逆元と一致する。 $\text{Coker}[1] = 0$ なのでトーションは現れず、 X が実際に S^3 に埋め込まれていることと矛盾しない。

8.9 代数的次数行列とホモロジー群

ここで一度、代数的次数行列の意味を整理しておく。代数的次数行列 A_T は、ホモロジー群そのものではない。むしろ、ホモロジー群を計算するときに現れる**関係式行列**、あるいは**表示行列**である。

直感的には、 A_T の各成分は、セクターの境界がブランチに何回、どの向きで巻き付くかを表している。一方、ホモロジーの立場から見ると、セクターの境界は境界として消えるべき1サイクルである。したがって、セクターの境界がブランチ上に作る線形結合は、一次ホモロジー群の中で関係式になる。この関係式をまとめたものが A_T である。

A_T を $m \times n$ 行列と見て、準同型

$$f_{A_T} : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m, \quad x \longmapsto A_T x$$

を定める。このとき

$$P_T(X) = \text{Coker } f_{A_T} = \mathbb{Z}^m / A_T \mathbb{Z}^n$$

を、 A_T が表示するアーベル群と呼ぶことにする。ここで重要なのは、 $P_T(X)$ が A_T の行基本変形・列基本変形で変わらないことである。したがって、 A_T をスミス標準形に直せば、 $P_T(X)$ の自由部分とトーション部分を読み取ることができる。

復習: 余核

準同型 $f : A \rightarrow B$ の**余核**とは、商群 $\text{Coker } f = B / \text{Im } f$ のことである (第7章の「余核と短い完全系列」の節も参照)。たとえば $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$ の余核は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2, x \mapsto (x, 0)$ の余核は $\mathbb{Z}$ である。余核は「 B の元を、 f の像に入る分だけ0とみなして残るもの」を測る。

代数的次数行列の正しい見方

代数的次数行列 A_T は、ホモロジー群そのものではない。 A_T は、セクター境界が作るホモロジーの関係式のうち、全域木 T に属さない双対辺に対応するセクターから来るものだけを並べた整数行列である。 X が S^3 に埋め込まれていれば、後述のように A_T は整数係数の右逆行列をもつ。すなわち $\text{Coker } A_T = 0$ でなければならない。特に $\text{Coker } A_T$ にトーションが現れれば、 X は S^3 に埋め込めない。

もう少し詳しく述べる。 X をセル複体として見ると、1次元部分にはブランチ方向のサイクルがあり、2次元部分にはセクターがある。各セクターの境界は、ブランチ上を何回か巻き付く。ホモロジー

では、2次元セルの境界は1次元サイクルの関係式を与える。したがって、鎖複体

$$C_2(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X; \mathbb{Z})$$

のうち、セクター境界からブランチ方向へ向かう部分を取り出すと、**すべてのセクター**の代数的次数を並べた行列（接続行列 M_X ）が現れる。 $H_1(X; \mathbb{Z})$ そのものは、この M_X から計算できる（[14]、第12章の「ホモロジーによる補助的な検出」の節も参照）。

注意： A_T と M_X を混同しないこと

代数的次数行列 A_T は、全域木 T に属さない双対辺に対応するセクターの行だけを取り出した M_X の部分行列であって、 $H_1(X; \mathbb{Z})$ の表示行列そのものではない。したがって「 $\text{Coker } A_T$ にトーションがあれば $H_1(X; \mathbb{Z})$ にもトーションがある」と結論することはできない。 $\text{Coker } A_T$ が S^3 への埋め込み障害を与える理由は、 $H_1(X)$ のトーション消滅ではなく、次に述べる**右逆行列の存在**である。（もちろん、 M_X から $H_1(X; \mathbb{Z})$ を計算してトーションが見つければ、第7章のトーション消滅定理から直接、非埋め込み性が従う。これは別ルートの障害である。）

本章の判定定理の正確な論法は次の通りである（[13]）。 X が S^3 に埋め込まれているとすると、基本関係式により、全域木 T に属さない各辺のメリディアン類 $[m_i]$ は、ブランチ類 $[l_j]$ の整数結合で表される。これらのメリディアン類は $H_1(S^3 - G_X) \cong \mathbb{Z}^m$ の基底をなすので、この表示は、 $m \times n$ 行列 A_T が整数係数の右逆行列をもつことを意味する。整数行列が右逆行列をもつことは、 $m \leq n$ かつ A_T の m 次小行列式全体の最大公約数が1であることと同値である。したがって、対偶を取れば次を得る：

X の可能な双対グラフと全域木のどれをとっても、
 $m > n$ であるか、または m 次小行列式の最大公約数が1でなければ、
 X は S^3 に埋め込めない。

（ A_T の階数が m より小さいときは m 次小行列式がすべて0になるので、「最大公約数が1でない」にはこの場合も含まれる。）これは $\text{Coker } A_T = 0$ と同値な条件であり、特に $P_T(X)$ に $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ($d \geq 2$) 型のトーションが現れる場合や、 $P_T(X)$ に自由部分が残る場合（たとえば $m > n$ の場合）は、いずれも X は S^3 に埋め込めない。

「可能な双対グラフのすべて」について

双対グラフ G_X と全域木 T は、埋め込みが与えられて初めて決まる。したがって非埋め込み性を実際に示すには、 X から組合せ的に作れる「あり得る双対グラフ」を全部並べ、そのどれについても上の条件が破れることを確かめる必要がある（[13]）。本章の例のように、双対グラフが本質的に一通りしかない場合には、この確認は自動的である。

なお、これとは独立に、 X が S^3 に埋め込まれるなら、その正則近傍 $N(X)$ は S^3 のコンパクト3次元部分多様体であり、 $N(X)$ は X に変形レトラクトする。第7章で述べたトーション消滅定理より、 $H_1(N(X); \mathbb{Z})$ はトーションをもたない。よって

$$H_1(X; \mathbb{Z}) \cong H_1(N(X); \mathbb{Z})$$

もトーションをもたない。これが、ホモロジーのトーションによる (A_T を経由しない) もう一つの埋め込み障害である。

本章の中心原理

多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込めるなら、その埋め込みから定まる双対グラフと全域木について、代数的次数行列 A_T は整数係数の右逆をもつ、すなわち $P_T(X) = \text{Coker } A_T = 0$ でなければならない。したがって、 $\text{Coker } A_T \neq 0$ 、たとえばそこに $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ($d \geq 2$) 型の成分が現れれば、 X は S^3 に埋め込めない。

この形で述べると、代数的次数行列の役割がはっきりする。 A_T は、ホモロジー群を直接「表す」行列ではなく、補空間 $S^3 - G_X$ のホモロジーの中で成り立つ関係式を並べた行列である。その余核を計算し、スミス標準形を用いれば、右逆が存在するかどうかを機械的に判定できる。

注意 8.11 (右逆条件と余核のトーション). A_T が整数係数の右逆をもつことと $\text{Coker } A_T = 0$ は同値である。したがって埋め込み可能性の必要条件は「余核が完全に消えること」であって、「余核にトーションがないこと」よりも真に強い。実際、 $m > n$ のときは余核に自由部分 $\mathbb{Z}^{m-n}$ 以上が残るので、トーションが無くても障害になる。本書では、判定を実行するときに計算しやすい形として、まずスミス標準形の対角成分に $2, 3, \dots$ が現れないか (トーション) を見るが、対角成分の個数が m に満たない場合 (階数落ち) も同じく障害であることを忘れないでほしい。

8.10 例題：スミス標準形によるトーション判定

ここでは、代数的次数行列からトーションが現れる様子を、実際の行基本変形・列基本変形で確認する。

例 8.12 ((厳密) : 4×4 行列のスミス標準形). 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が、ある多重分岐曲面の接続行列として現れたとする。この行列で定義されるアーベル群のトーション部分を求める。

まず、第1行を4つの行の和に置き換える。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

次に、第2、第3、第4列から第1列を引く。

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

第 2、第 3、第 4 行を符号調整し、さらに第 1 列の下の方の 1 を列基本変形で消去すると、スミス標準形 $\text{diag}(1, 1, 1, 3)$ が得られる。したがって、この 4×4 行列が定める準同型 $\mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^4$ の余核は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である ($\det = -3 \neq 0$ なので余核は有限群である)。これを接続行列と見て、さらに自由部分 $\mathbb{Z}^4$ が別に加わる状況なら、最終的に $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4$ となる。特に $H_1(X)$ にトーション $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が現れるため、第 7 章のトーション消滅定理と合わせると、対応する正則近傍は S^3 に埋め込めない。

計算のコツ

スミス標準形では、行基本変形と列基本変形の両方を整数係数で行ってよい。目標は、対角成分以外を消し、対角成分が順に割り切る形にすることである。対角成分のうち 1 はトーションを生まない。2, 3, ... が現れたとき、それぞれ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \dots$ 型のトーションを意味する。

ここで重要なのは、この計算が単なる行列計算ではなく、埋め込みの必要条件を検証しているという点である。スミス標準形に 3 が現れたことは、余核に $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が現れる、すなわち $\text{Coker} \neq 0$ であることを意味し、右逆は存在しない。なお、この行列を接続行列 M_X (全セクターの代数的次数を並べた行列) と見るなら、同じ計算は $H_1(X; \mathbb{Z})$ のトーション $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を与え、第 7 章のトーション消滅定理からも非埋め込み性が従う。どちらの読み方をしているのかを、そのつど意識してほしい。

8.11 代数の補題

次の補題が、代数的次数行列から余核のトーションを読み取る鍵である。

補題 8.13 (スミス標準形と余核). 整数行列 A によって準同型 $f_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ が定まっているとする。 A のスミス標準形を

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0), \quad d_i > 0, \quad d_i \mid d_{i+1}$$

とする。このとき

$$\text{Coker } f_A \cong \mathbb{Z}^{m-r} \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

である。ただし $d_i = 1$ の項は自明群なので省略してよい。特に、 $\text{Coker } f_A$ がトーションをもつことと、ある i について $d_i \geq 2$ となることは同値である。

証明の考え方. 整数係数の行基本変形と列基本変形は、それぞれ $\mathbb{Z}^m$ と $\mathbb{Z}^n$ の基底を取り替えているだけである。したがって、これらの操作を行っても余核は同型を除いて変わらない。スミス標準形まで変形すると、準同型は

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (d_1 x_1, \dots, d_r x_r, 0, \dots, 0)$$

という形になる。この余核は、最初の r 個の成分で d_i 倍を 0 とする関係を課し、残りの $m - r$ 個の成分は自由に残すので、上の分解を得る。 $\square$

注意 8.14 (最大小行列式との関係). A の階数が m 、すなわち $f_A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ が有理数係数では全射である場合には、 $\text{Coker } f_A$ は有限群である。このとき $\text{Coker } f_A = 0$ であることは、 A のすべての m 次小行列式の最大公約数が 1 であることと同値である。これは f_A が整数係数で右逆をもつこととも同値である。

一方、階数 r が m より小さい場合、 $\text{Coker } f_A$ には自由部分 $\mathbb{Z}^{m-r}$ が現れる。このときも $\text{Coker } f_A \neq 0$ であり、 f_A は右逆をもたないから、次節の判定定理によりやはり S^3 への埋め込み障害になる (m 次小行列式がすべて 0 になる場合である)。まとめると、スミス標準形の対角成分に 1 以外のもの (2, 3, ... または 0) が現れるか、 $m > n$ であれば、 $\text{Coker } f_A \neq 0$ である。

8.12 埋め込み不可能性の判定定理

以上を組み合わせると、次の判定条件が得られる。

定理 8.15 (代数的次数行列による埋め込み障害). X を連結コンパクトな多重分岐曲面で、各セクターが向き付け可能なものとする。 X が S^3 に埋め込まれたと仮定し、そのときの双対グラフ G_X と全域木 T に関する代数的次数行列を A_T ($m \times n$ 行列、 $m = \beta_1(G_X)$ 、 n はブランチの本数) とする。

このとき、 A_T が定める準同型 $f_{A_T} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$ は整数係数の右逆をもつ。とくに、その余核

$$P_T(X) = \text{Coker } f_{A_T}$$

は 0 である。

したがって、 X から組合せ的に作り得るどの双対グラフ・どの全域木についても $P_T(X) \neq 0$ となるならば、 X は S^3 に埋め込めない。特に $P_T(X)$ に非自明な有限巡回群 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ($d \geq 2$) が直和因子として現れる場合や、 $m > n$ の場合が、これに当たる。

Proof. X が S^3 に埋め込まれているとする。基本関係式より、各 $i = 1, \dots, m$ について

$$[m_i] = - \sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j]$$

が $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z})$ の中で成り立つ。一方 $H_1(S^3 - G_X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^m$ であり、 $[m_1], \dots, [m_m]$ はその基底である。そこで各 $[\ell_j]$ をこの基底で $[\ell_j] = \sum_{k=1}^m b_{jk}[m_k]$ と表し、 $B = (b_{jk})$ ($n \times m$ 行列) とおく。上の式に代入すると、任意の i について

$$[m_i] = - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) [m_k]$$

となる。 $[m_1], \dots, [m_m]$ は基底だから係数を比較して $A_T(-B) = I_m$ を得る。すなわち $-B$ は A_T の整数係数の右逆行列であり、 f_{A_T} は全射、したがって $\text{Coker } f_{A_T} = 0$ である。□

注意 8.16. この定理を「 $\text{Coker } A_T$ のトーションが $H_1(X; \mathbb{Z})$ のトーションを与えるから」と説明したくなるが、それは正当化されない。 A_T は $H_1(X; \mathbb{Z})$ の表示行列ではなく、全セクターの代数的次数を並べた接続行列 M_X の一部分 (全域木に属さない双対辺に対応する行) にすぎないからである。上の証明のように、 $H_1(X; \mathbb{Z})$ を経由せず、補空間 $S^3 - G_X$ のホモロジーの中で直接議論するのが正しい。

具体例: 判定定理を最後まで実行する

ある多重分岐曲面で、 $n = 2$ 本のブランチと $m = 2$ 本の木に含まれない双対辺から

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

が得られたとしよう。第 2 行から第 1 行の 3 倍を引き、次に第 2 列から第 1 列の 2 倍を引くと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となり、符号を調整すればスミス標準形 $\text{diag}(1, 2)$ を得る。よって $P_T(X) = \text{Coker } A_T \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ にトーションが現れるので、この多重分岐曲面は S^3 に埋め込めない。小行列式の言葉では、2 次小行列式は $\det A_T = -2$ のみで、その最大公約数が $2 \geq 2$ であることに対応している。

この定理は、 S^3 への埋め込み可能性という幾何学的な問題を、整数行列のスミス標準形を計算する問題に変換している。具体的には、 A_T のスミス標準形の対角成分がすべて 1 で、かつ $m \leq n$ であるかどうかを調べればよい。

8.13 例：実射影平面

実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ は、2 次元複体として見ると、1 本のブランチと 1 枚のセクターからなる多重分岐曲面として表せる。 $\mathbb{RP}^2$ が S^3 に埋め込めたと仮定して、双対グラフを考える。セクターは円板 1 枚で、その境界はブランチに 2 回巻き付く。このときブランチの近傍で $\mathbb{RP}^2$ はメビウスの帯になっており、ブランチのまわりを半周すると円板の表側から裏側へ移ることができる。したがって円板の両側は同じ部屋であり、双対グラフ G_X は頂点 1 個とループ 1 本からなる。よって $m = \beta_1(G_X) = 1$ 、 $n = 1$ であり、代数的次数行列は $A_T = [2]$ である。この行列が定める準同型は $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x$ である。したがって $\text{Coker } A_T \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、トーションが現れる。判定定理より $\mathbb{RP}^2 \not\hookrightarrow S^3$ である。

復習: 実射影平面とそのホモロジー

実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ は、円板 D^2 の境界円上の対蹠点どうしを同一視して得られる閉曲面であった。言い換えれば、円板の境界を 2 対 1 の写像で円周に貼り付けたものである。第 I 巻で計算したように $H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、本節の $\text{Coker } A_T \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ はまさにこのトーションを再現している (巻頭の既習事項の要点も参照)。

注意 8.17. 実射影平面が S^3 に埋め込めないことは、向き付け不可能閉曲面は向き付け可能 3 次元多様体に両側的に埋め込めない、という観点からも理解できる。本章の方法は、それを代数的次数行列の余核に現れるトーションという計算可能な形で検出している。

8.14 実射影平面の詳細な読み方

実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ を多重分岐曲面として見るには、円板 D^2 の境界を、同じ向きに 2 周する 2 対 1 の写像で一つの円周へ貼り付けると考える。このときブランチは 1 本、セクターは 1 枚である。プレ

ブランチは円板の境界 ∂D^2 であり、これがブランチのまわりを2回まわる。したがって、代数的次数行列は $[2]$ になる。

この例では、対応する準同型は $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$ である。この準同型の余核は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。言い換えれば、代数的次数行列の余核に位数2のトーションが残る。このトーションが、 $\mathbb{R}P^2$ の S^3 への埋め込みを妨げている。

例 8.18 (次数 p の一行列の読み方). 一つのセクターの境界が一つのブランチに p 回巻き付く多重分岐曲面を考える。代数的次数行列は $[p]$ である。 $p = \pm 1$ なら準同型は同型であり、この行列だけからは障害は出ない。一方、 $|p| \geq 2$ なら余核に $\mathbb{Z}/|p|\mathbb{Z}$ が現れるため、 S^3 への埋め込みには障害が生じる。

8.15 臨界的複体への応用

この判定定理は、単に埋め込めない例を見つけるだけでなく、クラトフスキーの定理における K_5 や $K_{3,3}$ のような**最小の障害**を探すためにも使える。

定義 8.19 (臨界的複体 (暫定版)). 2次元複体 X が S^3 に関して**臨界的**であるとは、 X 自身は S^3 に埋め込めないが、任意の一点を取り除いた空間 $X - x$ は S^3 に埋め込めることをいう。

注意：この定義は暫定的である

「一点を取り除く」という素朴な定義には難点がある。 X がコンパクトでも $X - x$ はコンパクトでなくなり、有限単体的複体として扱えないからである。第11章では、この点を修正して、十分細かい重心細分の中で単体の**開星状近傍**を取り除く形の定義に置き換える。さらに第13章では、削除操作に依存しない「埋め込み型の半順序における極小性」という定義を導入する。本章では、まず素朴な形で臨界性の気分をつかんでおけばよい。

直観：臨界的という条件

グラフの平面性における K_5 を思い出そう。 K_5 は平面に埋め込めないが、どの辺を1本取り除いても平面に埋め込める。つまり K_5 は「埋め込めないもののうち、これ以上小さくできない」障害である。臨界的複体はその2次元版であり、「どの一点を取り除いても S^3 に埋め込めるようになる」という意味で、埋め込み障害としてぎりぎりの大きさをもつ。埋め込めないことは代数 (トーション) で示し、一点を除けば埋め込めることは幾何 (はめ込みの構成) で示す、と役割が分かれる点に注意しよう。

多重分岐曲面のある族では、代数的次数行列の行列式が $|\det A_T| = n - 1$ の形になる。 $n \geq 3$ ならこの値は2以上なので、 $\text{Coker } A_T$ は非自明 (有限トーション) となり、判定定理から S^3 に埋め込めない。一方で、自己交差が一つの小さな円板に集まるようなはめ込みを構成し、その円板の中心点を取り除くことで、残りは S^3 に埋め込めることを示す。このようにして、臨界的な多重分岐曲面の具体例が得られる。

注意 8.20. ここでの方針は、非埋め込み性を代数的障害で示し、最小性を幾何学的な構成で示す、と

いう二段階である。この考え方は、後の臨界的複体の章で重要になる。

8.16 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. 多重分岐曲面を、ブランチとセクターからなる 2 次元複体として説明できる。
2. 貼り付き次数と代数的次数の違いを説明できる。
3. S^3 への埋め込みから双対グラフ G_X を構成できる。
4. 双対グラフの全域木と、 $m = \beta_1(G_X)$ の意味を説明できる。
5. 関係式

$$\sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j] + [m_i] = 0$$

の幾何学的意味を説明できる。

6. 代数的次数行列 A_T を定義できる。
7. 代数的次数行列の余核とスミス標準形による埋め込み不可能性の判定条件 ($\text{Coker } A_T = 0$ が必要) を説明できる。
8. 実射影平面の例で、 $A_T = [2]$ から非埋め込み性を導ける。

8.17 練習問題

練習問題 8.1. 多重分岐曲面におけるブランチ、セクター、プレブランチをそれぞれ説明せよ。

練習問題 8.2. 貼り付き次数と代数的次数の違いを説明せよ。特に、向きが反対の場合に代数的次数がどのように変わるか述べよ。

練習問題 8.3. 多重分岐曲面 $X \subset S^3$ が与えられたとき、双対グラフ G_X をどのように構成するか説明せよ。

練習問題 8.4. 基本関係式

$$\sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j] + [m_i] = 0$$

の各項が何を表しているか説明せよ。

練習問題 8.5. 整数行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が定める準同型 $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ を考える。 $\text{Coker } A$ を求め、この行列が埋め込み障害を与える理由を説明せよ。

練習問題 8.6. ブランチの数が $n = 2$ 、双対グラフの第一ベッチ数が $m = 3$ である多重分岐曲面があるとする。このとき $\text{Coker } A_T$ がどうなるかを述べ、判定定理から何が結論できるか説明せよ。また「余核の自由部分はトーションではないから障害にならない」という考えがなぜ誤りかを述べよ。

練習問題 8.7. 実射影平面を、代数的次数行列 [2] をもつ多重分岐曲面とみなす。本章の判定定理を用いて、 $\mathbb{RP}^2$ が S^3 に埋め込めないことを説明せよ。

練習問題 8.8. 臨界的複体とは何か説明せよ。また、非埋め込み性を代数的障害で示し、最小性を幾何学的構成で示す、という方針を説明せよ。

8.18 次章への橋渡し

本章では、多重分岐曲面の S^3 への埋め込み問題を、双対グラフと代数的次数行列を用いて調べる方法を学んだ。代数的次数行列は、ホモロジー群そのものではなく、セクター境界が作る関係式の表示行列である。その余核、特にトーション部分を計算することで、 S^3 への埋め込み不可能性を検出できる。

次章では、多重分岐曲面の正則近傍の複雑さを測る量として、**種数**を導入する。代数的次数行列が巻き付き方を記録するのに対し、種数は正則近傍の境界の複雑さを記録する。これらを組み合わせることで、多重分岐曲面の埋め込み障害をより立体的に理解できるようになる。

第 9 章

多重分岐曲面の種数

研究ノート：種数を不変量として見る

同じ多重分岐曲面でも、 S^3 への埋め込み方によって正則近傍の境界の種数が変わることがある。したがって、種数は単なる計算量ではなく、埋め込みの自由度を測る不変量として働く。最大種数と最小種数を比較することは、埋め込み型の違いを調べる第一歩である。

学習の指針

本章では、前章で導入した多重分岐曲面 (ブランチ・セクター・貼り付き次数) に厚みを付けて 3 次元的に眺め、その複雑さを「種数」で測る。前提となるのは、第 I 巻のホモロジー群と変形レトラクト (巻頭「既習事項の要点」も参照)、および前章で導入した貼り付き次数である (ハンドル体は第 7 章にも登場した)。正則性と巻き付き数は、貼り付き次数を用いて本章で新たに定義する。初出の概念は、境界種数・近傍種数・ヒーガード分解とヒーガード種数・埋め込み可能種数であり、いずれも「境界に現れる閉曲面の種数」に帰着して複雑さを測る点が共通している。まず通常の曲面で計算を手で確かめてから、多重分岐曲面へ進むとよい。

9.1 本章の目標

前章では、多重分岐曲面の基本用語を導入した。多重分岐曲面は、ブランチとセクターから作られる 2 次元複体であり、その正則近傍は 3 次元多様体になる。したがって、多重分岐曲面を調べるには、2 次元複体としての情報だけでなく、それを厚くした 3 次元多様体の情報も重要になる。

本章では、多重分岐曲面の複雑さを測る量として**種数**を導入する。ここでいう種数は、通常の曲面の種数を拡張したものであり、多重分岐曲面の正則近傍の境界や、それが入る 3 次元多様体のヒーガード種数と密接に関係する。

大まかに言えば、種数は次の問いに答える量である。

この多重分岐曲面を 3 次元的に厚くすると、どれほど複雑な 3 次元多様体になるか。

本章の目標は次の通りである。

- 正則多重分岐曲面の意味を理解する。
- 正則近傍の境界種数を通して、多重分岐曲面の種数を理解する。

- ヒーガード種数との関係を把握する。
- いくつかの簡単な例で種数を計算する。
- 種数が埋め込み障害として働く考え方を理解する。

9.2 通常の曲面の種数

まず、通常の閉曲面の種数を思い出す。向き付け可能閉曲面 Σ_g は、球面に g 個のハンドルを付けた曲面である。この整数 g を、 Σ_g の種数という。

例 9.1. 球面 S^2 の種数は0である。トーラス T^2 の種数は1である。二重トーラスの種数は2である。

向き付け可能閉曲面 Σ_g のオイラー標数は $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ である。したがって、 $g = 1 - \frac{1}{2}\chi(\Sigma_g)$ と表せる。

このように、通常の曲面では、種数は穴の数を表す。ホモロジーで見ると、 $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ であるから、種数 g は第一ホモロジーの階数の半分でもある。

具体例：オイラー標数から種数を求める

トーラス T^2 は正方形の対辺を貼り合わせて得られ、頂点1個、辺2本、面1枚のセル分割をもつ。よって $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$ であり、 $g = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$ となる。同様に、二重トーラスは八角形の辺を貼り合わせて得られ、頂点1個、辺4本、面1枚から $\chi = 1 - 4 + 1 = -2$ 、したがって $g = 1 - \frac{1}{2} \cdot (-2) = 2$ である。このように、種数は貼り合わせの図から機械的に計算できる。

多重分岐曲面の種数も、これと同じく「どれほど穴やハンドルをもつか」を測る量として導入される。ただし、多重分岐曲面は曲面ではないので、そのまま曲面の種数を適用することはできない。そこで、正則近傍を用いる。

9.3 正則近傍の境界種数

多重分岐曲面 X が3次元多様体 M に埋め込まれているとする。その正則近傍を $N(X)$ と書く。 $N(X)$ はコンパクト3次元多様体であり、境界 $\partial N(X)$ は閉曲面の有限和である。

この境界の種数を用いて、 X の3次元的な複雑さを測ることができる。

定義 9.2 (境界種数). N をコンパクト向き付け可能3次元多様体とし、境界成分を $\partial N = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ とする。各 F_i の種数を $g(F_i)$ とするとき、

$$g(\partial N) = \sum_{i=1}^k g(F_i)$$

を、 N の境界種数という。

復習：ハンドル体

種数 g のハンドル体 H_g とは、3次元球体 B^3 に g 本の取っ手 (1 ハンドル $D^2 \times [0, 1]$) を付けて得られるコンパクト 3次元多様体である。 $H_0 = B^3$ 、 $H_1 = S^1 \times D^2$ (ソリッドトーラス) であり、一般に境界は $\partial H_g = \Sigma_g$ となる。第 7 章でも、 S^3 のコンパクト 3次元部分多様体の典型例として登場した。

例 9.3. $N = B^3$ なら、 $\partial N = S^2$ なので $g(\partial N) = 0$ である。

例 9.4. $N = S^1 \times D^2$ がソリッドトーラスなら、 $\partial N = T^2$ であるから $g(\partial N) = 1$ である。

例 9.5. N が種数 g のハンドル体 H_g なら、 $\partial N = \Sigma_g$ であるから $g(\partial N) = g$ である。

具体例：厚み付き曲面とハンドル体の違い

同じ「種数 2」に関係する立体でも、境界種数は異なり得る。ハンドル体 H_2 の境界は Σ_2 が 1 つなので $g(\partial H_2) = 2$ である。一方、厚み付き曲面 $\Sigma_2 \times [-1, 1]$ の境界は $\Sigma_2 \sqcup \Sigma_2$ なので、境界種数は $2 + 2 = 4$ である。境界種数は「境界成分ごとの種数の総和」である点に注意しよう。

多重分岐曲面 X に対して、正則近傍 $N(X)$ の境界種数 $g(\partial N(X))$ を調べることで、 X がどれほど複雑な 3次元近傍をもつか分かる。

9.4 正則多重分岐曲面

前章で、ブランチ l に貼り付く各プレブランチの貼り付き次数 $d(c_1), \dots, d(c_k)$ を導入した。本章では、これらの次数がブランチごとに揃っているかどうか注目する。

復習：貼り付き次数

プレブランチとは、セクターの貼り付け前の境界成分のことであった（前章参照）。プレブランチ c の次数 $d(c)$ は、 c がブランチに何回巻き付いて貼り付くかを表す整数で、前章では貼り付き次数（向きを忘れた正の整数）と呼んだ。

定義 9.6 (正則ブランチと巻き付き数). 多重分岐曲面 X のブランチ l が**正則**であるとは、 l に貼り付くすべてのプレブランチ $c_1, \dots, c_k$ の貼り付き次数が等しいこと、すなわち

$$d(c_1) = d(c_2) = \dots = d(c_k)$$

が成り立つことをいう。このとき、その共通の値をブランチ l の**巻き付き数**と呼び、 $\text{wrap}(l)$ と書く。

定義 9.7 (正則多重分岐曲面). 多重分岐曲面 X のすべてのブランチが正則であるとき、 X を**正則多重分岐曲面**という。

例 9.8. 一つのブランチに、次数 1, 1, 1 の 3 つのプレブランチが貼り付く場合、次数はすべて等しいので、そのブランチは正則であり、巻き付き数は 1 である。

例 9.9. 一つのブランチに、次数 2, 4 の 2 つのプレブランチが貼り付く場合、次数が等しくないで、そのブランチは正則ではない。

具体例：巻き付き数が 2 以上の正則ブランチ

一つのブランチに、次数 2, 2, 2 の 3 つのプレブランチが貼り付くとする。どの次数も 1 ではないが、すべて等しいので、このブランチは正則であり、巻き付き数は 2 である。また、射影平面 $\mathbb{RP}^2$ を「円板 1 枚がブランチに 2 回巻き付いて貼り付いたもの」と見ると、プレブランチは次数 2 の 1 本だけなので、このブランチも正則である。一方、次数 2, 3 の場合は、最大公約数は $\gcd(2, 3) = 1$ であるが、次数が等しくないで正則ではない。正則性は「次数の最大公約数が 1 であること」とは別の条件であることに注意しよう。

なぜ「次数が揃う」ことが条件になるのか

ブランチ l が向き付け可能な 3 次元多様体の中にあるとき、 l の正則近傍はソリッドトーラス V であり、 l に貼り付くセクターは境界トーラス ∂V と、互いに交わらない本質的な単純閉曲線で交わる。トーラス上の互いに交わらない本質的な単純閉曲線はすべて平行であり、同じホモロジー類（符号を除く）を表す。したがって、それらが V の芯 l のまわりを回る回数、すなわち貼り付き次数はすべて等しくなければならない。逆に、次数が揃っていれば、 ∂V 上に平行な曲線を並べることでブランチの近傍を作ることができる。実際、次が知られている [14]。

多重分岐曲面 X がある向き付け可能な閉 3 次元多様体に埋め込めるための必要十分条件は、 X が正則であることである。

非正則なブランチをもつ多重分岐曲面は、どのような向き付け可能な 3 次元多様体にも埋め込めず、3 次元的な正則近傍をもたない。そのため、本章以降では正則多重分岐曲面を考える。

9.5 正則近傍の作り方

多重分岐曲面 X の正則近傍は、次のように作ると理解しやすい。

まず、各セクター e に厚みを付ける。セクターが曲面であれば、その厚み付き近傍はおおよそ $e \times [-1, 1]$ の形をしている。

次に、各ブランチ l の近くにソリッドトーラス状の近傍を取る。ブランチは円周なので、その近傍は $S^1 \times D^2$ のような形である。

最後に、セクターの境界成分がブランチに貼り付く仕方に従って、これらの厚み付きセクターをブランチのソリッドトーラス近傍に接続する。

$$\text{厚み付きセクター} + \text{ブランチのソリッドトーラス近傍} = N(X)$$

このとき、セクターの数、セクターの種数、ブランチの数、および貼り付きの次数が、正則近傍の境界の形に影響する。

命題 9.10 (正則近傍と変形レトラクト). 多重分岐曲面 X の正則近傍 $N(X)$ は、 X に変形レトラクトする。したがって、すべての i に対して $H_i(N(X)) \cong H_i(X)$ が成り立つ。

Proof. 正則近傍は、 X に小さな厚みを付けて得られる 3 次元多様体である。厚み方向を縮めることで、 $N(X)$ は X に変形レトラクトする。したがって、ホモトピー不変性より $H_i(N(X)) \cong H_i(X)$ である。□

復習：変形レトラクトとホモトピー不変性

部分空間 $A \subset Y$ が Y の変形レトラクトであるとは、 Y を A を動かさずに連続的に A へ縮められることをいう (第 I 巻、巻頭「既習事項の要点」も参照)。このとき Y と A はホモトピー同値であり、ホモロジー群のホモトピー不変性より、すべての i で $H_i(Y) \cong H_i(A)$ が成り立つ。

この命題により、 X のホモロジーと $N(X)$ のホモロジーを同一視できる。特に、第 7 章のトーション消滅定理を $N(X)$ に適用することで、 X の埋め込み可能性を調べることができる。

9.6 多重分岐曲面の近傍種数

本章では、正則近傍の境界種数を用いて、多重分岐曲面の種数を定義する。

定義 9.11 (近傍種数). 正則多重分岐曲面 X に対し、正則近傍 $N(X)$ の境界種数 $g(\partial N(X))$ を、 X の近傍種数という。

直観：近傍種数は何を測る量か

近傍種数は、 X 自身の「穴の数」ではなく、 X を厚くした立体の表面の複雑さを測る。通常の曲面ですら、厚み付けにより境界が 2 枚に分かれるため、近傍種数は種数の 2 倍になる (後の例を参照)。ブランチがあると、複数のセクターの厚みが 1 本のソリッドトラス状近傍で合流するため、境界にはさらにハンドルが生じ得る。「2 次元図形としての複雑さ」ではなく「3 次元に置いたときの複雑さ」を測る量だと捉えるとよい。

正則近傍の取り方が一意的でない場合には、近傍種数が複数の値を取り得ることがある。そのため、後の章では最大種数・最小種数を導入する。しかし、正則な状況では、まず一つの標準的な近傍を考え、その境界種数を複雑さの尺度として理解すればよい。

注意 9.12. 多重分岐曲面の種数には、いくつかの関連する定義がある。正則近傍の境界種数を見る立場、埋め込まれる 3 次元多様体のヒーガード種数を見る立場、またそれらの最大値・最小値を見る立場である。本章では導入として、正則近傍の境界種数を中心に説明する。第 10 章で、最大種数と最小種数を扱う。

9.7 ヒーガード種数との関係

3 次元多様体の複雑さを測る基本的な量に、ヒーガード種数がある。

定義 9.13 (ヒーガード分解). 閉向き付け可能 3 次元多様体 M が $M = H_1 \cup_{\Sigma_g} H_2$ と表され、 H_1, H_2 がともに種数 g のハンドル体であるとき、この分解を M のヒーガード分解という。共通境界 Σ_g をヒーガード曲面という。

定義 9.14 (ヒーガード種数). 閉向き付け可能 3 次元多様体 M のヒーガード分解のうち、ヒーガード曲面の種数の最小値を、 M のヒーガード種数といい、 $g_H(M)$ と書く。

例 9.15. S^3 は 2 つの 3 次元球体を境界 S^2 に沿って貼り合わせて得られる。したがって $g_H(S^3) = 0$ である。

例 9.16. S^3 は 2 つのソリッドトーラスをトーラス境界に沿って貼り合わせても得られる。これは種数 1 のヒーガード分解である。ただし、最小種数は 0 なので $g_H(S^3) = 0$ である。

直観：なぜ最小値を取るのか

同じ 3 次元多様体が、異なる種数のヒーガード分解を複数もつことは普通に起こる。実際、上の 2 つの例のように、 S^3 は種数 0 の分解と種数 1 の分解を両方もつ (ハンドルを付け加えれば、分解の種数はいくらかでも増やせる)。したがって「分解の種数」自体は多様体の不変量にならず、最小値を取って初めて M だけで決まる量 $g_H(M)$ になる。最小値で定義された量を計算するときは、上からの評価 (分解を 1 つ構成する) と下からの評価 (それ未満が不可能な理由を示す) を分けて考えるのが基本である。

具体例： $S^1 \times S^2$ のヒーガード種数

$S^1 \times S^2$ は、2 つのソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ を境界トーラスの恒等写像で貼り合わせて得られるので、種数 1 のヒーガード分解をもつ。よって $g_H(S^1 \times S^2) \leq 1$ である。一方、種数 0 のヒーガード分解をもつ閉 3 次元多様体は、2 つの 3 次元球体を球面境界で貼り合わせたもの、すなわち S^3 に限る。 $S^1 \times S^2$ は $H_1(S^1 \times S^2) \cong \mathbb{Z} \neq 0$ なので S^3 と同相ではなく、 $g_H(S^1 \times S^2) \geq 1$ である。以上より $g_H(S^1 \times S^2) = 1$ と確定する。

多重分岐曲面 X が 3 次元多様体 M に埋め込まれるとき、 X の正則近傍 $N(X)$ は M の中に入っている。したがって、 $N(X)$ の境界種数が大きいほど、それを含む 3 次元多様体にもある程度の複雑さが必要になる。

注意 9.17. 近傍種数とヒーガード種数は同じ量ではない。近傍種数は、 X の正則近傍の境界がどれほど複雑かを測る。一方、ヒーガード種数は、周囲の 3 次元多様体全体を 2 つのハンドル体に分けるときの最小の種数を測る。しかし、両者はともに 3 次元的複雑さを測る量であり、多重分岐曲面の埋め込み可能性を考える際に密接に関係する。

9.8 例：ブランチをもたない場合

通常の閉曲面 F を、多重分岐曲面の特別な場合として考える。このときブランチはなく、 $X = F$ である。

F が両側近傍をもつ向き付け可能閉曲面なら、その正則近傍は $N(F) \cong F \times [-1, 1]$ である。したがって $\partial N(F) \cong F \sqcup F$ である。

もし $F = \Sigma_g$ なら、 $g(\partial N(F)) = g(F) + g(F) = 2g$ 。

例 9.18. 球面 S^2 の正則近傍は $S^2 \times [-1, 1]$ であり、境界は 2 つの球面である。したがって近傍種数

は $0 + 0 = 0$ である。

例 9.19. トーラス T^2 の正則近傍は $T^2 \times [-1, 1]$ であり、境界は 2 つのトーラスである。したがって近傍種数は $1 + 1 = 2$ である。

この例から分かるように、近傍種数は通常の曲面の種数そのものではなく、厚みを付けた近傍の境界の種数を見ている。

9.9 例：一つのブランチに複数の円板が集まる場合

一つのブランチ l に、 k 枚の円板 $D_1, \dots, D_k$ の境界がそれぞれ 1 回ずつ貼り付く多重分岐曲面を考える。各プレブランチの次数はすべて 1 で等しいので、この多重分岐曲面は正則であり、 $\text{wrap}(l) = 1$ である。

$k = 2$ の場合、2 枚の円板を境界で貼り合わせたものは球面に近い構造をもち、分岐は本質的には現れない。

一方、 $k = 3$ 以上の場合、ブランチ上で 3 枚以上の面が集まるため、通常の曲面ではない。正則近傍を取ると、ブランチのまわりに複数のセクターが厚みをもって接続される。この例では、 X は S^3 の中で「球面を $k - 2$ 枚の円板で仕切ったもの」として実現でき、正則近傍の境界は k 個の球面になる。したがって境界種数は 0 であり、セクターの枚数が増えても、増えるのは境界の成分数である。

このように、ブランチに集まるセクターの枚数は、まず正則近傍の境界成分数に反映される。境界種数がどう変わるかは、セクターの種数や、ブランチのまわりでの並び方（第 10 章）によって決まる。

具体例：円板 3 枚のホモロジーを計算する

$k = 3$ とし、円周 ℓ に 3 枚の円板 D_1, D_2, D_3 の境界を 1 回ずつ貼り付けた X を考える。まず、 X をセル複体と見ると、頂点 1 個・1 セルは ℓ 上の 1 本だけであり、各円板 D_i は 2 セルとしてその境界が ℓ に 1 回巻き付く。したがって境界写像 ∂_2 の像は $[\ell]$ の生成する部分群全体になり、 $H_1(X) = 0$ である。次に、 $D_1 \cup D_2$ は 2 枚の円板を境界で貼り合わせた球面 S^2 であり、 X はその赤道 ℓ にさらに D_3 を貼ったものである。 A をこの球面部分の近傍、 B を D_3 の近傍とすると $A \cap B$ は S^1 とホモトピー同値であり、マイヤー・ヴィートリス完全系列の一部 $0 \rightarrow H_2(A) \oplus H_2(B) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_1(A \cap B) \rightarrow H_1(A) \oplus H_1(B)$ において $H_2(A) \cong \mathbb{Z}$ 、 $H_2(B) = 0$ 、 $H_1(A) = H_1(B) = 0$ だから、 $H_2(X) \cong \mathbb{Z}^2$ となる。曲面ではない X でも、ホモロジーは第 I 巻の道具でここまで計算できる。

注意 9.20. 正確な種数の計算には、セクターの種数、境界成分の数、ブランチへの貼り付き方を丁寧に追跡する必要がある。本章では、種数がどのような情報を反映するかを理解することを重視する。具体的な評価は第 10 章で扱う。

9.10 種数とホモロジー

近傍種数は、ホモロジーとも関係する。正則近傍 $N(X)$ が X に変形レトラクトするなら、 $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。したがって、 $H_1(X)$ の階数が大きければ、正則近傍も多くの 1

次元サイクルを含む。

直感的には、 $H_1(X)$ の階数が大きいほど、正則近傍の境界にも多くのハンドルが現れやすい。したがって、 $\text{rank } H_1(X)$ は、近傍種数の下限を与える情報になることがある。

命題 9.21 (ホモロジーによる種数の制約). 正則多重分岐曲面 X の正則近傍を $N(X)$ とする。もし $N(X)$ が S^3 に埋め込まれるなら、 $H_1(X)$ はトーションをもたない。また、 $H_1(X)$ の自由部分の階数は、正則近傍の境界の複雑さに制約を与える。

Proof. $N(X)$ が S^3 に埋め込まれるなら、第7章の定理より $H_1(N(X))$ はトーションをもたない。また、 $N(X)$ は X に変形レトラクトするので $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。したがって $H_1(X)$ はトーションをもたない。

さらに、 $H_1(X)$ の階数が大きい場合には、それだけ多くの独立な1サイクルが $N(X)$ に存在する。これらのサイクルは、正則近傍の境界やハンドル構造に反映されるため、境界種数に制約を与える。 □

復習：第7章のトーション消滅定理

M を S^3 のコンパクト3次元部分多様体とすると、 $H_1(M)$ はトーションをもたない(第7章)。証明の鍵は、分解 $S^3 = M \cup E(M)$ にマイヤー・ヴィートリス完全系列を適用して得られる同型 $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ であった。左辺は閉曲面のホモロジーで自由アーベル群だから、右辺の直和因子にトーションは現れない。上の命題は、この定理を $M = N(X)$ に適用し、変形レトラクトで $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ と読み替えたものである。

ここで最後の部分は、直感的な説明に留めている。第10章では、この考えをより具体的な不等式として扱う。

9.11 種数と埋め込み障害

多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるとする。このとき、正則近傍 $N(X)$ は S^3 中のコンパクト3次元部分多様体である。したがって、 $N(X)$ の境界やホモロジーは、 S^3 中に入る3次元多様体としての制約を受ける。

もし X の貼り付き構造から、どのような正則近傍を取っても境界種数が大きすぎる、あるいは H_1 にトーションが生じる、といったことが分かれば、それは S^3 への埋め込み障害になる。

種数は、多重分岐曲面が3次元空間の中でどれほどの複雑さを要求するかを測る。

グラフの平面性において、 K_5 や $K_{3,3}$ が平面に入るには複雑すぎる構造であったように、多重分岐曲面でも、種数が高いものやホモロジーが複雑なものは、 S^3 への埋め込みに対して障害をもつ可能性がある。

9.12 正則性が重要な理由

非正則な多重分岐曲面では、あるブランチに貼り付くプレブランチの次数が揃っていない。前に見たように、この場合 X はどのような向き付け可能3次元多様体にも埋め込めないで、正則近傍やそ

の境界種数をそもそも考えることができない。

一方、正則多重分岐曲面では、各ブランチのまわりの貼り付きが、ソリッドトーラスの境界上の平行な曲線族として実現できる。そのため、ブランチのまわりのプレブランチの並べ方を決めるごとに正則近傍が定まり、種数を調べることができる。

注意 9.22. 正則性は、単に技術的な仮定ではない。それは「 X が何らかの向き付け可能な閉 3 次元多様体に埋め込める」という条件と同値であり、多重分岐曲面の 2 次元構造と、正則近傍の 3 次元構造を結び付けるための出発点である。なお、 S^3 に埋め込める多重分岐曲面はもちろん正則であるが、逆は成り立たない（たとえば $\mathbb{RP}^2$ は正則であるが S^3 には埋め込めない）。

本巻では、まず正則な場合を理解し、その後で最大種数・最小種数や埋め込み障害を扱う。この順序により、多重分岐曲面の幾何学的な意味を段階的に理解できる。

9.13 埋め込み可能種数と正則性

原論文 [14] では、多重分岐曲面の種数を、単に正則近傍の境界を見る量としてだけでなく、その近傍がどの程度複雑な閉 3 次元多様体の中に入るかを測る量として説明している。この視点を入れると、多重分岐曲面の種数は、3 次元多様体論のヒーガード種数とより直接につながる。

まず、境界付きコンパクト 3 次元多様体 N に対して、 N を埋め込むことのできる閉 3 次元多様体を考える。閉 3 次元多様体 M のヒーガード種数は、前節の記号で $g_H(M)$ である。

定義 9.23 (埋め込み可能種数). 境界付きコンパクト 3 次元多様体 N に対し、

$$\text{eg}(N) = \min\{g_H(M) \mid N \hookrightarrow M, M \text{ は閉向き付け可能 3 次元多様体}\}$$

を、 N の埋め込み可能種数という。

この量は、 N 自身を含むために必要な周囲の閉 3 次元多様体の複雑さを測る。たとえば、 N が S^3 に埋め込めるなら、 $g_H(S^3) = 0$ なので $\text{eg}(N) = 0$ である。

具体例：ソリッドトーラスの埋め込み可能種数

$N = S^1 \times D^2$ をソリッドトーラスとする。 N は $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ の中に標準的なドーナツ型として埋め込めるので、 $\text{eg}(N) = 0$ である。一方、 N の境界種数は $g(\partial N) = 1$ であった。このように、境界種数 (近傍自身の表面の複雑さ) と埋め込み可能種数 (近傍を入れる周囲の閉 3 次元多様体の複雑さ) は、一般に異なる値を取る別の量である。

多重分岐曲面 X の近傍全体の集合を $\mathcal{N}(X)$ と書くと、次のように定義できる。

定義 9.24 (多重分岐曲面の最小種数・最大種数). 正則多重分岐曲面 X に対し、

$$\min g(X) = \min\{\text{eg}(N) \mid N \in \mathcal{N}(X)\}, \quad \max g(X) = \max\{\text{eg}(N) \mid N \in \mathcal{N}(X)\}$$

を、それぞれ X の最小種数、最大種数という。

重要な記号の注意： $\min g(X)$ と $g_{\min}(X)$ は別物

第10章では、正則近傍の**境界種数**の最小値・最大値を $g_{\min}(X)$, $g_{\max}(X)$ と書く。見た目は似ているが、いま定義した $\min g(X)$, $\max g(X)$ とはまったく別の量である。

- $g_{\min}(X), g_{\max}(X)$ ：近傍 N 自身の境界 ∂N の種数の総和の最小・最大。
- $\min g(X), \max g(X)$ ：近傍 N を入れる周囲の閉3次元多様体のヒーガード種数の最小・最大。

たとえば閉曲面 $X = \Sigma_g$ ($g \geq 1$) では、正則近傍は $\Sigma_g \times [-1, 1]$ ただ一つなので $g_{\min}(X) = g_{\max}(X) = 2g$ であるが、 Σ_g は S^3 に標準的に埋め込めるので $\min g(X) = \max g(X) = 0$ である。混同しないよう、記号の位置 (g の前か後か) に注意してほしい。

この定義では、 $\min g(X)$ は「 X を実現するのに最低限必要な3次元空間の複雑さ」を表す。本章前半で扱った境界種数は、近傍 N 自身の境界の複雑さであった。一方、ここでの $\min g(X), \max g(X)$ は、その近傍を入れる周囲の閉3次元多様体のヒーガード種数を見ている。両者は別の量であるが、どちらも「多重分岐曲面が3次元的にどれだけ複雑か」を測る。

注意 9.25. 正則性は、向き付け可能な閉3次元多様体への埋め込み可能性と同値な条件であった。したがって、正則多重分岐曲面 X に対しては、 X を埋め込める閉3次元多様体が必ず存在し、下で定義する埋め込み可能種数が意味をもつ。

9.14 分岐数・セクター数による上からの評価

多重分岐曲面の種数は、その構成要素の数から大まかに上から評価できる。ここで、 X のブランチの数を $b(X)$ 、セクターの数を $s(X)$ と書く。

命題 9.26 (粗い上からの評価 [17]). 正則多重分岐曲面 X に対して、 $\max g(X) \leq b(X) + s(X)$ が成り立つ。とくに $\min g(X) \leq \max g(X) \leq b(X) + s(X)$ である。

証明の考え方. 各ブランチにはソリッドトーラス状の近傍を取り、各セクターには厚みを付ける。これらを貼り合わせて得られる近傍を、いったん自己交差を許して3次元球面内に配置する。自己交差がある場合には、周囲の3次元多様体を手術して交差を解消する。この過程で必要になるヒーガード種数は、ブランチとセクターの個数の和で上から抑えられる。したがって、どの近傍 $N \in \mathcal{N}(X)$ についても、 N を含む閉3次元多様体のヒーガード種数を $b(X) + s(X)$ 以下にできる。□

直観：上界の論法と下界の論法

上の命題のような**上からの評価**は、「条件を満たす構成を1つ作って見せる」ことで得られる。ここでは、 X の近傍を実際にヒーガード種数 $b(X) + s(X)$ 以下の閉3次元多様体へ押し込んで見せた。一方、**下からの評価**には、「それより小さくは絶対にできない」理由、すなわちすべての実現を一斉に排除する障害 (たとえば H_1 のトーションや階数) が必要になる。最小値で定義された不変量を扱うときは、いま自分がどちらの論法を使っているのかを常に意識するとよい。

この評価は鋭いとは限らないが、有限個の構成要素から有限の複雑さの閉 3 次元多様体の実現できることを保証する。したがって、多重分岐曲面の種数は有限であり、組合せ的なデータから評価可能な不変量になる。

具体例：閉曲面で上界の粗さを確かめる

ブランチをもたない閉曲面 $X = \Sigma_g$ を多重分岐曲面とみなすと、 $b(X) = 0$ 、 $s(X) = 1$ なので、命題の評価は $\max g(X) \leq 0 + 1 = 1$ を与える。しかし実際には、 Σ_g は $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ に標準的に埋め込めるので、その近傍 $\Sigma_g \times [-1, 1]$ も S^3 に入り、 $\min g(X) = \max g(X) = 0$ である。このように、上界は正しいが最良とは限らない。評価を改良するには、第 10 章のように貼り付きの情報をより細かく使う必要がある。(この例では $g_{\min}(X) = g_{\max}(X) = 2g$ であり、 $\min g, \max g$ とはまったく別の値であることも確認しておこう。)

9.15 多重分岐曲面のマイナー

グラフ理論では、辺の削除や縮約によって得られるグラフをマイナーと呼ぶ。クラトフスキーの定理は、平面グラフのクラスがマイナーに関して閉じており、その最小障害が K_5 と $K_{3,3}$ であることを示している。

多重分岐曲面にも、これに対応するマイナー操作がある。

定義 9.27 (多重分岐曲面のマイナー). 多重分岐曲面 Y から、次の操作を有限回行って得られる多重分岐曲面 X を、 Y の**マイナー**という。

1. セクターを削除する。
2. アニュラス状セクターを縮約する。

ここで、アニュラス状セクターの縮約は、グラフにおける辺の縮約の 2 次元版と考えられる。アニュラスが 2 つのブランチをつないでいるとき、そのアニュラスをつぶすことで、対応するブランチの接続構造を単純化する。

命題 9.28 (埋め込み可能性のマイナー閉性). Y が S^3 に埋め込め、 X が Y のマイナーであるならば、 X も S^3 に埋め込める。

理由. セクターの削除は、埋め込まれている図形から一部を取り除く操作であるから、埋め込み可能性を壊さない。また、アニュラス状セクターの縮約は、埋め込まれた正則近傍の中で局所的に行える単純化として実現できる。したがって、 Y が S^3 に入っていれば、そのマイナー X も S^3 に入る。□

この命題により、 S^3 に埋め込める多重分岐曲面のクラスはマイナーに関して閉じていると考えられる。そこで、グラフの場合と同様に、最小の障害物を定義できる。

定義 9.29 (障害物集合). 性質 P をもつ多重分岐曲面のクラスがマイナーに関して閉じているとする。このとき、

$$\Omega(P) = \{ [X] \mid [X] \notin P \text{ かつ } [X] \text{ の任意の真のマイナーは } P \text{ に属する} \}$$

を、 P に対する**障害物集合**という。

特に、 $P = P_{S^3}$ を「 S^3 に埋め込める」という性質とすると、 $\Omega(P_{S^3})$ は、多重分岐曲面版のクラトフスキー障害を集めた集合になる。この観点は、第12章以降の臨界的複体の議論へつながる。

9.16 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. 通常の曲面の種数とオイラー標数の関係を復習できる。
2. コンパクト3次元多様体の境界種数を定義できる。
3. プレブランチの貼り付き次数を用いて、正則ブランチ・巻き付き数・正則多重分岐曲面を定義できる。
4. 正則近傍が、厚み付きセクターとブランチのソリッドトーラス近傍から作られることを理解する。
5. 正則近傍が多重分岐曲面に変形レトラクトすることを説明できる。
6. 近傍種数を、正則近傍の境界種数として理解できる。
7. ヒーガード種数と近傍種数の違いと関係を説明できる。
8. 種数が埋め込み障害として働く考え方を理解する。

9.17 練習問題

練習問題 9.1. 向き付け可能閉曲面 Σ_g について、 $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ を用いて、種数 g をオイラー標数で表せ。

練習問題 9.2. ソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ の境界種数を求めよ。また、種数 g のハンドル体 H_g の境界種数を求めよ。

練習問題 9.3. 一つのブランチに、次数 $1, 2, 3$ のプレブランチが貼り付いているとする。このブランチは正則かどうか判定せよ。

練習問題 9.4. 一つのブランチに、次数 $2, 2, 2$ のプレブランチが貼り付いているとする。このブランチは正則かどうか判定せよ。正則ならば巻き付き数を求めよ。

練習問題 9.5. 閉曲面 $F = \Sigma_g$ を多重分岐曲面とみなし、その正則近傍が $F \times [-1, 1]$ であるとする。このとき、近傍種数 $g(\partial N(F))$ を求めよ。

練習問題 9.6. 正則近傍 $N(X)$ が X に変形レトラクトするとき、 $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ が成り立つ理由を説明せよ。

練習問題 9.7. 多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるなら、なぜ $H_1(X)$ にトーションが現れないと期待できるのか、第 7 章の結果を用いて説明せよ。

練習問題 9.8. 近傍種数とヒーガード種数はどのように違うか説明せよ。

練習問題 9.9. 境界付きコンパクト 3 次元多様体 N の埋め込み可能種数 $\text{eg}(N)$ を定義せよ。また、 N が S^3 に埋め込めるなら $\text{eg}(N) = 0$ であることを説明せよ。さらに、閉曲面 Σ_g について $g_{\min}(\Sigma_g)$ と $\min g(\Sigma_g)$ を求め、両者が異なる量であることを確かめよ。

練習問題 9.10. 多重分岐曲面のマイナー操作として、セクター削除とアニュラス状セクターの縮約を説明せよ。また、なぜ S^3 への埋め込み可能性はマイナーで保たれると期待できるか述べよ。

練習問題 9.11. 性質 P がマイナーに関して閉じているとき、障害物集合 $\Omega(P)$ を定義せよ。 $P = P_{S^3}$ の場合、これはどのような意味をもつか説明せよ。

9.18 次章への橋渡し

本章では、多重分岐曲面の種数を、正則近傍の境界種数を通して理解した。また、正則多重分岐曲面の意味と、ヒーガード種数との関係を見た。

次章では、この種数をより定量的に扱う。特に、正則近傍の取り方によって種数が変わり得る場合を考え、最大種数と最小種数を導入する。さらに、それらの評価が、 S^3 への埋め込み可能性や埋め込み障害とどのように関係するかを学ぶ。

第 10 章

種数と埋め込み障害

研究ノート：障害は一種類ではない

埋め込み不可能性を示す方法の一つではない。ホモロジーのトーション、正則近傍の境界種数、局所モデル、グラフの非平面性は、それぞれ異なる形で障害を与える。一つの複体に対して複数の障害を比較することが、研究問題として重要になる。

10.1 本章の目標

前章では、多重分岐曲面 X の正則近傍 $N(X)$ を考え、その境界種数 $g(\partial N(X))$ によって、 X の 3 次元的な複雑さを測る考え方を学んだ。

本章では、この種数をさらに詳しく扱う。多重分岐曲面では、ブランチのまわりでセクターをどの順序で配置するかによって、正則近傍の境界の形が変わることがある。したがって、同じ多重分岐曲面でも、取り得る正則近傍の境界種数が一つとは限らない。

そこで、可能な正則近傍全体を考え、その中で境界種数の最小値と最大値を定義する。これが、多重分岐曲面の**最小種数**と**最大種数**である。

大まかには、次のように考えるとよい。

最小種数は、最も単純な厚み付けの複雑さを表し、最大種数は、最も複雑な厚み付けの複雑さを表す。

さらに、これらの種数は、 S^3 への埋め込み可能性を調べるための道具になる。ただし、種数が大きいことだけで直ちに埋め込み不可能になるわけではない。重要なのは、正則近傍の種数、ホモロジー群、トーション、補空間の性質を組み合わせ、**「もし S^3 に埋め込めるなら満たすべき条件」**を導くことである。

本章の目標は次の通りである。

- 正則近傍の境界成分数と境界種数の関係を理解する。
- 多重分岐曲面の最小種数と最大種数を定義する。
- オイラー標数を用いて、境界種数を計算する方法を理解する。
- 種数と H_1 の関係を理解する。
- 種数が埋め込み障害として働く仕組みを理解する。

重点項目

正則近傍の境界種数、公式 $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ 、最小種数・最大種数の定義、トーション障害との関係を中心に扱う。

発展として扱う項目

埋め込み可能種数、最大・最小種数の下界評価、Half-lives, half-dies を用いる証明、等号成立例は発展的内容であり、必要に応じて選択的に読めばよい。

学習の指針

本章の骨格は、公式 $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ の一本である。 $\chi(X)$ はセクターだけから決まる定数なので、種数の問題はすべて「正則近傍の境界成分数 b を数える」という組合せ的な問題に翻訳される。前半 (境界成分をたどる方法まで) でこの翻訳の仕方を身につけ、後半では第 7 章のマイヤー・ヴィートリス完全系列とトーション消滅定理を組み合わせ、種数を S^3 への埋め込み障害へと変える。第 I 巻のホモロジー計算 (オイラー標数、閉曲面の H_1) と、第 8・9 章の多重分岐曲面・正則近傍・埋め込み可能種数を随時参照する。初出の概念は最小種数・最大種数と、グラフの最小種数・最大種数である。

10.2 正則近傍の種数

X を正則多重分岐曲面とし、 N を X の正則近傍とする。 N はコンパクト向き付け可能 3 次元多様体であり、 X に変形レトラクトする。したがって $\chi(N) = \chi(X)$ である。

また、 ∂N は向き付け可能閉曲面の有限和である。境界成分を $\partial N = F_1 \cup \cdots \cup F_b$ とし、各 F_i の種数を g_i とする。このとき、境界種数を $g(\partial N) = g_1 + \cdots + g_b$ と定義する。

定義 10.1 (正則近傍の種数). 多重分岐曲面 X の正則近傍 N に対し、 $g(N) = g(\partial N)$ を、 N の種数という。

ここで注意すべきことは、 $g(N)$ は N そのもののヒーガード種数ではなく、境界成分の種数の総和であるという点である。本章では、この境界種数を用いて、多重分岐曲面の厚み付き近傍の複雑さを測る。

10.3 境界成分数と種数の関係

正則近傍の種数を計算するために、オイラー標数を用いる。次の公式が基本である。

定理 10.2 (境界種数の公式). N をコンパクト向き付け可能 3 次元多様体とする。境界成分を $\partial N = F_1 \cup \cdots \cup F_b$ とし、各 F_i を種数 g_i の閉曲面とする。このとき $g_1 + \cdots + g_b = b - \chi(N)$ が成り立つ。特に、 N が多重分岐曲面 X に変形レトラクトするなら、 $g(\partial N) = b - \chi(X)$ である。

Proof. まず、コンパクト向き付け可能 3 次元多様体 N に対して $\chi(\partial N) = 2\chi(N)$ が成り立つことを用いる。これは、 N を境界に沿って二重化した閉 3 次元多様体 $D(N) = N \cup_{\partial N} N$ を考えると分か

る。閉向き付け可能 3 次元多様体のオイラー標数は 0 であるから、 $\chi(D(N)) = 0$ 。一方、オイラー標数の加法性より $\chi(D(N)) = 2\chi(N) - \chi(\partial N)$ である。したがって $\chi(\partial N) = 2\chi(N)$ を得る。

次に、各境界成分 F_i は種数 g_i の閉曲面なので、 $\chi(F_i) = 2 - 2g_i$ である。よって

$$\chi(\partial N) = \sum_{i=1}^b \chi(F_i) = \sum_{i=1}^b (2 - 2g_i) = 2b - 2 \sum_{i=1}^b g_i.$$

これが $2\chi(N)$ に等しいので、

$$2b - 2 \sum_{i=1}^b g_i = 2\chi(N).$$

両辺を 2 で割って整理すると、

$$\sum_{i=1}^b g_i = b - \chi(N)$$

となる。 N が X に変形レトラクトするなら、 $\chi(N) = \chi(X)$ なので、 $g(\partial N) = b - \chi(X)$ である。□

復習: オイラー標数の基本性質

上の証明では、第 I 巻で学んだ次の事実を使っている (巻頭の既習事項の要点も参照)。

- 種数 g の向き付け可能閉曲面について $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ 。
- 加法性: $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$ 。
- ホモトピー不変性: 変形レトラクトで χ は変わらない ($\chi(N) = \chi(X)$ の根拠)。

また「閉向き付け可能 3 次元多様体のオイラー標数は 0」という事実も使った。この事実の証明には双対性 (本書では未習) が必要なので、ここでは認めて用いる。

この公式は非常に重要である。多重分岐曲面 X が固定されていれば、 $\chi(X)$ は一定である。したがって、正則近傍の境界種数を知るには、境界成分の個数 $b = b(\partial N)$ を知ればよい。

多重分岐曲面の種数の違いは、正則近傍の境界成分数の違いとして現れる。

具体例: ハンドル体で公式を検算する

ソリッドトーラス $N = S^1 \times D^2$ は S^1 に変形レトラクトするので $\chi(N) = \chi(S^1) = 0$ である。境界はトーラス 1 個なので $b = 1$ であり、公式から $g(\partial N) = b - \chi(N) = 1 - 0 = 1$ 。確かに $\partial N = T^2$ の種数は 1 である。

次に、種数 2 のハンドル体 N を考える。 N は円周 2 つのウェッジ (8 の字) に変形レトラクトするので $\chi(N) = 1 - 2 = -1$ である。境界は連結なので $b = 1$ であり、 $g(\partial N) = 1 - (-1) = 2$ 。確かに境界は種数 2 の閉曲面である。このように「 χ を求めて b を数える」だけで境界種数が計算できる。

10.4 多重分岐曲面のオイラー標数

多重分岐曲面 X は、セクターをブランチに沿って貼り合わせて作られる。ブランチは円周の和であり、オイラー標数は 0 である。また、プレブランチも円周なので、そのオイラー標数も 0 である。

したがって、多重分岐曲面のオイラー標数は、セクターのオイラー標数の和として計算できる。

命題 10.3 (多重分岐曲面のオイラー標数). 多重分岐曲面 X のセクターを $e_1, \dots, e_s$ とすると、

$$\chi(X) = \sum_{j=1}^s \chi(e_j)$$

である。

Proof. X は、セクターの和 E とブランチの和 L を、境界成分の和 ∂E に沿って貼り合わせて得られる。オイラー標数の加法性より $\chi(X) = \chi(E) + \chi(L) - \chi(\partial E)$. ここで L は円周の有限和なので $\chi(L) = 0$ であり、 ∂E も円周の有限和なので $\chi(\partial E) = 0$ である。したがって

$$\chi(X) = \chi(E) = \sum_{j=1}^s \chi(e_j)$$

となる。 □

具体例: 3 枚の円板からなる本のオイラー標数

第 8 章の例、すなわち 3 枚の円板 D_1, D_2, D_3 の境界を 1 本のブランチ l にそれぞれ次数 1 で貼り付けた多重分岐曲面 X (3 ページの本) で検算する。セクターは円板 3 枚で $\chi(D_i) = 1$ なので、命題より $\chi(X) = 1 + 1 + 1 = 3$ である。CW 複体としても確かめられる: l に頂点 1 個と辺 1 本を置くと $\chi(l) = 1 - 1 = 0$ で、2 セルが 3 枚付くから $\chi(X) = 1 - 1 + 3 = 3$ と一致する。ブランチは円周なので χ に寄与しない点に注意しよう。たとえばセクターにアニュラス ($\chi = 0$) を追加しても $\chi(X)$ は変わらない。

この命題により、 X のオイラー標数は、ブランチの数や貼り付き次数ではなく、セクターのオイラー標数から計算できる。一方、正則近傍の境界成分数は、ブランチのまわりでセクターがどのように配置されるかに依存する。この二つを合わせることで、種数が計算される。

10.5 最小種数と最大種数

正則多重分岐曲面 X に対して、取り得る正則近傍をすべて考える。その集合を $\mathcal{N}(X)$ と書くことにする。

定義 10.4 (最小種数と最大種数). 正則多重分岐曲面 X に対し、 $g_{\min}(X) = \min_{N \in \mathcal{N}(X)} g(\partial N)$ を X の**最小種数**といい、 $g_{\max}(X) = \max_{N \in \mathcal{N}(X)} g(\partial N)$ を X の**最大種数**という。

同様に、正則近傍の境界成分数について $b_{\min}(X) = \min_{N \in \mathcal{N}(X)} b(\partial N)$, $b_{\max}(X) = \max_{N \in \mathcal{N}(X)} b(\partial N)$ と定める。

先ほどの公式 $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ より、次が得られる。

系 10.5. 正則多重分岐曲面 X に対して、 $g_{\min}(X) = b_{\min}(X) - \chi(X)$, $g_{\max}(X) = b_{\max}(X) - \chi(X)$ が成り立つ。

Proof. $\chi(X)$ は N の取り方によらず一定である。したがって、 $g(\partial N)$ の最小値・最大値は、 $b(\partial N)$

の最小値・最大値からそれぞれ得られる。

□

直観: 境界成分が多いほど種数も大きい

一見、境界が多く成分に分かれるほど一つ一つの成分は単純になりそうだが、公式は逆を主張している。境界の総オイラー標数 $\chi(\partial N) = 2\chi(N) = 2\chi(X)$ は近傍の取り方によらず一定なので、 $\sum_i (2 - 2g_i) = 2b - 2\sum_i g_i$ が一定、つまり b を 1 増やすと総種数 $\sum_i g_i$ もちょうど 1 増える。このため、境界成分数が最小の近傍と種数が最小の近傍は同じものであり、 $b_{\min} \leftrightarrow g_{\min}$ 、 $b_{\max} \leftrightarrow g_{\max}$ が同時に実現される。

この結果により、最大種数・最小種数の問題は、正則近傍の境界成分数をどのように最大化・最小化できるかという問題に帰着する。

10.6 正則近傍の取り方

では、正則近傍の取り方はどこで変わるのだろうか。主な違いは、ブランチのまわりでセクターをどの順番に並べるかに現れる。

一つのブランチ l に、複数のプレブランチ $c_1, \dots, c_k$ が貼り付いているとする。3 次元の正則近傍を作るとき、これらのプレブランチはブランチのまわりに円周状に配置される。その巡回順序を変えると、正則近傍の境界面がつながる様子が変わることがある。

注意 10.6. これは、曲面を 3 次元的に厚くするときに、ブランチのまわりで「紙の枚数」をどの順番で重ねるかを決めることに対応する。同じ 2 次元複体であっても、この 3 次元的な配置の選び方によって、正則近傍の境界成分数が変わり得る。

直観: 巡回順序が境界のつながり方を変える

厚みを付けた各セクターには表の面と裏の面が現れ、ブランチのまわりでは「隣り合うセクターの面どうし」が帯状の曲面でつながる。どの面とどの面が隣り合うかは巡回順序で決まるので、順序を変えると境界面の縫い合わせがつなぎ替わり、連結成分数 $b(\partial N)$ が変わり得る。ただし $\chi(X)$ は順序によらず不変なので、種数 $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ は b と連動してのみ変わる。

有限個のブランチとプレブランチしかないので、可能な巡回順序の組み合わせは有限個である。したがって、 $\mathcal{N}(X)$ も有限個の型からなると考えられる。このため、最大種数と最小種数は有限の組合せの問題として定まる。

10.7 境界成分をたどる方法

正則近傍の境界成分数を求めるには、境界面を実際にたどる方法が有効である。考え方は次の通りである。

各セクターに厚みを付けると、その表側と裏側に境界面が現れる。また、プレブランチの近くでは、これらの表裏の面がブランチのまわりでつながる。ブランチごとに巡回順序を決めると、境界面がどのようにつながるかが決まる。

このとき、境界成分は次のようにして求められる。

1. 各セクターの表側・裏側を区別する。
2. プレブランチに沿って、境界面がブランチ近傍でどこへ接続されるかを記録する。
3. その接続規則に従って境界面をたどる。
4. 閉じた一つのまとまりが、 ∂N の一つの連結成分になる。

この手順により、 $b(\partial N)$ を組合せ的に計算できる。そして $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ を用いれば、種数が求められる。

注意 10.7. 実際の研究では、この境界成分の追跡を、置換の積やグラフの巡回構造として記述することが多い。本書では、まず「境界面をたどると境界成分数が分かる」という直感を押さえておけば十分である。

具体例:3 ページの本で境界成分をたどる

上の手順を、3 枚の円板 D_1, D_2, D_3 が 1 本のブランチ l に次数 1 で貼り付いた多重分岐曲面 X (3 ページの本) で実行してみよう。

- 各 D_i に厚みを付けると、表と裏の 2 枚の円板が境界面として現れる (合計 6 枚)。
- ブランチのまわりでは、巡回順序 (D_1, D_2, D_3) に従って、隣り合うセクターの向かい合う面どうしがアニュラス状の帯でつながる (帯は 3 本)。
- たどると、各境界成分は「円板 + 帯 + 円板」の形になり、これは球面である。よって $b(\partial N) = 3$ 。
- 前節の例より $\chi(X) = 3$ なので、 $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X) = 3 - 3 = 0$ 。

境界は球面 3 個で、種数は 0 である。3 ページの本は $\mathbb{R}^3$ の中に自然に置けるので、この結果は直観とも合う。また、円板 3 枚の巡回順序は入れ替えても同じ型になるので、 $g_{\min}(X) = g_{\max}(X) = 0$ である。

10.8 例：閉曲面の場合

閉曲面 $F = \Sigma_g$ を、多重分岐曲面の特別な場合として考える。この場合、ブランチは存在せず、正則近傍は一意的に $N(F) = F \times [-1, 1]$ である。

したがって $\partial N(F) = F \times \{-1\} \cup F \times \{1\}$ であり、境界成分数は $b(\partial N(F)) = 2$ である。また $\chi(F) = 2 - 2g$ なので、 $g(\partial N(F)) = b - \chi(F) = 2 - (2 - 2g) = 2g$ 。

よって $g_{\min}(F) = g_{\max}(F) = 2g$ である。

例 10.8. $F = S^2$ の場合、 $g_{\min}(S^2) = g_{\max}(S^2) = 0$ である。

例 10.9. $F = T^2$ の場合、 $g_{\min}(T^2) = g_{\max}(T^2) = 2$ である。実際、トーラスの正則近傍の境界は 2 つのトーラスである。

この例では、正則近傍の取り方に自由度がないため、最小種数と最大種数は一致する。

10.9 例：グラフの正則近傍との類比

グラフは多重分岐曲面ではないが、正則近傍の種数を理解するための良い類比になる。連結グラフ G を S^3 に埋め込み、その正則近傍を $N(G)$ とする。このとき、 $N(G)$ はハンドル体である。

G の頂点数を v 、辺数を e とすると、 $\chi(G) = v - e$ 。また、 $N(G)$ は G に変形レトラクトするので、 $\chi(N(G)) = \chi(G)$ 。境界は連結な閉曲面であり、その種数を h とすると、 $g(\partial N(G)) = h$ 。境界成分数は $b = 1$ なので、 $h = b - \chi(G) = 1 - (v - e) = e - v + 1$ 。これは、連結グラフの第一ベッチ数 $\beta_1(G) = e - v + 1$ と一致する。

注意 10.10. この例は、正則近傍の境界種数が、空間の 1 次元的な穴の数と関係することを示している。多重分岐曲面の場合にも、 H_1 の大きさやトーションは、正則近傍の種数や埋め込み可能性と深く関係する。

10.10 種数とホモロジーの制約

多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれているとする。その正則近傍を N とすると、 N は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体である。第 7 章の結果より、 $H_1(N)$ はトーションをもたない。また、 N は X に変形レトラクトするので $H_1(N) \cong H_1(X)$ 。したがって、次が成り立つ。

定理 10.11 (トーション障害). 正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるならば、 $H_1(X)$ はトーションをもたない。

Proof. X が S^3 に埋め込まれるなら、その正則近傍 N は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体である。第 7 章の定理より、 $H_1(N)$ はトーションをもたない。また、 N は X に変形レトラクトするので $H_1(N) \cong H_1(X)$ 。したがって、 $H_1(X)$ もトーションをもたない。□

復習: 第 7 章の二つの結果と閉曲面の H_1

本節では第 7 章の次の結果を使う (巻頭の既習事項の要点も参照)。

- トーション消滅定理: N が S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体なら、 $H_1(N)$ はトーションをもたない。
- 分解 $S^3 = N \cup_{\partial N} E(N)$ にマイヤー・ヴィートリス完全系列を適用すると、直和分解 $H_1(\partial N) \cong H_1(N) \oplus H_1(E(N))$ が得られる。

また、第 I 巻より、種数 g の向き付け可能閉曲面について $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ である。境界が複数の成分をもつときは成分ごとの直和をとるので、 $\text{rank } H_1(\partial N) = 2g(\partial N)$ となる。

さらに、 $H_1(X)$ の階数にも制約がある。 $N \subset S^3$ と外部 $E(N)$ に対して、第 7 章で見た同型 $H_1(\partial N) \cong H_1(N) \oplus H_1(E(N))$ が成り立つ。したがって、 $H_1(N)$ は $H_1(\partial N)$ の直和因子である。

境界 ∂N の総種数を $g(\partial N)$ とすると、 $H_1(\partial N) \cong \mathbb{Z}^{2g(\partial N)}$ である。よって $\text{rank } H_1(X) = \text{rank } H_1(N) \leq 2g(\partial N)$ が成り立つ。

系 10.12 (階数による必要条件). 正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるならば、ある正則近傍 $N \in \mathcal{N}(X)$ に対して $\text{rank } H_1(X) \leq 2g(\partial N)$ が成り立つ。特に、 $\text{rank } H_1(X) \leq 2g_{\max}(X)$ である。

Proof. X が S^3 に埋め込まれるとき、その正則近傍 N も S^3 に埋め込まれる。この N について、 $H_1(\partial N) \cong H_1(N) \oplus H_1(E(N))$ が成り立つ。したがって $\text{rank } H_1(N) \leq \text{rank } H_1(\partial N)$ 。また、 $H_1(N) \cong H_1(X)$ であり、 $\text{rank } H_1(\partial N) = 2g(\partial N)$ である。よって $\text{rank } H_1(X) \leq 2g(\partial N)$ を得る。さらに $g(\partial N) \leq g_{\max}(X)$ なので、 $\text{rank } H_1(X) \leq 2g_{\max}(X)$ が従う。□

論法の型: 必要条件は対偶で使う

この系は「 X が S^3 に埋め込める $\Rightarrow$ ある $N \in \mathcal{N}(X)$ で $\text{rank } H_1(X) \leq 2g(\partial N)$ 」という形の必要条件である。埋め込み不可能性を示すときには対偶を使う。すなわち「すべての $N \in \mathcal{N}(X)$ について $\text{rank } H_1(X) > 2g(\partial N)$ 」、言い換えれば $\text{rank } H_1(X) > 2g_{\max}(X)$ を示せば、 X は S^3 に埋め込めない。「ある近傍で成り立てばよい」という条件の否定は「すべての近傍で破れる」ことなので、最大種数 $g_{\max}$ が自然に現れる。この量記号の反転は、本章後半の評価でも繰り返し使われる論法の型である。

この条件は、トーション障害ほど強力ではない場合もあるが、種数とホモロジーを結びつける基本的な必要条件である。なお、本章後半の系「 S^3 への埋め込みの必要条件」では、同じ状況でより強い $\text{rank } H_1(X) \leq g(\partial N)$ が得られる。上の $2g(\partial N)$ による評価は、直和分解から直ちに出る粗い形である。

10.11 種数だけでは十分でない

ここで重要な注意を述べておく。

注意 10.13. 種数が大きいことだけから、ただちに S^3 に埋め込めないとは言えない。実際、任意の種数 g のハンドル体は S^3 に埋め込める。したがって、「種数が大きいから埋め込めない」という議論は正しくない。

種数が埋め込み障害として働くのは、次のような形である。

もし S^3 に埋め込めるなら、ある正則近傍の種数・境界成分・ホモロジーが整合しなければならない。

したがって、種数は単独で使うのではなく、ホモロジー、トーション、補空間、マイヤー・ヴィートリス完全系列などと組み合わせて使う。この点は、後の臨界的複体の議論でも重要である。

10.12 模式例：種数範囲による判定

具体的な計算の流れを模式的に説明する。

ある正則多重分岐曲面 X について、 $\chi(X) = -1$ であるとする。さらに、可能な正則近傍の境界成分数が $b(\partial N) = 1, 2, 3$ のいずれかであるとする。

このとき $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ なので、 $b = 1 \Rightarrow g = 2, b = 2 \Rightarrow g = 3, b = 3 \Rightarrow$

$g = 4$. したがって $g_{\min}(X) = 2$, $g_{\max}(X) = 4$ である。

もしさらに $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^3$ であれば、階数条件 $\text{rank } H_1(X) \leq 2g(\partial N)$ は、どの近傍に対しても満たされる。したがって、この条件だけでは埋め込み不可能性は示せない。

一方、 $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であれば、 $H_1(X)$ にトーションがある。この場合、 X は S^3 に埋め込めない。

この例が示すように、種数の評価は有用であるが、最終的な埋め込み判定には、ホモロジーの詳しい情報が必要になる。

判定手順のまとめ

種数とホモロジーによる判定は、次の順で機械的に実行できる。

- セクターを列挙し、 $\chi(X) = \sum_j \chi(e_j)$ を計算する。
- ブランチごとの巡回順序を動かして境界面をたどり、境界成分数 $b(\partial N)$ の取り得る値を求める。
- $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ から種数の範囲 $[g_{\min}, g_{\max}]$ を得る。
- $H_1(X)$ を計算する (第 12 章の接続行列 M_X とスミス標準形。第 8 章の代数的次数行列 A_T は $H_1(X)$ の表示行列ではないので注意)。トーションがあれば、その時点で埋め込み不可能と結論できる。
- トーションがなければ、階数条件 $\text{rank } H_1(X) \leq 2g_{\max}(X)$ や、後の節で導く条件 $g_{\max}$ に関する下からの評価と照合する。

10.13 最大種数・最小種数の意味

最大種数と最小種数には、それぞれ異なる意味がある。

最小種数 $g_{\min}(X)$ は、 X を最も単純に厚くしたときの境界の複雑さを表す。これは、 X がどれだけ小さい 3 次元近傍をもてるかを測っている。

一方、最大種数 $g_{\max}(X)$ は、 X の厚み付けによってどこまで複雑な正則近傍が現れ得るかを表す。これは、ブランチのまわりの配置の自由度がどれだけ大きいかを反映している。

不変量	意味
$g_{\min}(X)$	最も単純な正則近傍の境界種数
$g_{\max}(X)$	最も複雑な正則近傍の境界種数
$b_{\min}(X)$	境界成分数の最小値
$b_{\max}(X)$	境界成分数の最大値

これらの量は、 X の埋め込み可能性だけでなく、 X の近傍同値やマイナー操作を考える際にも重要になる。

10.14 埋め込み障害としての使い方

本章の内容を、埋め込み障害としてまとめると次のようになる。

定理 10.14 (種数とホモロジーによる必要条件). 正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるならば、次の条件を満たす。

1. $H_1(X)$ はトーションをもたない。
2. ある正則近傍 $N \in \mathcal{N}(X)$ に対して $\text{rank } H_1(X) \leq 2g(\partial N)$ が成り立つ。
3. 特に $\text{rank } H_1(X) \leq 2g_{\max}(X)$ である。

Proof. (1) は第 7 章のトーション消滅定理と、 $N \simeq X$ から従う。(2) は $H_1(\partial N) \cong H_1(N) \oplus H_1(E(N))$ と $H_1(N) \cong H_1(X)$ から従う。(3) は (2) と $g(\partial N) \leq g_{\max}(X)$ から従う。□

この定理は必要条件であり、十分条件ではない。つまり、これらを満たしても必ず S^3 に埋め込めるとは限らない。しかし、条件に反すれば埋め込み不可能である。その意味で、種数とホモロジーは埋め込み障害を与える。

10.15 クラトフスキーの定理との比較

グラフの平面性では、クラトフスキーの定理により、非平面性は K_5 と $K_{3,3}$ の部分分割を含むことによって完全に特徴づけられた。

多重分岐曲面の S^3 への埋め込み問題では、状況はより複雑である。単純な禁止対象だけでなく、次のような複数の情報が関係する。

- 正則近傍の種数。
- 境界成分数。
- H_1 のトーション。
- 補空間のホモロジー。
- マイナー型の単純化操作。

したがって、多重分岐曲面の埋め込み障害は、グラフの場合よりも多層的である。最大種数・最小種数は、その多層的な障害を整理するための基本的な不変量である。

10.16 埋め込み可能種数による下からの評価

前章では、埋め込み可能種数 $\text{eg}(N)$ を用いて、多重分岐曲面の種数を定義した。本章では、ホモロジーを用いてこの種数を下から評価する。

定理 10.15 (種数の下からの評価 [17]). X を正則多重分岐曲面とする。このとき、任意の近傍 $N \in \mathcal{N}(X)$ について $\text{eg}(N) \geq \text{rank } H_1(X) - g(\partial N)$ が成り立つ。したがって、第 9 章で定義した最小種数・最大種数について $\min g(X) \geq \text{rank } H_1(X) - g_{\max}(X)$, $\max g(X) \geq \text{rank } H_1(X) - g_{\min}(X)$ という評価が得られる ($g_{\min}, g_{\max}$ は境界種数の最小・最大であることに注意)。

証明の考え方. N が閉 3 次元多様体 M に埋め込まれているとする。外部を $Y = \overline{M - \text{int } N}$ とおけば、 $M = N \cup_{\partial N} Y$ である。この分解に (有理数係数の) マイヤー・ヴィートリス完全系列を適用すると

$$H_1(\partial N; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(N; \mathbb{Q}) \oplus H_1(Y; \mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(M; \mathbb{Q})$$

が完全なので

$$\dim H_1(N; \mathbb{Q}) + \dim H_1(Y; \mathbb{Q}) \leq \dim H_1(\partial N; \mathbb{Q}) + \dim H_1(M; \mathbb{Q})$$

が成り立つ。ここで、 $\dim H_1(\partial N; \mathbb{Q}) = 2g(\partial N)$ である。さらに、境界付きコンパクト向き付け可能 3 次元多様体 Y について half lives, half dies (第 7 章の注意を参照) より $\dim H_1(Y; \mathbb{Q}) \geq \frac{1}{2} \dim H_1(\partial Y; \mathbb{Q}) = g(\partial N)$ が成り立つ。これを代入して整理すると

$$\dim H_1(M; \mathbb{Q}) \geq \dim H_1(N; \mathbb{Q}) - g(\partial N)$$

を得る。(この half lives, half dies の一段を落として素朴に評価すると $-2g(\partial N)$ しか出ないので、ここが証明の要点である。) 最後に、ヒーガード種数 $g_H(M)$ は $H_1(M)$ のランクを下から支配するので $g_H(M) \geq \text{rank } H_1(N) - g(\partial N)$ となる。さらに N は X に変形レトラクトするため $H_1(N) \cong H_1(X)$ である。よって $g_H(M) \geq \text{rank } H_1(X) - g(\partial N)$ を得る。 N を埋め込む閉 3 次元多様体 M のヒーガード種数を最小化すれば、 $\text{eg}(N)$ の評価になる。 $\square$

復習: ヒーガード種数と H_1 の階数

第 9 章より、閉向き付け可能 3 次元多様体 M のヒーガード種数を $g_H(M)$ と書き、埋め込み可能種数は $\text{eg}(N) = \min\{g_H(M) \mid N \hookrightarrow M\}$ であった。証明中の「ヒーガード種数は $H_1(M)$ のランクを下から支配する」は次の意味である。 $M = H \cup_{\Sigma_g} H'$ を種数 g のヒーガード分解とすると、 M 内の 1 次元サイクルは、次元の理由でハンドル体 H' の芯のグラフを避けられるので、 H の側へ押し込める。したがって包含が誘導する準同型 $H_1(H) \cong \mathbb{Z}^g \rightarrow H_1(M)$ は全射であり、 $\text{rank } H_1(M) \leq g_H(M)$ が成り立つ。また、 Y を境界付きコンパクト向き付け可能 3 次元多様体とすると、 $\text{Im}(H_1(\partial Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(Y; \mathbb{Q}))$ の次元は $\frac{1}{2} \dim H_1(\partial Y; \mathbb{Q})$ に等しい (half lives, half dies)。とくに $\dim H_1(Y; \mathbb{Q}) \geq \frac{1}{2} \dim H_1(\partial Y; \mathbb{Q})$ である。

この定理は、 $H_1(X)$ のランクが大きい多重分岐曲面ほど、それを実現するために複雑な 3 次元空間が必要になることを示している。一方で、境界種数 $g(\partial N)$ が大きければ、その分だけ N 自身の境界が多くの 1 次元ホモロジーを吸収できるため、周囲の多様体に要求される複雑さは小さくなる。

系 10.16 (S^3 への埋め込みの必要条件). 正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込めるならば、ある近傍 $N \in \mathcal{N}(X)$ に対して $g(\partial N) \geq \text{rank } H_1(X)$ が成り立つ。特に $\max_{N \in \mathcal{N}(X)} g(\partial N) \geq \text{rank } H_1(X)$ である。

Proof. X が S^3 に埋め込めるなら、その近傍 N も S^3 に埋め込める。したがって $\text{eg}(N) = 0$ である。上の不等式に代入すると $0 \geq \text{rank } H_1(X) - g(\partial N)$ となり、 $g(\partial N) \geq \text{rank } H_1(X)$ を得る。 $\square$

具体例: 閉曲面では等号が成り立つ

系の不等式を閉曲面 $X = \Sigma_g$ で確かめる。 Σ_g は S^3 に標準的に埋め込める (種数 g のハンドル体の境界) ので、正則近傍として $N = \Sigma_g \times [-1, 1] \subset S^3$ が取れる。このとき境界は Σ_g が 2 枚で $g(\partial N) = 2g$ である。一方、第 I 巻より $\text{rank } H_1(\Sigma_g) = 2g$ である。したがって $g(\partial N) = 2g \geq 2g = \text{rank } H_1(X)$ となり、不等式はちょうど等号で成り立つ。閉曲面は、境界種数のすべてを H_1 の吸収に使い切っている例であり、この必要条件がこれ以上改良できない (シャープである) ことを示している。

この必要条件は、前章のトーション障害とは別の種類の障害である。 $H_1(X)$ にトーションがなくても、ランクが境界種数に比べて大きすぎる場合には、 S^3 への埋め込みが妨げられる。

10.17 補足：グラフの曲面への埋め込み

グラフの種数を直感的に理解するには、グラフを曲面の骨格として見る視点が役に立つ（第4章参照）。グラフ G が閉曲面 F に埋め込まれ、補空間 $F - G$ の各成分が円板であるとき、その埋め込みを**胞体的埋め込み**という。

このとき、 F は 頂点 + 辺 + 面 からなるセル分割をもつので、頂点数・辺数・面数を第4章と同じく V, E, R と書くと、 $\chi(F) = V - E + R$ が成り立つ。向き付け可能閉曲面 $F = \Sigma_g$ なら $\chi(F) = 2 - 2g$ であるから、 $2 - 2g = V - E + R$ となる。したがって、グラフの曲面への埋め込み問題は、頂点数・辺数・面数から曲面の種数を読む問題にもなる。

例 10.17 (K_5 の種数). K_5 は平面には埋め込めないが、トーラスには埋め込める。したがって、グラフとしての最小種数は $\min g(K_5) = 1$ である。これは、第3章で見た K_5 の非平面性と、トーラス上では交差を避けられるという事実を合わせたものである。

具体例: オイラーの公式で面数を数える

胞体的埋め込みの公式 $2 - 2g = V - E + R$ を $K_5 (V = 5, E = 10)$ で使ってみよう。

- 球面 ($g = 0$) に胞体的に埋め込めたとすると、 $2 = 5 - 10 + R$ より $R = 7$ 。各面は少なくとも3本の辺で囲まれ、各辺はちょうど2つの面に接するので $2E \geq 3R$ 、すなわち $20 \geq 21$ となり矛盾する。これが第3章で見た K_5 の非平面性の勘定である。
- トーラス ($g = 1$) への胞体的埋め込みでは、 $0 = 5 - 10 + R$ より $R = 5$ 。実際、 K_5 はトーラスに面数5で胞体的に埋め込める。

このように公式は、「埋め込めないことの証明」と「埋め込んだときの面数の決定」の両方向に使える。

10.18 グラフの種数と $G \times S^1$ の種数

有限グラフ G に対し、 $G \times S^1$ は正則多重分岐曲面である。このとき、グラフ理論の種数と多重分岐曲面の種数の間には、きわめて美しい関係がある。

定義 10.18 (グラフの最小種数と最大種数). グラフ G を埋め込める向き付け可能閉曲面の種数の最小値を $\min g(G)$ と書く。また、 G が胞体的に埋め込まれる向き付け可能閉曲面の種数の最大値を $\max g(G)$ と書く。

定理 10.19 (グラフと直積多重分岐曲面の種数 [17]). 任意の有限グラフ G に対して、 $\min g(G \times S^1) = 2 \min g(G)$, $\max g(G \times S^1) = 2 \max g(G)$ が成り立つ。ここで左辺は第9章で定義した多重分岐曲面の最小種数・最大種数（近傍を入れる閉3次元多様体のヒーガード種数の最小値・最大

値) であり、正則近傍の境界種数 $g_{\min}, g_{\max}$ ではないことに注意する。

具体例: G が円周のときの検算

G が 1 つの円周 (たとえば三角形グラフ C_3) のとき、 $G \times S^1$ はトーラス T^2 である。 G は S^2 に埋め込み、しかもその補空間は 2 枚の円板なので胞体的であり、 $\min g(G) = \max g(G) = 0$ である。定理より $\min g(T^2) = \max g(T^2) = 0$ となるが、これは「 T^2 の近傍 $T^2 \times [-1, 1]$ が S^3 (ヒーガード種数 0) に入る」ことに他ならない。実際そのとおりである。一方、境界種数の方は $g_{\min}(T^2) = g_{\max}(T^2) = 2$ であり、値がまったく違うことを確認しておこう。

証明の考え方. G が種数 g の閉曲面 F に埋め込まれているとする。すると $G \times S^1 \subset F \times S^1$ である。 $F \times S^1$ のヒーガード種数は、 F の種数と密接に関係し、この構成から上からの評価が得られる。

逆に、 $G \times S^1$ の近傍がある閉 3 次元多様体に埋め込まれているとき、前節の下からの評価を用いる。 $H_1(G \times S^1)$ のランクは、 G の第一ベッチ数と円周方向の 1 次元分から計算できる。また、近傍境界の種数は、 G の曲面への埋め込みにおける面の構造と対応する。これらを組み合わせると、直積多重分岐曲面の種数は、元のグラフの種数のちょうど 2 倍になる。□

復習: 直積の基本群と H_1

第 I 巻より、直積の基本群は $\pi_1(A \times B) \cong \pi_1(A) \times \pi_1(B)$ であり、 H_1 は π_1 のアーベル化であった。したがって $H_1(G \times S^1) \cong H_1(G) \oplus H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)} \oplus \mathbb{Z}$ となり、連結グラフでは $\beta_1(G) = e - v + 1$ なので $\text{rank } H_1(G \times S^1) = \beta_1(G) + 1$ である。たとえば K_5 では $\beta_1(K_5) = 10 - 5 + 1 = 6$ なので $\text{rank } H_1(K_5 \times S^1) = 7$ となる。この階数が、次章で $K_5 \times S^1$ の埋め込み障害を導く鍵になる。

注意 10.20. 上からの評価について一言注意しておく。 G が種数 g の閉曲面 F に埋め込まれるとき、包含 $G \times S^1 \subset F \times S^1$ から直ちに得られる上界は、 $F \times S^1$ のヒーガード種数 $2g + 1$ である。等号を与える上界 $2 \min g(G)$ を得るには、 $F - G$ 内の点 p に対してファイバー $p \times S^1$ に沿うデーンサージェリーを行い、ヒーガード種数 $2g$ の閉 3 次元多様体の中に $G \times S^1$ の近傍を実現するという、より精密な構成を用いる。詳細は [17] を参照。

この定理は、グラフ理論と 3 次元多様体論を直接結びつける。左辺は多重分岐曲面の 3 次元的な不変量であり、右辺はグラフの曲面埋め込みの不変量である。円周との直積を取ることで、グラフの 2 次元的な埋め込みの複雑さが、3 次元的な複雑さとして 2 倍に現れる。

10.19 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. 正則近傍 N の境界種数 $g(\partial N)$ を定義できる。
2. 公式 $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ を理解し、簡単な例で使える。
3. 多重分岐曲面のオイラー標数が、セクターのオイラー標数の和で計算できることを理解する。
4. 最小種数 $g_{\min}(X)$ と最大種数 $g_{\max}(X)$ を定義できる。

5. 正則近傍の境界成分数をたどる考え方を理解する。
6. $H_1(X)$ のトーションが S^3 への埋め込み障害になることを説明できる。
7. 種数と H_1 の階数の関係を理解する。
8. 種数だけでは埋め込み可能性を完全には判定できないことを理解する。

10.20 練習問題

練習問題 10.1. コンパクト向き付け可能 3 次元多様体 N の境界が、種数 2 の閉曲面 1 つとトーラス 2 つからなるとする。このとき $g(\partial N)$ を求めよ。

練習問題 10.2. N が多重分岐曲面 X に変形レトラクトし、 $\chi(X) = -2$ であるとする。もし ∂N の連結成分数が 3 なら、 $g(\partial N)$ を求めよ。

練習問題 10.3. 正則多重分岐曲面 X のセクターが、円板 2 枚とトーラスから 1 つの円板を除いた曲面 1 枚からなるとする。このとき $\chi(X)$ を求めよ。

練習問題 10.4. 閉曲面 Σ_g を多重分岐曲面とみなしたとき、 $g_{\min}(\Sigma_g) = g_{\max}(\Sigma_g) = 2g$ であることを説明せよ。

練習問題 10.5. 連結グラフ G の正則近傍がハンドル体になることを用いて、その境界種数が $e - v + 1$ であることを説明せよ。

練習問題 10.6. 正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるなら、 $H_1(X)$ にトーションが現れない理由を説明せよ。

練習問題 10.7. ある正則多重分岐曲面 X について $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であることが分かった。このとき、 X は S^3 に埋め込めるか。理由を述べよ。

練習問題 10.8. なぜ「種数が大きい」ことだけでは、 S^3 への埋め込み不可能性を示したことになるのか説明せよ。

練習問題 10.9. 正則多重分岐曲面 X の近傍 N について、 $\text{eg}(N) \geq \text{rank } H_1(X) - g(\partial N)$ という下からの評価が何を意味しているか、直感的に説明せよ。

練習問題 10.10. 正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込めるなら、ある近傍 N に対して $g(\partial N) \geq \text{rank } H_1(X)$ が成り立つ理由を説明せよ。

練習問題 10.11. グラフ G の最小種数 $\min g(G)$ と最大種数 $\max g(G)$ を定義せよ。また、胞体的埋め込みにおいて $2 - 2g = V - E + R$ (V, E, R は頂点数・辺数・面数) が成り立つ理由を述べよ。

練習問題 10.12. 任意の有限グラフ G に対して $\min g(G \times S^1) = 2 \min g(G)$, $\max g(G \times S^1) = 2 \max g(G)$ が成り立つという定理の意味を説明せよ。

10.21 次章への橋渡し

本章では、多重分岐曲面の正則近傍の種数を調べ、最小種数と最大種数を導入した。また、オイラー標数、境界成分数、ホモロジー群が、種数を通して埋め込み障害に関わることを見た。

次章では、具体的な 2 次元複体として、グラフと円周の直積 $G \times S^1$ を考える。特に、 $K_5 \times S^1$, $K_{3,3} \times S^1$ が 3 次元空間に埋め込めない理由を考察する。これは、グラフの非平面性が 2 次元複体の S^3 への埋め込み障害としてどのように現れるかを見る重要な例である。

ブリッジング・ノート：種数から直積型複体へ

第 10 章までは、多重分岐曲面の正則近傍とその境界種数を用いて、 S^3 への埋め込み障害を調べた。第 11 章からは、グラフと円周の直積 $G \times S^1$ を中心に、より具体的な臨界的複体を扱う。この移行は突然の話題変更ではない。

グラフ G は 1 次元の組合せ的対象である。これに円周 S^1 を掛けると、頂点は円周に、辺はアニュラスに変わる。つまり、 $G \times S^1$ は多重分岐曲面の典型例である。この見方により、クラトフスキーの定理で現れた K_5 と $K_{3,3}$ が、3 次元空間への埋め込み問題の中に再び現れる。

グラフの平面性 $\longrightarrow$ 多重分岐曲面の種数 $\longrightarrow$ 直積型複体の臨界性

第 11 章以降では、この流れを具体例に沿って追う。特に、 $K_5 \times S^1$ や $K_{3,3} \times S^1$ は、平面グラフ論の障害が 3 次元的な障害へ持ち上がる様子を示す基本例である。

第 11 章

グラフと円周の直積

研究ノート： $G \times S^1$ はグラフ障害の持ち上げである

$G \times S^1$ は、グラフ G の各頂点を円周に、各辺をアニュラスに置き換えた空間と見なせる。この操作により、平面グラフの障害が 3 次元空間への埋め込み障害として現れる。したがって、 K_5 や $K_{3,3}$ の非平面性は、第 11 章以降の臨界的複体の構成に直接つながる。

学習の指針

本章は、第 3～4 章のグラフの平面性 (オイラーの公式、クラトフスキーの定理) と、第 8～10 章の多重分岐曲面 (ブランチ、セクター、正則近傍) とを橋渡しする章である。初出の道具は、直積空間のセル構造とキュネットの公式だが、どちらも本文と補足ボックスの範囲で足りる。まず $C_3 \times S^1$ や $K_4 \times S^1$ のような具体例で手を動かし、そのうえで「 G が平面的であることと $G \times S^1$ が S^3 に埋め込めることが同値になる」という本章の主定理の流れをつかむこと。章の後半では、第 12 章の主役となる「臨界的複体」の定義を先取りする。

11.1 本章の目標

前章では、多重分岐曲面の種数と埋め込み障害について学んだ。本章では、具体的な 2 次元複体として、グラフと円周の直積 $G \times S^1$ を考える。

グラフ G は 1 次元複体であり、円周 S^1 も 1 次元複体である。したがって、その直積 $G \times S^1$ は 2 次元的な空間になる。特に、 G の各辺は円周方向に動くことで環状の面を作り、 G の各頂点は円周方向に動くことで円周状のブランチを作る。

この意味で、 $G \times S^1$ は多重分岐曲面の重要な例である。

本章の中心となる問いは次である。

グラフ G の平面性は、2 次元複体 $G \times S^1$ の S^3 への埋め込み可能性にどのように反映されるか。

特に、グラフの平面性における基本障害であった K_5 , $K_{3,3}$ から得られる 2 次元複体 $K_5 \times S^1$, $K_{3,3} \times S^1$ が、 S^3 に埋め込めないことを直観的に理解する。

本章の目標は次の通りである。

- グラフと円周の直積 $G \times S^1$ を 2 次元複体として理解する。

- $G \times S^1$ が多重分岐曲面になることを説明できる。
- 頂点がブランチ、辺がセクターに対応することを理解する。
- G が平面的なら $G \times S^1$ が S^3 に埋め込めることを理解する。
- $K_5 \times S^1$ と $K_{3,3} \times S^1$ が基本的な埋め込み障害になる理由を理解する。

11.2 直積空間の復習

位相空間 X, Y に対し、その直積 $X \times Y$ は、点の組 (x, y) ($x \in X, y \in Y$) 全体からなる空間である。

本章では、 X としてグラフ G を、 Y として円周 S^1 を取る。すると $G \times S^1$ の点は (x, t) ($x \in G, t \in S^1$) という形で表される。

直感的には、 G の各点を円周方向に一周動かして得られる空間である。

例 11.1 (1点と円周の直積). G が1点だけからなるグラフであれば、 $G \times S^1 \cong S^1$ である。

例 11.2 (線分と円周の直積). $G = [0, 1]$ が1本の線分であれば、 $G \times S^1 = [0, 1] \times S^1$ である。これは環状の曲面、すなわちアニュラスである。

例 11.3 (円周と円周の直積). $G = S^1$ であれば、 $G \times S^1 = S^1 \times S^1 = T^2$ であり、これはトーラスである。

これらの例から分かるように、グラフと円周の直積は、グラフの各部分を円周方向に厚くした空間と見ることができる。

直観: $G \times S^1$ の思い描き方

$G \times S^1$ を一度に思い描こうとせず、部品ごとに見るのがよい。各辺 e からは円柱 (アニュラス) $e \times S^1$ ができ、各頂点 v からは円周 $v \times S^1$ ができる。そして、「辺 e が頂点 v に接続している」というグラフの情報は、「円柱 $e \times S^1$ の境界円周を、円周 $v \times S^1$ にそのまま貼り合わせる」という組み立ての指示に翻訳される。つまり $G \times S^1$ とは、辺の本数だけ用意した円柱を、グラフの接続関係の通りに境界円周で貼り合わせた空間である。1つの頂点に3本以上の辺が集まると、1本の円周に3枚以上の円柱が貼り付き、そこが曲面にならない「分岐」になる。

具体例:Y字グラフと円周の直積

中心の頂点 c から3本の辺で3個の頂点を結んだY字グラフ (星グラフ $K_{1,3}$) を G とする。 $G \times S^1$ は、3枚のアニュラス $e_1 \times S^1, e_2 \times S^1, e_3 \times S^1$ を、それぞれ一方の境界円周で中心の円周 $c \times S^1$ に貼り合わせた空間である。背に3枚のページが付いた本を、背の方向に丸めて円周にした形を想像するとよい。円周 $c \times S^1$ に沿って3枚の面が出会うので、 $G \times S^1$ は曲面ではなく、 $c \times S^1$ を分岐部分としてもつ多重分岐曲面になる。残りの3個の頂点に対応する円周には、それぞれ1枚のアニュラスだけが貼り付いている。

11.3 セル構造

グラフ G を 1 次元単体的複体とする。 G の頂点集合を $V(G)$ 辺集合を $E(G)$ と書く。

円周 S^1 には、1 つの 0 セル p と 1 つの 1 セル a からなる CW 構造を入れることができる。このとき、直積 $G \times S^1$ には自然なセル構造が入る。

0 セル: $v \times p$ ($v \in V(G)$).

1 セル: $e \times p$ ($e \in E(G)$), および $v \times a$ ($v \in V(G)$).

2 セル: $e \times a$ ($e \in E(G)$).

つまり、 G の各辺 e は、円周方向に動くことで $e \times S^1$ という環状の 2 次元部分を作る。

復習: 直積の CW 構造

X, Y が CW 複体のとき、直積 $X \times Y$ には、 X の i セル σ と Y の j セル τ の直積 $\sigma \times \tau$ を $(i+j)$ セルとする CW 構造が入る。上のセルの一覧は、 G のセル (v たちと e たち) と S^1 のセル (p と a) のすべての組を作ったものにほかならない。1 セルが $e \times p$ と $v \times a$ の 2 種類あるのは、次元の分け方に $1 = 1 + 0$ と $1 = 0 + 1$ の 2 通りがあるからである。

例 11.4. G が 1 本の辺 e からなるとき、 $e \times S^1$ はアニュラスである。その 2 つの境界成分は、辺 e の両端点 u, v に対して $u \times S^1$, $v \times S^1$ である。

このように、 $G \times S^1$ では、頂点が円周になり、辺がアニュラスになる。これが、多重分岐曲面としての構造につながる。

11.4 多重分岐曲面としての $G \times S^1$

復習: ブランチ・セクター・プレブランチ

多重分岐曲面とは、曲面でない点の集合が有限個の円周の非交和になっている 2 次元複体であった (第 8 章)。その円周たちを**ブランチ**、残りの曲面片の閉包を**セクター**と呼ぶ。セクターの境界成分はブランチに巻き付いて貼り付き、貼り付け前の境界成分を**プレブランチ**、巻き付く回数をその**次数**と呼んだ。1 本のブランチに貼り付くプレブランチの次数がすべて等しいとき、そのブランチは正則であるといい、共通の次数を巻き付き数と呼んだ。すべてのブランチが正則であるとき、正則多重分岐曲面というのであった (第 9 章)。

$G \times S^1$ を多重分岐曲面として見ると、次の対応がある。

グラフ G のデータ	$G \times S^1$ のデータ
頂点 v	ブランチ $v \times S^1$
辺 e	セクター $e \times S^1$
辺の端点	セクターの境界成分の貼り付き

辺 e が頂点 u と v を結んでいるとする。このとき $e \times S^1$ はアニュラスであり、その境界は $(u \times S^1) \cup (v \times S^1)$ である。したがって、アニュラス状のセクターが、2 つのブランチに貼り付いて

いると見なせる。

命題 11.5. 有限グラフ G に対し、 $G \times S^1$ は多重分岐曲面である。そのブランチは $v \times S^1$ ($v \in V(G)$) であり、そのセクターは $e \times S^1$ ($e \in E(G)$) である。

Proof. G の各頂点 v に対して、 $v \times S^1$ は円周である。これらは多重分岐曲面のブランチになる。

また、各辺 e に対して、 $e \times S^1$ はアニュラスである。これはコンパクトな境界付き曲面であり、セクターになる。その境界成分は、 e の端点に対応するブランチに自然に貼り付く。

したがって、 $G \times S^1$ はブランチとセクターから作られる多重分岐曲面である。 $\square$

11.5 ブランチの次数

$G \times S^1$ のブランチ $v \times S^1$ を考える。ここに貼り付くセクターは、 G において頂点 v に接続する辺に対応する。したがって、ブランチ $v \times S^1$ に集まるセクターの数は、グラフの頂点 v の次数 $\deg_G(v)$ である。

各セクター $e \times S^1$ の境界成分は、対応するブランチに 1 回巻き付いて貼り付く。したがって、各プレブランチの次数は 1 である。

命題 11.6. $G \times S^1$ において、ブランチ $v \times S^1$ の次数は $\deg_G(v)$ である。また、各プレブランチの貼り付き次数は 1 であり、したがって各ブランチは正則で、巻き付き数は 1 である。したがって、 $G \times S^1$ は正則多重分岐曲面である。

Proof. 頂点 v に接続する各辺 e に対して、アニュラス $e \times S^1$ の一方の境界成分が $v \times S^1$ に貼り付く。この貼り付きは $S^1 \rightarrow S^1$ の恒等写像に対応するので、次数は 1 である。

したがって、 $v \times S^1$ に貼り付くプレブランチの数は $\deg_G(v)$ であり、すべての次数は 1 である。よってブランチの次数は $\deg_G(v)$ であり、次数がすべて等しいのでブランチは正則で、巻き付き数は 1 である。 $\square$

具体例: $K_4 \times S^1$ のブランチ構造

4 頂点の完全グラフ K_4 は、頂点数 4、辺数 6 で、各頂点の次数は 3 である。したがって $K_4 \times S^1$ は、ブランチが 4 本の円周、セクターが 6 枚のアニュラスからなり、各ブランチに 3 枚のアニュラスが集まる正則多重分岐曲面である。各ブランチのまわりの様子は、先の Y 字グラフの例で見た「3 枚のページをもつ本の背」と同じである。なお K_4 は平面的なので (三角形の内部に 1 点を置いて 3 頂点と結べば平面に描ける)、後の節で見るように $K_4 \times S^1$ は S^3 に埋め込める。ここが $K_5 \times S^1$ との決定的な違いになる。

この命題により、グラフの組合せ的な情報が、多重分岐曲面のブランチ構造として現れることが分かる。

11.6 オイラー標数とホモロジー

直積空間のオイラー標数には $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ という公式がある。円周のオイラー標数は $\chi(S^1) = 0$ であるから、 $\chi(G \times S^1) = \chi(G)\chi(S^1) = 0$ である。

命題 11.7. 任意の有限グラフ G に対して、 $\chi(G \times S^1) = 0$ である。

Proof. セル構造を用いて直接計算する。 G の頂点数を v 、辺数を e とする。前に見たように、 $G \times S^1$ のセル数は $c_0 = v$, $c_1 = e + v$, $c_2 = e$ である。したがって $\chi(G \times S^1) = c_0 - c_1 + c_2 = v - (e + v) + e = 0$. $\square$

連結グラフ G の第一ベッチ数を $\beta_1(G) = e - v + 1$ とする。このとき、キュネット公式を用いれば $H_1(G \times S^1) \cong H_1(G) \oplus H_1(S^1)$ である。したがって $H_1(G \times S^1) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)+1}$.

また、

$$H_2(G \times S^1) \cong H_1(G) \otimes H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)}$$

である。

復習: キュネットの公式 (S^1 との直積の場合)

キュネットの公式とは、直積空間のホモロジーを因子のホモロジーから計算する公式である。一方の因子 Y のホモロジー群がすべて自由アーベル群のとき (たとえば $Y = S^1$)、トーシヨンの補正項は現れず、

$$H_n(X \times Y) \cong \bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y)$$

が成り立つ。 $Y = S^1$ では $H_0(S^1) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ なので、これは $H_n(X \times S^1) \cong H_n(X) \oplus H_{n-1}(X)$ と簡約される。連結グラフ G に対して $H_0(G) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)}$, $H_2(G) = 0$ を代入すれば、本文の H_1 と H_2 の式が同時に得られる。

具体例: トーラスで公式を検算する

$G = C_3$ (三角形グラフ) とすると $G \cong S^1$ なので、 $G \times S^1 \cong T^2$ はトーラスである。セル数は $c_0 = 3$, $c_1 = 3 + 3 = 6$, $c_2 = 3$ で、 $\chi = 3 - 6 + 3 = 0$ となり、 $\chi(T^2) = 0$ と合う。また $v = 3$, $e = 3$ より $\beta_1(C_3) = 3 - 3 + 1 = 1$ だから、上の公式は $H_1(C_3 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(C_3 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ を与える。これは第 I 巻で計算したトーラスのホモロジー $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ と一致する。

例 11.8. $G = K_5$ の場合、 $v = 5$, $e = 10$ なので $\beta_1(K_5) = 10 - 5 + 1 = 6$ 。したがって $H_1(K_5 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^7$, $H_2(K_5 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^6$ 。

例 11.9. $G = K_{3,3}$ の場合、 $v = 6$, $e = 9$ なので $\beta_1(K_{3,3}) = 9 - 6 + 1 = 4$ 。したがって $H_1(K_{3,3} \times S^1) \cong \mathbb{Z}^5$, $H_2(K_{3,3} \times S^1) \cong \mathbb{Z}^4$ 。

ここで重要なのは、これらのホモロジー群にはトーシヨンが現れないことである。したがって、第 7 章のトーシヨン障害だけでは、 $K_5 \times S^1$, $K_{3,3} \times S^1$ の非埋め込み性を検出できない。より幾何学的な障害が必要になる。

直観: ホモロジーは平面性を見ていない

上の計算をよく見ると、 $H_1(G \times S^1)$ と $H_2(G \times S^1)$ は、 G の第一ベッチ数 $\beta_1(G)$ だけで決まっている。ところが β_1 は平面性とは無関係である。たとえば、6 個の三角形を 1 つの頂点で束ねた平面的グラフ G' は $\beta_1(G') = 6$ をもつので、 $G' \times S^1$ のホモロジー群は $K_5 \times S^1$ のも

のとすべて同型になる。それにもかかわらず、 $G' \times S^1$ は S^3 に埋め込め、 $K_5 \times S^1$ は埋め込めない。ホモロジーのような代数的不変量だけでは埋め込み可能性を判定しきれないことが、この比較からもよく分かる。

11.7 平面的グラフから得られる埋め込み

まず、 G が平面的である場合を考える。このとき、 G は平面に交差なしで描ける。さらに、コンパクト性により、十分大きな円板 D^2 の中に $G \subset D^2$ として埋め込める。

すると、直積を取って $G \times S^1 \subset D^2 \times S^1$ を得る。ここで $D^2 \times S^1$ はソリッドトーラスであり、これは S^3 に標準的に埋め込める。

したがって、次が成り立つ。

命題 11.10. 有限グラフ G が平面的ならば、 $G \times S^1$ は S^3 に埋め込める。

Proof. G が平面的なら、 G を円板 D^2 に埋め込める。直積を取ると $G \times S^1 \subset D^2 \times S^1$ である。 $D^2 \times S^1$ はソリッドトーラスであり、 S^3 に埋め込める。したがって $G \times S^1 \hookrightarrow S^3$ が得られる。□

この命題は、グラフの平面性が、直積複体の 3 次元球面への埋め込み可能性を与えることを示している。

11.8 非平面的グラフの場合

次に、 G が非平面的な場合を考える。クラトフスキーの定理によれば、有限グラフ G が非平面的であるならば、 G は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を部分グラフとして含む。

部分分割は、グラフの多面体としての同相型を変えない。したがって、 K_5 の部分分割 H について $H \times S^1 \cong K_5 \times S^1$ であり、 $K_{3,3}$ の部分分割についても同様である。

また、 H が G の部分グラフなら、 $H \times S^1 \subset G \times S^1$ である。したがって、 $G \times S^1$ の埋め込み可能性を調べる上で、基本となる障害は $K_5 \times S^1$ 、 $K_{3,3} \times S^1$ である。

具体例: 辺数の不等式で非平面性を検算する

第 3 章の不等式を思い出そう。頂点数 $v \geq 3$ の連結な平面的単純グラフでは $e \leq 3v - 6$ が、さらに三角形をもたなければ $e \leq 2v - 4$ が成り立つのであった。 K_5 は $v = 5$ 、 $e = 10$ で $3v - 6 = 9 < 10$ となるので非平面的である。 $K_{3,3}$ は二部グラフで三角形をもたず、 $v = 6$ 、 $e = 9$ で $2v - 4 = 8 < 9$ となるので非平面的である。一方、 K_5 から辺を 1 本除いた $K_5 - e$ は辺数 $9 \leq 9$ でこの障害を通過し、実際に平面に描ける ($K_{3,3} - e$ も同様)。この「辺を 1 本除くと平面的になる」という性質が、本章の最後で見る臨界性の議論で効いてくる。

定理 11.11 (基本障害). 2 次元複体 $K_5 \times S^1$ および $K_{3,3} \times S^1$ は、 S^3 に埋め込めない。

証明の考え方. 鍵となるのは次の補題である：

グラフ G に対して、 $G \times S^1$ が S^3 に埋め込めるならば、

G は S^2 に埋め込める。

証明の概略は次の通りである。 G の全域木 T を取ると、 $T \times S^1$ の正則近傍はソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ であり、その中で $T \times S^1$ は垂直に（各ファイバーが S^1 方向に沿うように）埋め込まれる。残りの各辺 e に対応するアニュラス $e \times S^1$ は、ソリッドトーラスの外部の中で、各境界成分がメリディアンとちょうど 1 回交わるアニュラスになる。結び目理論の標準的な補題により、このようなアニュラスは境界平行であるかケーブリングアニュラスであり、いずれの場合も同位変形によってすべてのアニュラスをソリッドトーラスの中に垂直に押し込める。垂直な $G \times S^1 \subset D^2 \times S^1$ を D^2 に射影すれば、 G の平面埋め込みが得られる。

この補題の対偶により、 K_5 と $K_{3,3}$ は平面に埋め込めないから、 $K_5 \times S^1$ と $K_{3,3} \times S^1$ は S^3 に埋め込めない。□

復習: 全域木とメリディアン

連結グラフ G の**全域木**とは、 G のすべての頂点を含み、閉路をもたない連結な部分グラフ T のことであった（第 8 章でも復習した）。全域木は必ず存在し、その辺数は $v-1$ である。また、ソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ に対し、円板 $D^2 \times \{t\}$ の境界円周を**メリディアン**という。メリディアンはソリッドトーラスの中では円板を張るが、境界トーラスの上では 1 点に縮められない曲線である。

直観: 証明の論法を整理する

この証明の本体は、定理そのものではなく、補題「 $G \times S^1$ が S^3 に埋め込めるならば G は平面的」の方である。流れは次の 3 段階に分かれる。(1) まず全域木の部分 $T \times S^1$ を、同位変形でソリッドトーラスの中の「垂直な」標準形（各点が S^1 方向のファイバーに沿う形）に直す。(2) 残りの各辺のアニュラスは、境界がメリディアンと 1 回ずつ交わるという条件から形が強く制限され、やはりソリッドトーラスの中へ垂直に押し込める。(3) 全体が垂直になれば、 S^1 方向をつぶす射影 $D^2 \times S^1 \rightarrow D^2$ で G の平面描画が得られる。最後にこの補題の対偶を取れば、 K_5 と $K_{3,3}$ の非平面性（第 3～4 章）から定理が従う。さらに前節の命題と合わせると、「 G が平面的」と「 $G \times S^1$ が S^3 に埋め込める」は同値であると分かる。

注意 11.12. この定理は、単なるホモロジーの計算だけでは分らない。実際、 $K_5 \times S^1$ や $K_{3,3} \times S^1$ の H_1 にはトーションがない。したがって、ここでの障害は、トーション障害よりも幾何学的なものである。

注意 11.13. この定理は M. Skopenkov [25] によっても示されている。また、第 10 章の種数定理からも従う：もし $K_5 \times S^1$ が S^3 に埋め込めるなら $\min g(K_5 \times S^1) = 0$ となり、したがって $2 \min g(K_5) = 0$ 、すなわち K_5 が平面的になって矛盾する。

11.9 グラフの平面性との対応

以上をまとめると、次の対応が見えてくる。

グラフ G の性質	直積 $G \times S^1$ の性質
G が平面的	$G \times S^1$ は S^3 に埋め込める
G が K_5 型障害を含む	$K_5 \times S^1$ 型障害を含む
G が $K_{3,3}$ 型障害を含む	$K_{3,3} \times S^1$ 型障害を含む

この対応により、グラフの平面性の問題が、2次元複体の S^3 への埋め込み問題へ持ち上がる。

系 11.14. 有限グラフ G が K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を部分グラフとして含むならば、 $G \times S^1$ は S^3 に埋め込めない。

Proof. G が K_5 の部分分割 H を含むとする。このとき $H \times S^1 \subset G \times S^1$ であり、 $H \times S^1 \cong K_5 \times S^1$ である。もし $G \times S^1$ が S^3 に埋め込めるなら、その部分空間である $H \times S^1$ も S^3 に埋め込める。しかし、これは基本障害定理に反する。したがって、 $G \times S^1$ は S^3 に埋め込めない。

$K_{3,3}$ の場合も同様である。 □

クラトフスキーの定理を用いれば、非平面的グラフは必ず K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。したがって、直感的には次のように言える。

$G \times S^1$ が S^3 に埋め込めるかどうかには、 G の平面性が深く関わっている。

11.10 $K_5 \times S^1$ の見方

K_5 は5個の頂点と10本の辺をもつ。したがって、 $K_5 \times S^1$ は次のような多重分岐曲面である。

- ブランチは5本の円周である。
- セクターは10枚のアニュラスである。
- 各ブランチには4枚のアニュラスが集まる。

各ブランチの次数は4であり、すべてのプレブランチの貼り付き次数は1である。したがって、 $K_5 \times S^1$ は正則多重分岐曲面である。

$\chi(K_5 \times S^1) = 0$ であり、 $H_1(K_5 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^7$ である。このように、ホモロジーだけを見ると非常に素直な空間である。それにもかかわらず、 S^3 には埋め込めない。

この事実は、埋め込み障害がホモロジーだけでは尽くされないことを示している。

11.11 $K_{3,3} \times S^1$ の見方

$K_{3,3}$ は6個の頂点と9本の辺をもつ。したがって、 $K_{3,3} \times S^1$ は次のような多重分岐曲面である。

- ブランチは6本の円周である。
- セクターは9枚のアニュラスである。
- 各ブランチには3枚のアニュラスが集まる。

各ブランチの次数は3であり、すべてのプレブランチの貼り付き次数は1である。これも正則多重分岐曲面である。

また、 $\chi(K_{3,3} \times S^1) = 0$ であり、 $H_1(K_{3,3} \times S^1) \cong \mathbb{Z}^5$ である。

$K_{3,3}$ は二部グラフであり、三角形をもたない。しかし、平面に埋め込むことはできない。その非平面性が、円周との直積を通して、 S^3 への 2 次元複体の埋め込み不可能性として現れる。

11.12 なぜ円周との直積を考えるのか

ここで、なぜ円周 S^1 との直積を考えるのかを整理しておく。

第一に、 $G \times S^1$ は、1 次元のグラフから自然に作られる 2 次元複体である。これにより、グラフの平面性という古典的な問題を、2 次元複体の 3 次元空間への埋め込み問題へ移すことができる。

第二に、 $G \times S^1$ は多重分岐曲面として非常に扱いやすい。すべてのセクターはアニュラスであり、すべての貼り付き次数は 1 である。したがって、ブランチ構造はグラフの次数そのものを反映する。

第三に、 $K_5 \times S^1$ と $K_{3,3} \times S^1$ は、2 次元複体の S^3 への埋め込み障害の基本例になる。これは、クラトフスキーの定理における K_5 と $K_{3,3}$ の役割に対応している。

グラフの禁止対象を円周方向に持ち上げることで、2 次元複体の禁止対象が得られる。

この見方が、第 12 章で扱う臨界的複体の構成につながる。

11.13 臨界性への橋渡し

本章の $G \times S^1$ は、その臨界性を考えるための最初の具体例である。そこで、第 12 章に進む前に、臨界性の定義を少し先取りしておく。

ナイーブには、臨界的複体とはそれ自身は埋め込めないが、任意の点を取り除くと埋め込める複体である。しかし、点を取り除くと空間は非コンパクトになり、単体的複体として扱いにくくなる。そこで、点そのものではなく、十分細かく細分した後の小さな開星状近傍を取り除く。

定義 11.15 (星状近傍による臨界性). 単体的複体 X が空間 Y に関して**臨界的**であるとは、次を満たすことをいう。

1. X は Y に埋め込めない。
2. 任意の $r \geq 2$ と、 r 回重心細分 $X^{(r)}$ の任意の単体 σ に対して、開星状近傍 $\text{ost}(\sigma)$ を取り除いた $|X^{(r)} \setminus \text{ost}(\sigma)|$ は Y に埋め込める。

この定義では、「どの部分を少し取り除いても埋め込める」という最小性を保ちつつ、残った空間をコンパクトな単体的複体として扱える。すべての $r \geq 2$ を量化するのは、さらに細かい細分では削除する近傍がより小さくなり、可埋め込み性がより強い条件になるためである。

復習: 重心細分と開星状近傍

単体的複体 X の重心細分 X' とは、各単体の重心を新しい頂点として、単体を細かく分け直したものであった (第 I 巻)。これを r 回繰り返したものを $X^{(r)}$ と書く。単体 σ の**開星状近傍** $\text{ost}(\sigma)$ とは、 σ を面として含む単体たちの内部の和集合のことで、 σ のまわりの開集合である。その補集合 $X^{(r)} \setminus \text{ost}(\sigma)$ は $X^{(r)}$ の部分複体になるので、残った空間はふたたびコンパクトな単体的複体として扱える。ここが、ナイーブに「1 点を取り除く」定義との違いである。

11.14 低次元の臨界複体

臨界性の定義が自然であることは、低次元の例を見ると分かりやすい。空間 Y に関する古典的臨界複体の集合を $\Gamma_{cl}(Y)$ と書く。

命題 11.16 (円周に関する臨界複体). $\Gamma_{cl}(S^1) = \{S^1 \sqcup \{*\}\}$ である。

証明の考え方. S^1 に埋め込めるコンパクト 1 次元複体は、円周の部分集合として実現できるものである。連結なグラフで次数 3 以上の頂点をもつものは S^1 に入らないが、そのような分岐点から離れた小部分を取り除いても、次数 3 以上の構造は残る。したがって臨界的ではない。非連結の場合、各成分は S^1 に入るが、全体としては入らない最小例を考えると、 S^1 と孤立点の非交和 $S^1 \sqcup \{*\}$ が得られる。□

具体例: $S^1 \sqcup \{*\}$ が臨界的であることの検証

定義の 2 条件を直接確かめてみよう。まず、 $S^1 \sqcup \{*\}$ は S^1 に埋め込めない。実際、円周から円周への連続な単射があると、その像はコンパクトかつ連結な部分集合、すなわち 1 点、弧、または S^1 全体である。1 点や弧は $\mathbb{R}$ の部分集合と同相であり、円周はそこには埋め込めないから、像は S^1 全体になる。すると孤立点 $*$ の行き先が残っておらず、単射にできない。次に、開星状近傍を 1 つ取り除いた場合を見る。円周成分の単体から取り除けば、残りは閉じた弧と孤立点であり、これは S^1 の中に弧とその外側の 1 点として埋め込める。孤立点側を取り除けば、残りは S^1 自身であり、これも埋め込める。したがって $S^1 \sqcup \{*\}$ は S^1 に関して臨界的である。

命題 11.17 (球面に関する臨界複体). $\Gamma_{cl}(S^2) = \{K_5, K_{3,3}, S^2 \sqcup \{*\}\}$ である。

証明の考え方. 1 次元複体については、クラトフスキーの定理により、平面または球面に埋め込めない最小のグラフは K_5 と $K_{3,3}$ である。これらは任意の辺を取り除くと平面的になるので、臨界的である。2 次元成分をもつ場合には、球面 S^2 自身と孤立点の非交和が、 S^2 に埋め込めない最小例になる。 S^2 の小さな開円板を取り除けば円板になり、孤立点とともに S^2 に入る。また孤立点側を取り除けば S^2 が残る。したがって、 $S^2 \sqcup \{*\}$ は臨界的である。□

注意 11.18 (埋め込み型による臨界性との違い). 上の 2 つの命題は、星状近傍を取り除く定義 (削除型臨界性) に基づくものである。第 13 章で導入する埋め込み型の半順序による臨界性では、リストが少し広がる。 n 次元球体とその内点に一端を付けた弧の和を $B^{n\perp}$ と書くと、埋め込み型の意味での極小障害は $\{[B^{1\perp}], [S^1 \sqcup \{*\}]\}$ (S^1 の場合)、 $\{[K_5], [K_{3,3}], [B^{2\perp}], [S^2 \sqcup \{*\}]\}$ (S^2 の場合、Mardešić–Segal) となる。 $B^{n\perp}$ は境界型の点をもつ。古典的臨界複体は境界型の点をもてない：境界点の十分小さい開星を削除した空間には、境界カラーを押し込むことで元の空間自体を再び埋め込めるため、削除後が S^n に埋め込めるなら元も埋め込めてしまう。したがって $B^{n\perp}$ は古典的には臨界的でない。しかし埋め込み型の順序では、その真下の型はすべて埋め込めるので極小障害になる。削除型と埋め込み型の違いが最初に現れる例である。

この結果は、臨界性の定義がクラトフスキーの定理と整合していることを示している。すなわち、 S^2 への埋め込みに関しては、臨界的な 1 次元障害として K_5 と $K_{3,3}$ が再び現れる。

11.15 $K_5 \times S^1$ と臨界性

本章で見たように、 $K_5 \times S^1$ と $K_{3,3} \times S^1$ は S^3 に埋め込めない基本例である。このとき、 K_5 や $K_{3,3}$ の 1 本の辺を削除すると平面的になるので、対応するアニュラスセクターを削除した $(K_5 - e) \times S^1$, $(K_{3,3} - e) \times S^1$ は S^3 に埋め込める。

この意味で、 $K_5 \times S^1$ と $K_{3,3} \times S^1$ は、 S^3 に対する臨界的複体の候補である。ただし、星状近傍を取り除く厳密な臨界性や、より一般の単純化操作に関する臨界性を確かめるには、第 12 章で扱うような詳細な議論が必要になる。

注意 11.19 (錐の例が示す注意). K_5 の錐 $\text{Cone } K_5$ は、 S^3 に埋め込めない 2 次元複体の典型例である。しかし、 $\text{Cone } K_5$ の底面から遠い三角形の内部を少し取り除いても、底の K_5 に由来する障害は残る。したがって、 $\text{Cone } K_5$ はナイーブな意味では「最小の障害」とは言いにくい。この例は、臨界性を定義するときに、どの単純化操作を採用するかが本質的であることを示している。

11.16 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. グラフ G と円周 S^1 の直積 $G \times S^1$ を具体的に説明できる。
2. 点、辺、円周との直積の基本例を理解する。
3. $G \times S^1$ のセル構造を説明できる。
4. $G \times S^1$ が多重分岐曲面であることを理解する。
5. 頂点がブランチ、辺がアニュラスセクターに対応することを説明できる。
6. G が平面的なら $G \times S^1$ が S^3 に埋め込めることを説明できる。
7. $K_5 \times S^1$ と $K_{3,3} \times S^1$ が基本的な埋め込み障害であることを理解する。
8. ホモロジーだけではこれらの非埋め込み性を検出できないことを理解する。

11.17 練習問題

練習問題 11.1. G が 1 本の線分であるとき、 $G \times S^1$ がアニュラスであることを説明せよ。

練習問題 11.2. $G = S^1$ のとき、 $G \times S^1$ がトーラスであることを説明せよ。

練習問題 11.3. 有限グラフ G の頂点数を v 、辺数を e とする。 $G \times S^1$ の 0 セル、1 セル、2 セルの数を求め、 $\chi(G \times S^1) = 0$ を確認せよ。

練習問題 11.4. G を連結グラフとし、 $\beta_1(G) = e - v + 1$ とする。このとき $H_1(G \times S^1) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)+1}$ となる理由を説明せよ。

練習問題 11.5. $K_5 \times S^1$ について、ブランチの本数、セクターの枚数、各ブランチの次数を求めよ。

練習問題 11.6. $K_{3,3} \times S^1$ について、ブランチの本数、セクターの枚数、各ブランチの次数を求めよ。

練習問題 11.7. G が平面的なら $G \times S^1$ が S^3 に埋め込める理由を、 $G \subset D^2$, $G \times S^1 \subset D^2 \times S^1$ を用いて説明せよ。

練習問題 11.8. なぜ $K_5 \times S^1$ や $K_{3,3} \times S^1$ の非埋め込み性は、 H_1 のトーションだけでは検出できないのか説明せよ。

練習問題 11.9. 点を 1 つ取り除くというナイーブな臨界性の定義には、どのような問題があるか説明せよ。

練習問題 11.10. 任意の $r \geq 2$ に対する重心細分 $X^{(r)}$ と開星状近傍 $\text{ost}(\sigma)$ を用いた、細分に頑健な古典的臨界性の定義を述べよ。

練習問題 11.11. $\Gamma_{\text{cl}}(S^1) = \{S^1 \sqcup \{*\}\}$ となる理由を説明せよ。

練習問題 11.12. $\Gamma_{\text{cl}}(S^2) = \{K_5, K_{3,3}, S^2 \sqcup \{*\}\}$ という結果が、クラトフスキーの定理とどのように対応しているか説明せよ。

11.18 次章への橋渡し

本章では、グラフと円周の直積 $G \times S^1$ を多重分岐曲面として理解した。特に、グラフの頂点がブランチに、辺がアニュラスセクターに対応することを見た。

また、 G が平面的なら $G \times S^1$ は S^3 に埋め込める一方で、 $K_5 \times S^1$, $K_{3,3} \times S^1$ は S^3 に埋め込めない基本障害になることを学んだ。

次章では、これらの例を出発点として、より一般の臨界的複体を扱う。特に、 $(G \times S^1) \cup H$ という形の 2 次元複体を考え、どのような条件のもとで S^3 に関して臨界的になるかを調べる。これは、クラトフスキー型の分類を 2 次元複体へ拡張するための第一歩である。

第 12 章

臨界的複体の具体例

本章と第 13 章の臨界性の違い

本章で扱う臨界性は、主に「頂点の開星を取り除く」「辺を縮約する」などの具体的な操作に対する古典的な臨界性である。一方、第 13 章では、複体どうしの相互 PL 埋め込みによって定まる埋め込み型の半順序を用いて臨界性を定義する。前者は操作に基づく臨界性、後者は埋め込み型の比較に基づく臨界性である。この違いを意識しておく、なぜ第 13 章で順序構造を導入するのかを理解しやすい。

研究ノート：分類定理の読み方

臨界的複体の分類では、個々の複体を覚えることよりも、どの操作に対して最小性を要求しているかを理解することが重要である。同じ複体でも、削除に対する最小性、縮約に対する最小性、埋め込み型の半順序に対する最小性は異なる概念である。

学習の指針

本章の主役は、第 11 章の $G \times S^1$ を一般化した $(G \times S^1) \cup H$ 型複体である。前提として、第 11 章の「頂点はブランチ円周、辺はアニュラスセクター」という見方と、グラフのクラトフスキーの定理を使う。後半のホモロジー計算では、第 I 巻のマイヤー・ヴィートリス完全系列と、アーベル群の生成元・関係式による表示を用いる（巻頭の既習事項の要点も参照）。議論は二段階である。まず「縮約写像で 3 次元の埋め込み問題をグラフの平面性問題へ関係付ける」補題とその対偶を確実に理解する。これは必要条件しか与えないので、次に「面条件」による必要十分な判定へ進み、それを用いて臨界的複体の分類を読む。

12.1 本章の目標

前章では、グラフと円周の直積 $G \times S^1$ を扱い、 $K_5 \times S^1$ と $K_{3,3} \times S^1$ が S^3 への埋め込みを妨げる基本的な例になることを見た。本章では、この考えをさらに進め、 $X = (G \times S^1) \cup H$ という形の 2 次元複体を考える。ここで G と H はグラフであり、 $G \times S^1$ の一部に 1 次元複体 H が貼り付いていると考える。

本章の中心テーマは、この形の複体の中で、 S^3 への埋め込みに関して**臨界的**なものがどのように現

れるかである。臨界的とは、それ自身は S^3 に埋め込めないが、少しでも本質的に単純化すると S^3 に埋め込めるようになる、という意味である。

本章の目標は次の通りである。

- $(G \times S^1) \cup H$ 型複体の意味を理解する。
- 縮約写像 $\hat{f}: (G \times S^1) \cup H \rightarrow G \cup H$ の役割を理解する。
- 3次元の埋め込み問題を、縮約グラフの平面性問題へ帰着する考え方を理解する。
- 面条件による埋め込み判定と、クラトフスキーの定理が、臨界的複体の分類にどのように使われるかを理解する。
- 多重分岐曲面のホモロジー計算とトーション障害が、臨界性の検出に使えることを復習する。

12.2 臨界的複体の復習

本論に入る前に、臨界性の考え方をもう一度整理しておく。

定義 12.1 (臨界的複体). 2次元複体 X が S^3 に関して**臨界的**であるとは、おおまかに次の2条件を満たすことをいう。

1. X は S^3 に埋め込めない。
2. X を許された単純化操作によって真に単純化した任意の複体は、 S^3 に埋め込める。

直観：臨界的とは最小の障害のこと

「 S^3 に埋め込めない複体」だけなら、 $K_5 \times S^1$ を部分複体として含む複体を考えればいくらかでも作れる。臨界的複体が重要なのは、埋め込めない複体の中で「これ以上小さくできない」境界線上にあるものだからである。条件1は障害であることを、条件2はその障害に無駄がないこと（極小性）を表している。極小な障害をすべて列挙できれば、「与えられた複体が埋め込めないのは、リスト中のどれかを含むときに限る」という形の判定定理、いわばクラトフスキーの定理の3次元版が期待できる。分類定理の価値はこの点にある。

グラフの平面性では、 K_5 と $K_{3,3}$ がこの役割を果たす。 K_5 も $K_{3,3}$ も平面には埋め込めないが、任意の1本の辺を削除すると平面的になる。すなわち、これらは平面性に関する最小障害である。

具体例：辺を1本除くと平面的になることの検算

K_5 (頂点数 $v = 5$ 、辺数 $e = 10$) が平面的でないことは、オイラーの公式から従う不等式で確かめられる。頂点数 $v \geq 3$ の単純平面グラフでは $e \leq 3v - 6$ が成り立つが、 K_5 では $3v - 6 = 9 < 10 = e$ となり矛盾する。一方、辺を1本除いた $K_5 - e$ は辺数 $9 \leq 9$ で不等式を満たし、実際に平面に描ける。頂点1, 2, 3で三角形を描き、その内部に頂点4を置いて1, 2, 3と結び、外部に頂点5を置いて1, 2, 3と結べばよい(除いた辺は45)。 $K_{3,3}$ ($v = 6$, $e = 9$) は三角形を含まないので、平面的なら $e \leq 2v - 4 = 8$ となるはずだが、 $e = 9$ で矛盾する。辺を1本除けば辺数8となり、こちらも実際に平面に描ける。 K_5 も $K_{3,3}$ も辺の位置はすべて対等(同型で移り合う)なので、「どの辺を除いても平面的」となる。これが K_5 と $K_{3,3}$ の臨

界性（極小性）の中身である。

2 次元複体の S^3 への埋め込み問題では、単に K_5 と $K_{3,3}$ が現れるのではなく、それらを円周方向に持ち上げた $K_5 \times S^1$, $K_{3,3} \times S^1$ が基本例として現れる。さらに、それらに 1 次元複体を貼り付けた $(G \times S^1) \cup H$ 型の複体を考えることで、より多様な臨界的複体が得られる。

12.3 臨界性の三つの水準

臨界的複体を専門的に扱うときには、どの操作に対して最小性を要求しているかを明確にしなければならない。本書では、次の三つを区別する。

1. **削除型臨界性**：点、辺、あるいは単体の開星を取り除くと埋め込めるようになる、という最小性。
2. **縮約型臨界性**：辺や円周方向を縮約して得られる複体が埋め込めるようになる、という最小性。
3. **埋め込み型臨界性**：埋め込み同値類の半順序で真に小さいものがすべて埋め込める、という最小性。

グラフの平面性では、これらの違いは比較的に見えにくい。しかし 2 次元複体では、Cone K_5 のように、局所削除では本質が壊れないが、埋め込み型としては最小障害と見るべき例が現れる。したがって、第 12 章では主に削除型（古典的臨界性）を扱い、第 13 章では埋め込み型臨界性を導入する。

直観：三つの水準はどこで差が出るか

グラフの場合、 K_5 から辺を 1 本削除しても $(K_5 - e)$ 、辺を 1 本縮約しても（4 頂点のグラフになる）、結果は平面的になるため、削除型と縮約型の違いは見えにくい。2 次元複体で違いが現れる典型が錐 Cone K_5 である（第 11 章末の注意を参照）。Cone K_5 は S^3 に埋め込めないが、底の K_5 から遠い部分の開星を取り除いても底に由来する障害が残るので、削除型の意味では臨界的にならない。しかし「これより真に単純なものはすべて埋め込める」という埋め込み型の意味では、最小障害と見なすべき例である。この例のために、第 13 章で第三の水準が必要になる。

用語の整理

本章で「臨界的」と言うときは、特に断らない限り、具体的な単純化操作に対する臨界性を指す。第 13 章では、埋め込み同値類の半順序による臨界性へ切り替える。この切り替えは、3 次元版クラトフスキー計画を定式化するために必要である。

12.4 対象となる複体 $(G \times S^1) \cup H$

有限グラフ G に対して、 $G \times S^1$ は多重分岐曲面であった。 G の各頂点 v は円周 $v \times S^1$ というブランチになり、各辺 e はアニュラス $e \times S^1$ というセクターになる。

ここに、さらにグラフ H を貼り付けた複体 $X = (G \times S^1) \cup H$ を考える。直感的には、 $G \times S^1$ は「グラフ G をチューブ状に膨らませた 2 次元部分」であり、 H はその上に取り付けられた 1 次元の骨格である。

定義 12.2 ($(G \times S^1) \cup H$ 型複体). 有限グラフ G, H に対し、 H と $G \times S^1$ の交わりが $G \times S^1$ のブランチ集合 (頂点円周の和) に含まれる有限個の点であるとき、得られる 2 次元複体 $X = (G \times S^1) \cup H$ を、 $(G \times S^1) \cup H$ 型複体と呼ぶ。

具体例：アニュラスに弧を 1 本貼る

最も簡単な例を作ってみよう。 G を 1 本の辺 e (端点 u, v) とし、 H を 1 本の弧とする。 $G \times S^1$ はアニュラスで、その 2 つの境界円周 $u \times S^1$ と $v \times S^1$ がブランチである。 H の一方の端点を $u \times S^1$ 上の点に、他方の端点を $v \times S^1$ 上の点に貼れば、交わりがブランチ上の有限個の点という条件を満たす $(G \times S^1) \cup H$ 型複体 X が得られる。缶詰の缶の側面に、外側から持ち手を 1 本取り付け付けた形を思い浮かべればよい。縮約グラフ $G \cup H$ は、2 頂点 u, v を 2 本の辺 (e と H) で結んだグラフで、円周と同相である。これは平面的なので、後の節の補題により、この X は S^3 に埋め込める (実際、上の「持ち手付きの缶」は $\mathbb{R}^3$ の中の絵になっている)。

セクターの内部に貼り付け点を取りたい場合は、対応する G の辺をその点の射影で細分し、新しい頂点上のファイバー円周をブランチとみなせばよい。この約束のもとで、縮約写像による像 $G \cup H$ は有限グラフになる。

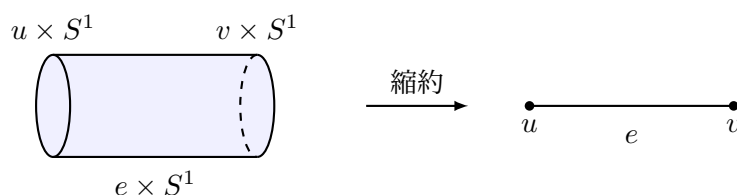
このクラスは、すべての 2 次元複体を含むわけではない。しかし、グラフの平面性と S^3 への 2 次元複体の埋め込み問題を結び付けるうえで、非常に扱いやすい。

12.5 縮約写像

このクラスを調べる最大の利点は、 $G \times S^1$ の S^1 方向をつぶすことで、2 次元複体を 1 次元グラフへ戻せる点にある。

定義 12.3 (縮約写像). $X = (G \times S^1) \cup H$ に対し、 $G \times S^1$ の各円周ファイバー $\{x\} \times S^1$ を 1 点に縮め、 H はそのまま残す写像を $\hat{f}: X \rightarrow \hat{X} = G \cup H$ と書く。これを縮約写像という。

この写像のもとで、アニュラスセクター $e \times S^1$ は辺 e に縮約される。したがって、 X の 2 次元的な情報は消え、縮約後には 1 次元グラフ $\hat{X} = G \cup H$ が残る。



12.6 縮約グラフが平面的なら元の複体は埋め込める

縮約写像の重要性は、次の補題にある。

補題 12.4 (縮約グラフと埋め込み). $X = (G \times S^1) \cup H$ とし、縮約グラフを $\hat{X} = G \cup H$ とする。もし $\hat{X}$ が S^2 に埋め込めるなら、 X は S^3 に埋め込める。

Proof. $\hat{X} = G \cup H$ が S^2 に埋め込めるとすると、コンパクト性により $\hat{X}$ は円板の内部に埋め込める： $G \cup H \subset \text{int } D^2$ この平面図をそのまま用いる。まず、直積を取ることで $G \times S^1 \subset D^2 \times S^1 \subset S^3$ という垂直な埋め込みを得る ($D^2 \times S^1$ はソリッドトーラス)。次に、 H をレベル円板 $D^2 \times \{\text{pt}\}$ の中に、平面図の通りに置く。 H は平面図の中で G と貼り付き頂点でのみ交わっているから、レベル円板の中でも H は $G \times S^1$ と指定された点 (v, pt) でのみ交わる。したがって $X = (G \times S^1) \cup H$ 全体が S^3 に埋め込まれる。□

直観：縦に立ててから水平に置く

証明の絵は「 $G \times S^1$ は縦に、 H は横に」である。ソリッドトーラス $D^2 \times S^1$ の中で、 $G \times S^1$ は各ファイバー $\{x\} \times S^1$ が S^1 方向（縦方向）に沿う「垂直な壁」として立っている。一方 H は、1 枚のレベル円板 $D^2 \times \{\text{pt}\}$ （水平な断面）の中に、平面図の通りに寝かせて置く。垂直な壁と水平な断面は、指定された貼り付け点でしか出会わない。縮約グラフの平面図が交差なしに描けているという仮定が、この配置に交差が生じないことを保証している。

この補題の対偶が重要である。

系 12.5 (対偶). $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込めないなら、縮約グラフ $\hat{X} = G \cup H$ は平面的でない。

直観：系の逆は成り立たない

この系の逆、すなわち「縮約グラフが非平面的なら X は S^3 に埋め込めない」は、一般には成り立たない。たとえば G を 1 本の辺 e (端点 u, v) とし、 H を K_5 とし、 K_5 の 1 つの頂点をブランチ円周 $u \times S^1$ 上の点に貼ってみる。縮約グラフ $G \cup H$ は K_5 を含むので非平面的である。しかし、この X は S^3 に埋め込める。実際、アニュラス $G \times S^1$ を $\mathbb{R}^3$ に標準的に置き、貼り付け点でアニュラスと 1 点だけ接する小さな球体の中に K_5 を埋め込めばよい（有限グラフはすべて球体に埋め込める）。つまり、縮約グラフの非平面性は非埋め込みの必要条件にすぎない。 X が本当に埋め込めないことを示すには、後の節で述べる面条件による判定定理が必要である。

したがって、 X の S^3 への非埋め込み性を調べるためには、まず縮約グラフ $\hat{X}$ の非平面性を調べればよい。これは、3 次元の問題を 2 次元のグラフ平面性の問題に落とす考え方である。ただし、上の注意の通り、これは必要条件を与えるだけである。必要十分な判定条件は、後の節で「面条件」として与える。

12.7 クラトフスキーの定理の適用

縮約グラフ $\hat{X}$ が非平面的であるなら、クラトフスキーの定理により、 $\hat{X}$ は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を部分グラフとして含む。

定理 12.6 (クラトフスキーの定理の使い方). $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込めないなら、縮約グラフ $\hat{X} = G \cup H$ は、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。

Proof. X が S^3 に埋め込めないなら、前節の系より $\hat{X}$ は平面的でない。クラトフスキーの定理より、非平面的な有限グラフは、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。よって結論を得る。□

復習：クラトフスキーの定理と部分分割

グラフの辺の内部に次数 2 の頂点を有限個挿入して得られるグラフを、元のグラフの**部分分割**（細分）という。部分分割は、位相空間としては元のグラフと同相である。クラトフスキーの定理：有限グラフが平面的であるための必要十分条件は、 K_5 の部分分割も $K_{3,3}$ の部分分割も部分グラフとして含まないことである。したがって「非平面的」と分かった瞬間に、グラフの中に K_5 型か $K_{3,3}$ 型の構造が必ず見つかる。

この時点で、 S^3 への 2 次元複体の埋め込み問題が、 K_5 と $K_{3,3}$ という既知のグラフ障害と結び付いたことになる。ただし、これだけでは臨界的複体を分類するには足りない。

12.8 面条件による埋め込み判定

前節までで、縮約グラフ $\hat{X}$ が平面的なら X は S^3 に埋め込めること、したがって X が埋め込めないなら $\hat{X}$ は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むことが分かった。しかし、縮約グラフの非平面性は非埋め込みの**必要条件**にすぎない。臨界的複体を分類するには、埋め込み可能性の**必要十分条件**が要る。それを与えるのが、次の「面条件」である [19]。

定義 12.7 (ピースと貼り付け集合). $X = (G \times S^1) \cup H$ において、 H が $G \times S^1$ と交わる点を**貼り付け点**という。 H をすべての貼り付け点で切り開く（次数 d の貼り付け点を、 d 個の次数 1 の端点に置き換える）と、いくつかの連結成分に分かれる。その各成分を H の**ピース**という。ピース Q に対し、 Q の端点が貼り付いている頂点円周 $v \times S^1$ に対応する G の頂点 v の全体を Q の**貼り付け集合**といい、 $\mathcal{V}(Q)$ と書く。

定義 12.8 (面条件). G の平面埋め込み (S^2 への埋め込み) ι を一つ固定する。 H のすべてのピース Q に対して、 $\mathcal{V}(Q)$ の頂点がすべて ι の一つの面の境界上にあるとき、 (G, H) は ι に関して**面条件**を満たすという。

定理 12.9 (埋め込み判定定理 [19]). $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込めるための必要十分条件は、 G のある平面埋め込みに関して (G, H) が面条件を満たすことである。

証明の考え方. 鍵は、 $G \times S^1$ を S^3 に**どのように**埋め込んでも、その補空間の領域（部屋）が、 G のある平面埋め込みの面とちょうど対応する、という事実である。すなわち、部屋 U の閉包が頂点円周 $v \times S^1$ を含むことと、 v が対応する面の境界上にあることが同値になる。これは、アレクサンダー双対性とキュネットの公式から部屋の個数が $1 + \text{rank } H_2(G \times S^1) = 1 + \beta_1(G)$ (G が連結のとき) と決まることと、各頂点円周のまわりのセクターの巡回順序が定める G の回転系（第 4 章）のオイラー標数の勘定を比べ、回転系の種数が 0 でなければならないことから従う。

この事実を認めると、定理は次のように分かる。 $X \subset S^3$ とする。各ピースから端点を除いたものは連結で $G \times S^1$ と交わらないから、一つの部屋 U に含まれる。その端点は U の閉包上にあるので、 $\mathcal{V}(Q)$ の頂点はすべて U に対応する面の上にある。逆に面条件が成り立てば、 $G \subset D^2$ 、

$G \times S^1 \subset D^2 \times S^1 \subset S^3$ と標準的に置き、各ピースを、対応する面の部屋の中に埋め込めばよい（部屋は連結な 3 次元多様体なので、グラフは自由に埋め込める）。□

直観：縮約グラフの補題との関係

縮約グラフ $G \cup H$ が平面的なら、その平面図の中で各ピースは G の一つの面の中に描かれているから、面条件が成り立つ。したがって前節の補題は、この定理の「十分性」の特別な場合である。一方、面条件は縮約グラフの平面性より弱い条件である。ピースは 3 次元の部屋の中に置かれるので、ピース自身が非平面的でも、複数のピースが同じ面を使っても構わないからである。前節の例（アニュラスの頂点円周に K_5 を 1 点で貼った複体）では、ピースの貼り付け集合は 1 点だけなので面条件は自動的に成り立ち、確かに S^3 に埋め込める。

12.9 臨界性の判定条件

面条件を用いると、臨界性も組合せ的に言い換えられる。 G の辺 e に対し、 e の両側の二つの面を一つに合併した面の族に関する面条件を、 e -合併面条件と呼ぶ。これは、セクター $e \times S^1$ に小さな穴をあけると、その両側の部屋がつながることに対応している。

定理 12.10 (臨界性判定定理 [19]). $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に関して臨界的であるための必要十分条件は、次の 3 条件が成り立つことである。

- (C0) G のどの平面埋め込みに関しても、 (G, H) は面条件を満たさない。
- (C1) G の任意の辺 e に対し、ある平面埋め込みに関して (G, H) は e -合併面条件を満たす。
- (C2) H の任意の辺 h に対し、ある平面埋め込みに関して $(G, H \setminus \text{int } h)$ は面条件を満たす。

(C0) は X が埋め込めないこと、(C1) はセクターの中の小さな開星を除けば埋め込めること、(C2) は H の辺の中の開星を除けば埋め込めることを表している。この 3 条件は互いに独立である。なお、(C1) から特に G 自身は平面的である（平面埋め込みをもつ）。一方、 H は森とは限らない。

具体例： Θ_3 に三脚を貼った複体

Θ_3 を、2 頂点 a, b を 3 本の辺 S_1, S_2, S_3 で結んだグラフとし、各辺の中点に細分点（次数 2 の頂点） p_1, p_2, p_3 を置いたものを G とする。 H を三脚 $K_{1,3}$ とし、3 枚の葉を p_1, p_2, p_3 上の頂点円周に貼る（図 12.1(c)）。ピースは三脚 1 個で、貼り付け集合は $\{p_1, p_2, p_3\}$ である。

- (C0)： Θ_3 の平面埋め込みの面は、どれも 2 本の辺ではさまれている。3 点 p_1, p_2, p_3 をすべて境界にもつ面はない。
- (C1)：たとえば S_2 の一部に穴をあけると、 S_2 の両側の面が合併され、合併された面は p_1, p_2, p_3 をすべて含む。
- (C2)：三脚の辺を 1 本除くと、残るピースは 2 点にしか貼り付いておらず、その 2 点は共通の面の上にある。

したがってこの複体は臨界的である。縮約グラフ $G \cup H$ は $K_{3,3}$ である。

12.10 三つの障害機構

臨界的な $(G \times S^1) \cup H$ 型複体は、次の三つの型に分かれる (図 12.1、図 12.2)。以下、 G から次数 2 の頂点をすべて消して得られる多重グラフを G^* と書き、 G の次数 2 の頂点を、それが乗っている G^* の辺の上のマークと呼ぶ。

- (I) **クラトフスキー型 (3 種類)** (a) $K_4 \times S^1$ に星 $K_{1,4}$ を、4 枚の葉が K_4 の 4 頂点の頂点円周に 1 枚ずつ乗るように貼ったもの。(b) (a) の $K_{1,4}$ を H 字形の木 (次数 3 の頂点 2 個を辺で結び、葉を 2 枚ずつ付けた木) に置き換えたもの。(c) 上の例の $(\Theta_3 \times S^1) \cup K_{1,3}$ 。縮約グラフはそれぞれ、 K_5 、1 辺を縮約すると K_5 になるグラフ、 $K_{3,3}$ である。
- (II) **巡回順序型 (6 種類)** $G^* = \Theta_4$ (2 頂点を 4 本の辺 S_0, S_1, S_2, S_3 で結んだグラフ) で、 H は S_1, S_2, S_3 上のマークを 2 本ずつ結ぶ 3 本の弧 h_{12}, h_{23}, h_{31} からなり、 S_0 にはマークがないもの。各 S_i に到着する 2 本の弧が同じマークを使うか、異なるマークを使うかによって、同相を除きちょうど 6 種類ある。3 本とも同じマークを共有する場合 (Δ_0 と書く)、 H は三角形であり、縮約グラフは K_5 である。
- (III) **パリティ型 (無限個)** G^* が閉路で、その辺が「マーク付き二重辺」(平行な 2 本の辺で、それぞれにマークが 1 個ずつある) とマークのない単独の辺からなり、単独の辺どうしは隣り合わず、二重辺の個数 k が 3 以上の奇数であるもの。 H は k 本の弧からなり、弧たちはすべての二重辺を 1 回ずつ通る閉路をなし、各二重辺の 2 個のマークは、この閉路における両隣の二重辺へそれぞれ結ばれる。典型例は、 n 角形のすべての辺を二重にした G^* から作る複体 X_n ($n = 3, 5, 7, \dots$) である。

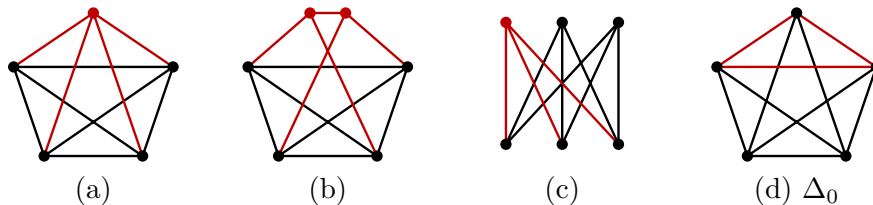


図 12.1 型 (I) の 3 種類 (a), (b), (c) と、型 (II) の代表 Δ_0 (d) の縮約グラフ。黒がグラフ G (各辺がセクター $e \times S^1$ 、各黒頂点が頂点円周を表す)、赤がグラフ H であり、赤い頂点は H の内部頂点である。平面図における辺の交差には意味がない。(d) では下の 2 頂点が Θ_4 の 2 つの分岐点である。

三つの型は、三つの異なる障害の仕組みに対応している。

1. **型 (I)：一つのグラフの非平面性。** ピースが 1 個だけの場合である。貼り付け集合を S とし、 G に新しい頂点 z を加えて S の各頂点と結んだグラフを Γ とする。「 S が G のある平面埋め込みで一つの面に乗る」ことは「 Γ が平面的である」と同値である。すると (C0), (C1), (C2) は、 Γ が非平面的で、どの辺を除いても平面的になること、すなわち Γ が K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割そのものであることを意味する。ここでクラトフスキーの定理が直接使われる。
2. **型 (II)：巡回順序の障害。** Θ_4 の平面埋め込みは、4 本の辺の巡回順序で決まり、面は巡回的に隣り合う 2 本の辺の間にある。弧 h_{ij} が面条件を満たすには、 S_i と S_j が隣り合っていなければ

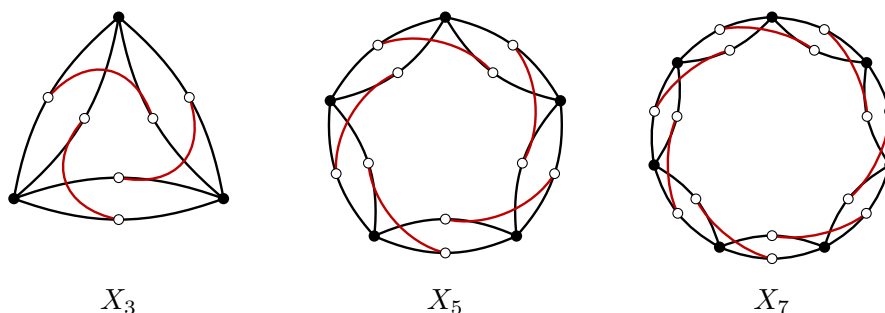


図 12.2 パリティ型 (III) の臨界複体 X_n ($n = 3, 5, 7$)。黒は n 角形のすべての辺を二重にしたグラフ G^* で、各弧の上の白丸がマーク (貼り付け円周) である。赤は H の n 本の弧で、二重辺 D_i の内側のマークと、隣の二重辺 D_{i+1} の外側のマークを結ぶ。

ばならない。ところが、4 本の辺の巡回順序の中で、3 本の辺 S_1, S_2, S_3 がどの 2 本も隣り合うことはできない。

3. 型 (III) : パリティの障害。各二重辺は、平面埋め込みの中で「裏返す」ことができ、裏返すと、その 2 個のマークのどちらが閉路の内側の面に、どちらが外側の面に乗るかが入れ替わる。各弧は、その両端のマークが同じ側にあることを要求する。これらの要求を閉路に沿って一周すると、二重辺の個数が奇数のとき矛盾が生じる。

具体例 : X_n のパリティを計算する

X_n では、 n 角形の辺 $w_i w_{i+1}$ を二重にした二重辺を D_i とし、外側の辺のマークを m_i^+ 、内側の辺のマークを m_i^- とする。 G の面は、閉路の内側の面 J_{in} 、外側の面 J_{out} 、各二重辺の 2 辺ではさまれた面である。二重辺 D_i を裏返すかどうかを $t_i \in \{0, 1\}$ で表す ($t_i = 0$ なら m_i^+ が外側、 $t_i = 1$ なら m_i^+ が内側)。弧 h_i は m_i^- と m_{i+1}^+ を結ぶ。この 2 点は異なる二重辺の上にあるので、共通の面は J_{in} か J_{out} しかあり得ない。 m_i^- と m_{i+1}^+ が同じ側にあるための条件は

$$t_{i+1} \equiv t_i + 1 \pmod{2} \quad (i = 1, \dots, n, \text{ 添字は } n \text{ を法として読む})$$

である。これを $i = 1, \dots, n$ について足し合わせると $0 \equiv n \pmod{2}$ となる。したがって、 n が奇数ならどのように裏返しても面条件は成り立たず、 X_n は S^3 に埋め込めない。 n が偶数なら $t_i \equiv i \pmod{2}$ が解になり、対応する複体は S^3 に埋め込める。 n が奇数のとき、弧を 1 本除けば条件が 1 本減って解が存在し (C2)、二重辺の 1 辺に穴をあければ、二重辺の間の面と内外どちらかの面が合併されるので、その二重辺のもう一方のマークが内外両方の面に乗ることになり、条件が 1 本なくなって解が存在する (C1)。よって X_n (n は 3 以上の奇数) は臨界的である。

12.11 分類定理

定理 12.11 ($(G \times S^1) \cup H$ 型臨界複体の分類 [19]). $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に関して臨界的であるための必要十分条件は、 $|X|$ が型 (I), (II), (III) のいずれかの複体と PL 同相であることである。すなわち、このクラスの臨界的複体は、クラトフスキー型 3 種類、巡回順序型 6 種類、およびパリティ型の無限族で尽くされる。特に、 X_n ($n = 3, 5, 7, \dots$) は互いに同相でない臨界的複体であり、 $(G \times S^1) \cup H$ 型の臨界的複体は無限個存在する。

証明の骨格. まず、同じ G^* の辺の上で隣り合うマークを一つにまとめても臨界性は変わらないことを示し、 G^* の各辺のマークが高々 1 個である場合 (コア) に帰着する。ピースが 1 個なら、上で述べたようにクラトフスキーの定理から型 (I) が得られる。ピースが 2 個以上なら、 G は 2-連結であることが分かる。2-連結グラフの平面埋め込みの自由度は、 G^* を 3-連結成分へ分解する SPQR 木によって記述される (S は閉路、 P は多重辺、 R は 3-連結グラフに対応する節点である)。臨界性から、 R 節点は現れないこと、SPQR 木の葉はすべてマーク付き二重辺であること、それらの葉を除くと S 節点 1 個または P 節点 1 個しか残らないことが順に示される。 P 節点 1 個の場合が型 (II)、 S 節点 1 個の場合が型 (III) を与える。□

注意：縮約グラフだけでは分類できない

「 X が臨界的なら、縮約グラフ $\hat{X}$ から余分な部分を除いていくと K_5 か $K_{3,3}$ の部分分割そのものになるはずだから、臨界的複体は有限個である」と推論したくなる。しかしこの推論は正しくない。縮約グラフの非平面性は非埋め込みの必要条件にすぎないので、「余分な部分を除いても縮約グラフが非平面的である」ことから「除いた後の複体が埋め込めない」とは結論できないからである。実際、型 (III) の X_n の縮約グラフは次数 3 以上の頂点を $3n$ 個もち、 K_5 や $K_{3,3}$ の部分分割ではない。さらに H の弧を縮約して平行な辺を同一視すると、 $2n$ 頂点のメビウスの梯子になる ($n = 3$ のときが $K_{3,3}$ である)。それでも X_n は臨界的であり、どの小さな開星を除いても埋め込めるようになる。正しい分類には、前節までの面条件による必要十分な判定が不可欠である。

具体例：有限個の型の縮約グラフと H の形

型 (I) の (a), (c) と型 (II) の Δ_0 では、縮約グラフ $\hat{X} = G \cup H$ はそれぞれ K_5 , $K_{3,3}$, K_5 であり、 G と H がその辺集合を分け合っている。 H の形は次数の勘定で確かめられる。

- (a) : $G = K_4$ は次数 3 の頂点 4 個からなる。 K_5 の各頂点の次数は 4 なので、 H の次数列は $(4, 1, 1, 1, 1)$ 、すなわち $H = K_{1,4}$ である。
- (c) : $K_{3,3}$ (全頂点の次数 3) から、次数 3 が 2 個・次数 2 が 3 個の G (Θ_3 の細分、すなわち $K_{2,3}$) を残すので、 H の次数列は $(3, 1, 1, 1, 0, 0)$ 、すなわち $H = K_{1,3}$ である。
- Δ_0 : Θ_4 の細分は、次数 4 の頂点 2 個と次数 2 の頂点だけからなる。 K_5 の中では、2 個の頂点で $\deg_H = 0$ 、残りの 3 個の頂点で $\deg_H = 2$ でなければならない。つまり H は 3 頂点それぞれが次数 2 の、辺 3 本のグラフ、すなわち三角形 K_3 である。実際このとき G

は、2つの分岐点を、 K_5 の直接の辺 1 本と、3 個の細分点を経由する道 3 本の合計 4 本の弧で結んだ形になり、 Θ_4 と同相である。

Δ_0 が示すように、臨界的複体の H は森とは限らない（ただし、各ピース、すなわち H を貼り付け点で切り開いた成分は必ず木になる）。

例 12.12 (K_4 型の複体). 型 (I) の (a) では、縮約グラフ K_5 の中の星形部分 $K_{1,4}$ が H である。このとき $G = K_5 \setminus E(K_{1,4}) = K_4$ であり、縮約を戻すと $K_4 \times S^1$ (ブランチ 4 本、アニュラスセクター 6 枚) に、 $K_{1,4}$ の 4 枚の葉を 4 本のブランチ円周に貼り付けた複体を得られる。 $K_{1,4}$ の中心は $G \times S^1$ の外側に浮いた自由な頂点である。 K_4 のどの平面埋め込みでも 4 頂点すべてを境界にもつ面はないので (C0) が成り立ち、どの辺についても、その両側の面を合併すれば 4 頂点すべてが乗るので (C1) が成り立つ。

直観：クラトフスキーの定理との類比と相違

平面性の理論では、対象は有限グラフ、標的は S^2 、極小障害は K_5 と $K_{3,3}$ の 2 つである。本章では、対象は $(G \times S^1) \cup H$ 型複体、標的は S^3 であり、極小障害は有限個ではなく無限個ある。しかし、それらは「一つのグラフの非平面性」「巡回順序」「パリティ」というちょうど三つの仕組みから生じ、完全に列挙できる。「障害の個数は無限でも、障害の仕組みは有限個である」という形で、クラトフスキーの定理が拡張されているのである。第 13 章の順序構造は、この類比を一般の 2 次元複体へ広げるための準備である。

分類の射程

この分類は、 $(G \times S^1) \cup H$ 型で古典的臨界性を満たす複体の分類であり、 S^3 に対する臨界的埋め込み型全体の分類ではない。第 13 章で示す一般原理により、これら古典的臨界複体の埋め込み型はすべて $\Gamma_M([S^3])$ に属する。しかし逆に、 $\text{Cone } K_5$ 、閉向き付け不可能曲面、さらに無限個の多重分岐曲面型など、この分類の外にも臨界的埋め込み型が存在する。

12.12 多重分岐曲面との接続

$(G \times S^1) \cup H$ 型複体は、多重分岐曲面の部分複体として現れることが多い。特に、 $G \times S^1$ のアニュラスセクターを、円板や穴あき球面などで置き換えると、さまざまな多重分岐曲面が得られる。このとき、その中に臨界的複体が含まれていれば、全体も S^3 には埋め込めない。

命題 12.13 (部分複体による障害). C が S^3 に埋め込めない複体で、 $C \subset X$ であるとする。このとき X は S^3 に埋め込めない。

Proof. もし X が S^3 に埋め込めるなら、その部分複体 C も S^3 に埋め込める。これは C が S^3 に埋め込めないことに反する。 $\square$

したがって、臨界的複体の分類は、多重分岐曲面の埋め込み不可能性を調べる際の基礎になる。

12.13 ホモロジーによる補助的な検出

臨界的複体の分類では、面条件とクラトフスキーの定理が中心になる。一方、多重分岐曲面全体を扱うときには、ホモロジーによる障害も重要である。

連結な正則多重分岐曲面 X のブランチを $l_1, \dots, l_n$ セクターを $e_1, \dots, e_m$ とする（本節に限り m はセクターの総数を表す。第 8 章では $m = \beta_1(G_X)$ 、セクターの総数は s と書いていたので、記号の重複に注意すること）。セクター e_i の境界がブランチ l_k に符号付きで何回現れるかを $d(l_k; e_i)$ と書く。このとき、 $H_1(X)$ は、ブランチを生成元とし、セクター境界から来る関係式で表示される部分と、自由部分の直和として計算できる。

ここで自由部分の階数を定義しておく。各セクターから、カラーを残して開円板を一つずつ取り除いた空間を $\dot{X}$ とし、

$$r_0(X) = \text{rank } H_1(\dot{X}) - n$$

とおく（ n はブランチの本数）[14]。 X が連結で各セクターが向き付け可能な場合には、オイラー標数の計算により

$$r_0(X) = \sum_{j=1}^m 2g(e_j) + \beta_1(\Gamma_X)$$

と明示できる。ここで $g(e_j)$ はセクター e_j の種数であり、 Γ_X は、ブランチとセクターを頂点とし、各プレブランチを対応するブランチとセクターを結ぶ辺とする 2 部グラフである。第一項はセクター内部の種数に由来する自由なサイクル、第二項はブランチとセクターの接続の巡回構造に由来する自由なサイクルの個数を数えている。

定理 12.14 (第 1 ホモロジー群の計算公式の形). 連結な正則多重分岐曲面 X に対して、

$$H_1(X) \cong \left\langle l_1, \dots, l_n \left| \sum_{k=1}^n d(l_k; e_1) l_k, \dots, \sum_{k=1}^n d(l_k; e_m) l_k \right. \right\rangle \oplus \mathbb{Z}^{r_0(X)}$$

という形の表示が得られる。

証明の考え方. 各セクターから開円板を一つずつ取り除いた空間を $\dot{X}$ とする。 $\dot{X}$ に円板を一つずつ貼り戻す過程にマイヤー・ヴィートリス完全系列を適用する。貼り戻す円板の境界は、ブランチの線形結合

$$\sum_{k=1}^n d(l_k; e_i) l_k$$

を 0 にする関係式を与える。すべてのセクターについて同じ操作を行うと、上の表示が得られる。 □

復習：マイヤー・ヴィートリス完全系列

第 I 巻の復習（巻頭の既習事項の要点も参照）。空間 X が $A \cup B$ と分解されるとき、適当な条件のもとで完全系列

$$\cdots \rightarrow H_1(A \cap B) \rightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_0(A \cap B) \rightarrow \cdots$$

が成り立つ。上の証明では $A = \dot{X}$ 、 B は貼り戻す円板であり、 $A \cap B$ は円板の境界円周の近傍

である。円板側では境界円周のホモロジー類が 0 になるので、円板を 1 枚貼り戻すたびに「境界円周の類 $\sum_k d(l_k; e_i) l_k$ を 0 とおく」という関係式が 1 つずつ加わる。

具体例： $G \times S^1$ で公式を検算する

公式を第 11 章の $X = G \times S^1$ (G は連結グラフ、頂点数 n 、辺数 m) で検算してみよう。ブランチは頂点円周 $l_v = v \times S^1$ 、セクターは m 枚のアニュラス $e \times S^1$ である。辺 e が頂点 u, v を結ぶとき、アニュラス $e \times S^1$ の境界は $u \times S^1$ と $v \times S^1$ に 1 回ずつ（符号を込めると互いに逆向きに）現れるので、関係式は $l_u - l_v = 0$ の形になる。 G は連結だから、この関係式ですべての生成元 l_v が同一視され、表示部分は $\mathbb{Z}$ になる。一方、各セクターはアニュラス（種数 0）なので $r_0(X)$ の第一項は 0 であり、2 部グラフ Γ_X は G の各辺を 2 本の辺に分割した細分と同型なので $\beta_1(\Gamma_X) = \beta_1(G)$ 、よって $r_0(X) = \beta_1(G)$ である。合わせて $H_1(G \times S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\beta_1(G)} = \mathbb{Z}^{\beta_1(G)+1}$ となり、第 11 章でキュネット公式から得た結果と一致する。特にトーシヨンは現れない。

12.14 例：接続行列から現れるトーシヨン

次の例は、ホモロジー計算が埋め込み障害を与える典型例である。

例 12.15 (スミス標準形による計算). ある正則多重分岐曲面 X の接続行列が

$$M_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるとする。整数係数の行基本変形・列基本変形により、この行列は $\text{diag}(1, 1, 1, 3)$ というスミス標準形に変形できる。したがって、行列部分が与えるアーベル群には $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ というトーシヨンが現れる。自由部分が $\mathbb{Z}^4$ である場合、 $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4$ となる。

復習：スミス標準形

整数成分の行列は、整数の範囲での行・列の基本変形（行や列の入れ替え、 -1 倍、ある行・列の整数倍を別の行・列に加える）を繰り返すと、対角行列 $\text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ ($d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_r$ 、各 $d_i > 0$) に変形できる。これをスミス標準形という。生成元 n 個と、行列 M の各行が与える関係式で表示されるアーベル群は $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}$ と同型である。 $d_i = 1$ の因子は自明な群なので消え、 $d_i \geq 2$ の因子がトーシヨンを与える。

具体例：基本変形の実行

実際に手を動かして M_X を変形してみよう。第 1 行と第 2 行を入れ替え、第 1 行を第 3 行・第 4 行から引き、さらに第 2 行を第 3 行・第 4 行から引くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

となる。列の基本変形で第 1 行・第 2 行の残りの成分を消すと、右下に 2×2 ブロック $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ が残る。このブロックで 2 つの行を入れ替え、第 1 行の 2 倍を第 2 行から引き、第 1 列の 2 倍を第 2 列から引き、最後に符号を直すと $\text{diag}(1, 3)$ になる。全体では $\text{diag}(1, 1, 1, 3)$ が得られ、トーション部分は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。検算として、行列式は基本変形で符号を除いて不変であり、 $\det M_X = -3$ と $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ が符号を除いて一致している。

第 7 章で見たように、 S^3 に埋め込まれたコンパクト 3 次元部分多様体の H_1 はトーションをもたない。多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれ、正則近傍 $N(X)$ が X に変形レトラクトするなら、 $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。したがって、 $H_1(X)$ にトーションが現れるなら、 X は S^3 に埋め込めない。

12.15 学習目標の確認

本章では、次の点を理解することを目標とする。

1. $(G \times S^1) \cup H$ 型複体の構成を説明できる。
2. 縮約写像 $\hat{f}: X \rightarrow G \cup H$ の意味を説明できる。
3. 縮約グラフが平面的なら元の複体が S^3 に埋め込める、という補題を理解する。
4. 対偶により、 X が非埋め込みなら $G \cup H$ が非平面的であることを説明できる。
5. 縮約グラフの非平面性は非埋め込みの必要条件にすぎないことを、例を挙げて説明できる。
6. ピース、貼り付け集合、面条件を定義し、埋め込み判定定理と臨界性の条件 (C0), (C1), (C2) を述べられる。
7. 臨界的複体が、クラトフスキー型 3 種類・巡回順序型 6 種類・パリティ型の無限族に分類されることと、三つの障害の仕組みを説明できる。
8. 多重分岐曲面のホモロジー計算公式の意味を理解する。
9. トーションが S^3 への埋め込み障害になることを説明できる。

12.16 練習問題

練習問題 12.1. $X = (G \times S^1) \cup H$ に対して、縮約写像 $\hat{f}: X \rightarrow G \cup H$ を言葉で説明せよ。

練習問題 12.2. $G \cup H$ が S^2 に埋め込めるなら、 $(G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込める理由を説明せよ。

練習問題 12.3. $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込めないとする。このとき $G \cup H$ が非平面的でな

ければならない理由を説明せよ。

練習問題 12.4. 上の結果とクラトフスキーの定理を用いて、 $G \cup H$ が K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むことを説明せよ。

練習問題 12.5. 臨界性の条件が、なぜ余分な辺や冗長な部分を排除するのか説明せよ。

練習問題 12.6. 縮約グラフが K_5 で、その中の星形グラフ $K_{1,4}$ が H である場合、縮約を戻すと $K_4 \times S^1$ に $K_{1,4}$ を貼った臨界的複体（型 (I) の (a)）が現れる、という説明の意味を述べよ。

練習問題 12.7. 正則多重分岐曲面の第 1 ホモロジー群の計算公式において、セクターが関係式を与える理由を説明せよ。

練習問題 12.8. 行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のスミス標準形が $\text{diag}(1, 1, 1, 3)$ であるとき、この行列が与えるアーベル群のトーション部分を求めよ。

練習問題 12.9. $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4$ である正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込めない理由を説明せよ。

練習問題 12.10. 臨界的複体の分類問題が「3次元版クラトフスキーの定理」を目指すものと言える理由を説明せよ。

練習問題 12.11. パリティ型の複体 X_n について、二重辺の裏返しを表す変数 $t_i \in \{0, 1\}$ を用いて、 n が奇数なら X_n は S^3 に埋め込めず、 n が偶数なら埋め込めることを説明せよ。

練習問題 12.12. 巡回順序型の複体 Δ_0 ($G^* = \Theta_4$, H は S_1, S_2, S_3 上のマークを結ぶ三角形) について、条件 (C0) が成り立つこと、および S_0 に関する条件 (C1) が成り立つことを説明せよ。

12.17 次章への橋渡し

本章では、 $(G \times S^1) \cup H$ 型複体について、縮約写像により 3 次元の埋め込み問題をグラフの平面性問題へ帰着する方法を学んだ。また、縮約グラフの非平面性は必要条件にすぎないこと、面条件が必要十分な判定を与えること、そしてこのクラスの臨界的複体が三つの型（うち一つは無限族）に分類されることを見た。

次章では、臨界性の定義そのものを見直す。特に、 K_5 の錐 $\text{Cone } K_5$ という例を通して、星状近傍を取り除くという定義では捉えきれない障害があることを確認し、埋め込み可能性に基づく同値関係と半順序によって臨界性を再定義する。

第 13 章

埋め込み型と最小障害

本章の結論

有限 2 次元単体的複体 X が S^3 に埋め込めないならば、必要に応じて X を細分した後、 X の部分複体として、埋め込み型の半順序における最小障害 X_0 を取ることができる。ただし、これは最小障害の**存在定理**であって、障害型の有限分類ではない。実際、 S^3 に対する臨界的埋め込み型の集合は無限である [20]。

原論文との対応

本章は、Eudave–Muñoz–Ozawa “Embeddability Types of Simplicial Complexes and Minimal Obstructions for the 3-Sphere” [20] の中心部分を、教科書向けに再構成したものである。前章で扱った分類（クラトフスキー型・巡回順序型・パリティ型）は、局所削除に基づく古典的臨界複体の特定クラスにおける分類である。本章の主題は、それより広い埋め込み型の半順序であり、両者を混同してはならない。

13.1 本章の目標

本章では、次の事項を学ぶ。

- 古典的臨界複体と臨界的埋め込み型を正確に区別する。
- 有限複体の相互 PL 埋め込みから埋め込み型の半順序を作る。
- 古典的臨界複体が臨界的埋め込み型を与えることを理解する。
- 局所可埋め込み性を頂点リンクの平面性で判定する。
- 非局所的障害が $\text{Cone } K_5$ または $\text{Cone } K_{3,3}$ に帰着することを理解する。
- 局所可埋め込みだが大域的に埋め込めない場合の簡約過程を理解する。
- 主定理が存在定理であり、分類定理ではないことを説明できる。
- 障害集合の無限性、アルゴリズム化、3 次元以上への拡張と未解決部分を知る。

13.2 二つの臨界性

最初に、前章の局所削除型の臨界性を、細分に依存しない形で述べ直す。

定義 13.1 (古典的臨界複体). 有限単体的複体 X, Y に対し、 X が Y に関して**古典的に臨界的**であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう。

1. $|X|$ は $|Y|$ に PL 埋め込みできない。
2. 任意の $r \geq 2$ と、 r 回重心細分 $X^{(r)}$ の任意の単体 σ に対し、

$$|X^{(r)} \setminus \text{ost}(\sigma)|$$

は $|Y|$ に PL 埋め込みできる。

このような複体の集合を $\Gamma_{\text{cl}}(Y)$ と書く。

なぜ「すべての $r \geq 2$ 」なのか

細分を細かくすると、 $\text{ost}(\sigma)$ はより小さな局所近傍になり得る。したがって、第二重心細分だけで削除後の可埋め込み性を確認しても、さらに小さい削除に対して同じ性質が自動的に従うわけではない。原論文 [20] では、この細分に頑健な量化を古典的臨界性の定義に含めている。

これに対して、本章の臨界性は、特定の削除操作ではなく、すべての PL 埋め込みを比較して定める。

13.3 埋め込み型の半順序

以下、有限単体的複体はその基礎多面体を表すものとし、埋め込みは PL 埋め込みとする。細分は埋め込み型を変えないので、必要に応じて自由に細分してよい。

定義 13.2 (埋め込み前順序と埋め込み型). 有限単体的複体 X, Y に対し、

$$X \preceq Y$$

とは、 $|X|$ が $|Y|$ に PL 埋め込みできることをいう。また、

$$X \sim Y \iff X \preceq Y \text{ かつ } Y \preceq X$$

と定める。 X の同値類 $[X]$ を X の**埋め込み型**という。

注意 13.3. $X \sim Y$ は PL 同相を意味しない。非同相な有限複体でも、互いに埋め込めれば同じ埋め込み型を表す。

命題 13.4. 関係 $\preceq$ は、埋め込み型全体の上に半順序を誘導する。

Proof. 恒等写像により反射律が成り立ち、埋め込みの合成により推移律が成り立つ。相互埋め込みで同値類に割ったので、 $[X] \preceq [Y]$ かつ $[Y] \preceq [X]$ なら $[X] = [Y]$ であり、反対称律も成り立つ。 $\square$

有限複体またはコンパクト多面体 Y に対し、 $[Y]$ 以下の下方集合を

$$\mathcal{L}([Y]) = \{[X] \mid [X] \preceq [Y]\}$$

と書く。

定義 13.5 (臨界的埋め込み型). 埋め込み型 $[X]$ が $[Y]$ に関して**臨界的**であるとは、

$$[X] \not\preceq [Y]$$

であり、しかも任意の $[Z] \prec [X]$ に対して

$$[Z] \preceq [Y]$$

が成り立つことをいう。その全体を $\Gamma_M([Y])$ と書く。

すなわち、 $\Gamma_M([Y])$ は半順序集合における $\mathcal{L}([Y])$ の補集合の極小元全体である。

定理 13.6 (古典的臨界性から埋め込み型臨界性へ). $X \in \Gamma_{cl}(Y)$ ならば $[X] \in \Gamma_M([Y])$ である。

Proof. $[Z] \prec [X]$ とする。埋め込み $|Z| \hookrightarrow |X|$ を細分すれば、像を X の部分複体 Z_0 としてよい。 $[Z] \neq [X]$ なので Z_0 は X 全体ではなく、 $|X| \setminus |Z_0|$ は空でない開集合を含む。

重心細分のメッシュは 0 へ収束するので、十分大きい $r \geq 2$ と頂点 $v \in X^{(r)}$ を選び、 $\text{ost}(v)$ をこの開集合の中に取りれる。すると

$$|Z_0| \subset |X^{(r)} \setminus \text{ost}(v)|.$$

古典的臨界性により右辺は $|Y|$ に埋め込めるから、 Z も Y に埋め込める。よって $[X]$ より真に小さい型はすべて $[Y]$ 以下であり、 $[X]$ は臨界的である。□

逆は成り立たない

$\text{Cone } K_5$ と $\text{Cone } K_{3,3}$ は $[S^3]$ に対する臨界的埋め込み型を表すが、それ自身は古典的臨界複体ではない。したがって

$$X \in \Gamma_{cl}(S^3) \implies [X] \in \Gamma_M([S^3])$$

は一方方向の包含である。

13.4 局所可埋め込み性とリンク判定

2 次元複体の非埋め込み性には、局所的原因と大域的原因がある。

定義 13.7 (局所可埋め込み性). 有限 2 次元複体 X が S^3 に**局所的に埋め込み可能**であるとは、任意の点 $p \in |X|$ が、3 次元球体 B^3 に PL 埋め込み可能な近傍 U_p をもつことをいう。

定理 13.8 (リンク判定). 有限 2 次元複体 X が S^3 に局所的に埋め込み可能であるための必要十分条件は、細分後のすべての頂点 v についてリンクグラフ $\text{lk}_X(v)$ が平面的であることである。

証明の考え方. 頂点 v の閉星は $\text{lk}_X(v)$ 上の錐である。この錐が B^3 に埋め込めることと、リンクが $\partial B^3 = S^2$ に埋め込めることは同値である。辺の内点のリンクは有限個の点の懸垂であり、2 単体

の内点のリンクは円周なので、これらは常に平面的である。したがって頂点リンクだけを調べればよい。□

定理 13.9 (非局所的障害). X が局所的に埋め込み可能でない有限 2 次元複体ならば、細分後の X は非平面的グラフ上の錐を含む。したがって

$$[\text{Cone } K_5] \preceq [X] \quad \text{または} \quad [\text{Cone } K_{3,3}] \preceq [X]$$

である。

Proof. 局所可埋め込み性が失敗する頂点 v を取り、その非平面的リンク $L = \text{lk}_X(v)$ を考える。閉星は $\text{Cone } L$ である。クラトフスキーの定理により L は K_5 または $K_{3,3}$ の細分を含むので、錐を取れば結論を得る。□

13.5 錐障害は埋め込み型として臨界的である

定理 13.10 (二つの局所臨界型).

$$[\text{Cone } K_5], [\text{Cone } K_{3,3}] \in \Gamma_M([S^3]).$$

証明の要点. $G = K_5$ または $K_{3,3}$ とする。 $\text{Cone } G$ が S^3 に埋め込めないことは、錐頂点のリンクが非平面的な G になることから従う。

$[Z] \prec [\text{Cone } G]$ とし、細分後に Z を $\text{Cone } G$ の部分複体とみなす。像が錐頂点を避けるなら、 Z は $G \times I$ の部分空間に入り、有限グラフに細い帯を付けた $G \times I$ は $\mathbb{R}^3$ に埋め込める。

像が錐頂点を含むとき、その点の Z におけるリンクを L とする。 L が非平面的なら、 $K_5, K_{3,3}$ の極小非平面性により L は G の細分を含む。このとき Z は $\text{Cone } G$ を含み、 $[Z] = [\text{Cone } G]$ となって真の不等式に反する。したがって L は平面的である。平面に置いた L の錐を下半空間に、残りの帯状部分を上半空間に置き、平面上の L で貼り合わせれば Z を $\mathbb{R}^3$ に埋め込める。よって $\text{Cone } G$ より真に小さい型はすべて S^3 に埋め込める。□

古典的臨界性で錐が漏れる理由

$\text{Cone } K_5$ の非埋め込み部分複体は、錐頂点の非平面的リンクを保つために、錐の側面を含まなければならない。しかしその側面は外側で自由辺に終わり、境界型の点をもつ。境界カラーを押し込めば、小さな開星を削除した空間の中に元の空間を再び埋め込めるので、古典的臨界性の削除条件を満たせない。これは「錐が臨界型ではない」という意味ではなく、局所削除という旧定義がこの障害を検出しないという意味である。

13.6 局所的には無害だが大域的に埋め込めない例

局所リンクがすべて平面的でも、全体が S^3 に埋め込めるとは限らない。原論文 [20] の球面・円板・弧の例は、この点を明確に示す。

球面 S^2 上で 1 点に横断的に交わる 2 本の弧 α_1, α_2 を取り、それぞれに円板 D_1, D_2 の境界弧を貼

る。各円板の残った境界点 p_1, p_2 を、 S^2 と交わらない弧 γ で結んだ複体を X とする。

命題 13.11. この X は S^3 に埋め込めないが、古典的臨界部分複体を含まない。

理由. もし埋め込みがあれば、ジョルダン－ブラウアー分離定理により埋め込まれた S^2 は S^3 を二つに分ける。 α_1 と α_2 の交点の近くでは、二つの円板は球面の反対側を占めなければならない。したがって p_1, p_2 は球面の反対側にあり、それらを結ぶ γ は球面を横切らざるを得ない。これは構成に反する。

一方、球面に穴を開ければ分離障害は消え、円板または弧の必要部分を欠かせば同じ障害は消える。必要部分をすべて残した非埋め込み部分複体では、円板部分にさらに局所削除を行っても障害のコピーが残り得るため、古典的削除最小性を満たさない。□

この例は、Cone K_5 とは異なり、局所リンクではなく大域的な分離が原因である。

13.7 局所可埋め込み複体の表面層別

ここから、 X が局所的には埋め込み可能だが、大域的には S^3 に埋め込めない場合を考える。細分後、リンクが円周でも区間でもない点の集合の閉包を $B(X)$ と書き、**ブランチグラフ**と呼ぶ。 $X \setminus B(X)$ の成分の閉包はコンパクト曲面になり、これを**セクター**と呼ぶ。

重要な限定

任意の有限 2 次元複体が最初から多重分岐曲面である、と主張しているのではない。まず非平面的リンクによる局所障害を除き、局所可埋め込み性を仮定した後に限って、非曲面部分がグラフ状、残りが曲面状になるという層別正規形を用いる。

各セクター S について、ブランチグラフに貼り付く極大境界弧の集合を $A(S)$ とし、その成分数を $a(S)$ とする。また

$$h(S) = \max\{0, 1 - \chi(S)\}$$

と置く。 $h(S)$ は向き付け可能・不可能の両方を同時に扱うためのオイラー標数型の複雑度であり、必ずしも通常の種数そのものではない。

13.8 基本簡約と有限停止

局所可埋め込み複体に対して、次の三種類の**基本簡約**を考える。

- (I) セクター全体、または付随する空の円板・カラーが整理された後の不要なブランチ辺を削除する。
- (II) 閉セクターの内部から開円板を一つ除き、境界をもつセクターにする（穿孔）。
- (III) セクターを幾何学的に本質的な固有弧に沿って切断する。用いる弧は、種数量を下げる弧、貼り付き成分を二つの非空集合へ分ける弧、または冗長なカラーを切り離す弧である。

簡約後も S^3 に埋め込めないとき、その簡約を**許容的**という。

境界をもつセクターの穿孔

境界をもつコンパクト曲面 S から内点円板を除いても、 S と $S \setminus \text{int } D$ は互いに埋め込める。新しい穴を既存の境界カラーへ押し出せるからである。したがって真に型を下げる穿孔は閉セクターに対してだけ行う。

基本簡約が無限に続かないことを、次の辞書式複雑度で保証する。

$$\kappa(X) = \left(c(X), \sum_S h(S), b(X), a(X), s(X), e(B(X)) \right),$$

ここで

$$b(X) = \sum_S \max\{0, a(S) - 1\}, \quad a(X) = \sum_S a(S),$$

$c(X)$ は閉セクター数、 $s(X)$ はセクター数、 $e(B(X))$ はブランチ辺数である。

定理 13.12 (停止性). 許容的基本簡約の任意の列は有限回で停止する。

証明の読み方. 穿孔は最初の成分 $c(X)$ を減らす。種数低下型の切断は $\sum h(S)$ を減らす。貼り付き分離型の切断は、それ以前の成分を増やさず $b(X)$ を減らす。カラー低下型の切断と削除は、さらに後ろの $a(X), s(X), e(B(X))$ のいずれかを減らす。したがって各基本簡約は非負整数列 $\kappa(X)$ を辞書式に真に減らし、無限列は存在しない。□

定義 13.13 (簡約された障害). 局所可埋め込みな有限 2 次元複体 X_0 が S^3 に埋め込めず、しかも許容的基本簡約を一つももたないとき、 X_0 を**簡約された障害**という。

13.9 簡約された障害から臨界型へ

停止性だけから直ちに埋め込み型の極小性が出るわけではない。基本簡約で下がらないことと、半順序全体で真に小さい型が存在しないことの間にはギャップがある。原論文 [20] の技術的中心は、このギャップを埋める次の補題である。

定理 13.14 (簡約された障害は臨界的である). X_0 が簡約された局所可埋め込み有限 2 次元複体ならば、

$$[X_0] \in \Gamma_M([S^3]).$$

証明の構造. $[Y] \prec [X_0]$ とし、細分後に Y を X_0 の部分複体とする。 X_0 から Y まで、開単体を一つずつ削除する有限列を取る。埋め込み型が初めて真に下がる削除に注目する。

頂点または辺の削除は、正規形における積近傍を調べると、型を保つカラー押し込みか、有限個の基本簡約の列に置き換えられる。2 単体の削除については、三角形の辺がセクター内部、セクター境界、ブランチグラフのどこにあるかを有限個に分類する。論文の付録の証明書表は、各場合が

- (a) 型を保つカラー変形、
- (b) 一つの基本簡約、または
- (c) 有限個の基本簡約の列

のいずれかであることを確認する。もし最初に型が下がった後も非埋め込みなら、 X_0 に許容的基

本簡約が存在して簡約性に反する。したがって、その段階で S^3 に埋め込み、部分複体 Y も埋め込む。□

単体数最小化だけでは不十分

固定した細分の部分複体の中には、包含に関して最小な非埋め込み部分複体が存在する。しかし、 $[Z] \prec [X]$ である型 $[Z]$ が、その固定細分の部分複体として現れるとは限らない。したがって有限個の部分複体から単体数最小のものを選ぶだけでは、埋め込み型の半順序における極小性を証明できない。表面簡約と局所削除の完全性が必要になる。

13.10 主定理

定理 13.15 (臨界的障害型の存在定理). X を有限 2 次元単体的複体とする。 $|X|$ が S^3 に埋め込めないならば、有限 2 次元複体 X_0 が存在して

$$|X_0| \hookrightarrow |X|, \quad [X_0] \in \Gamma_M([S^3]).$$

さらに、 X を細分すれば X_0 をその部分複体として取ることができる。

Proof. X が局所可埋め込みでなければ、リンク判定とクラトフスキーの定理により $\text{Cone } K_5$ または $\text{Cone } K_{3,3}$ を取り出せる。これらはすでに臨界型である。

X が局所可埋め込みなら、非埋め込み性を保つ基本簡約を可能な限り行う。停止性により簡約された障害 X_0 に到達し、前節の定理により $[X_0]$ は臨界的である。PL 埋め込みの像は、さらに細分すれば部分複体として実現できる。□

定理が述べていないこと

主定理は、 $\Gamma_M([S^3])$ の全要素を列挙していない。また、有限個の禁止複体で S^3 可埋め込み性の特徴づけるとも述べていない。保証するのは、任意の非埋め込み有限 2 次元複体の内部に、少なくとも一つの臨界的埋め込み型が実現されることである。

13.11 決定可能性とアルゴリズム

Matoušek–Sedgwick–Tancer–Wagner により、有限 2 次元単体的複体が $\mathbb{R}^3$ 、したがって S^3 に埋め込めるかどうかは決定可能である [21]。一方、この判定問題は NP-hard である [22]。

定理 13.16 (簡約過程の有効性). 非埋め込み有限 2 次元複体 X を入力として、 $[X_0] \preceq [X]$ かつ $[X_0] \in \Gamma_M([S^3])$ を満たす有限複体 X_0 を出力するアルゴリズムが存在する。

アルゴリズムの流れ. 頂点リンクの平面性を判定する。非平面的リンクがあれば、その中の K_5 または $K_{3,3}$ の細分を探して錐を出力する。すべてのリンクが平面的なら、ブランチグラフとセクターを計算する。各段階で、削除・穿孔・本質的弧切断から生じる有限個の位相型を列挙し、各候補がなお非埋め込みかを決定手続きで調べる。許容的候補があれば簡約し、なければ停止する。 κ の減少により必

ず有限回で停止し、出力は臨界型を表す。 □

13.12 障害集合は無限である

定理 13.17 (閉曲面から来る無限族). N_g を種数 $g \geq 1$ の閉向き付け不可能曲面とすると、

$$[N_g] \in \Gamma_M([S^3])$$

であり、これらの埋め込み型は互いに異なる。

理由. S^3 内の閉曲面は両側的であり、 S^3 が向き付け可能なのでその曲面も向き付け可能である。よって N_g は S^3 に埋め込めない。 N_g の真のコンパクト部分多面体は、境界をもつコンパクト曲面の正則近傍に含まれ、そのような曲面は S^3 に埋め込める。したがって $[N_g]$ は臨界的である。閉曲面間の埋め込みは不変領域定理により全射なので、相互埋め込みなら同相であり、 g が一致する。 □

閉曲面を除いても無限性は残る。Eto–Matsuzaki–Ozawa の正則多重分岐曲面 $X_2(n)$ は古典的臨界複体であり [13]、したがって $[X_2(n)] \in \Gamma_M([S^3])$ である。局所分岐次数

$$d(X) = \max\{k \geq 3 \mid X \text{ のある点で } k \text{ 枚のセクターが集まる}\}$$

は埋め込みに関して単調であり、 $d(X_2(n)) = n - 1$ なので、 $n \geq 4$ の型は互いに異なる。

したがって、意味のある分類問題は全障害型の有限性ではなく、局所分岐次数、セクター数、セクター種数、ブランチグラフ複雑度などを有界にしたクラスでの有限性である。

13.13 3 次元および高次元の型

n 次元球体 B^n の内点に、一端だけを接続した弧を加えた空間を $B^{n\perp}$ と書く。

定理 13.18 (すべての次元にある二つの型). 任意の $n \geq 1$ に対し、

$$[B^{n\perp}], [S^n \sqcup \{\bullet\}] \in \Gamma_M([S^n]).$$

特に

$$[B^{3\perp}], [S^3 \sqcup \{\bullet\}] \in \Gamma_M([S^3])$$

は 3 次元の臨界型である。

前者の非埋め込み性は、不変領域定理により B^n の内部の像が開集合となり、付加した弧の点を置く余地がないことから従う。後者では、 S^n の像が開かつ閉で S^n 全体となり、孤立点の行き先がない。原論文 [20] はさらに次を示す。

- コンパクト 3 次元多様体は、境界の有無にかかわらず、 $\Gamma_M([S^3])$ の要素を表さない。
- S^3 に埋め込めないコンパクト 3 次元多様体は、その特別スパインを通して 2 次元の臨界型を含む。
- 次元 4 以上の有限複体は $B^{3\perp}$ を含むので、臨界型を含む。
- 一般の 3 次元有限複体について同じ存在定理が成り立つかは未解決である。

最後の未解決部分は、リンクが S^2 を真に含む点をもたず、 S^3 型部分多面体を含まず、内部のコンパクト 3 次元多様体部分がすべて S^3 に埋め込める 3 次元複体である。

13.14 今後の問題

原論文 [20] から直接現れる問題を挙げる。

1. 有限単体的複体の埋め込み型の半順序は整礎的か、すなわち無限真降下列をもたないか。
2. 固定した有限 2 次元複体 X の下にある臨界型 $\{[Y] \in \Gamma_M([S^3]) \mid [Y] \preceq [X]\}$ は有限か。
3. $\Gamma_M([S^3])$ の各要素は、古典的臨界複体である代表元をもつか。
4. 局所分岐次数とセクター種数をともに固定しても、臨界型の無限族は存在するか。
5. 一般の 3 次元有限複体に主定理を拡張できるか。
6. Carmesin の単連結 2 次元複体に対する除外マイナー理論と、臨界的埋め込み型をどう比較すべきか。

13.15 学習目標の確認

本章では、次の点を説明できることを目標とする。

1. 埋め込み型 $[X]$ と半順序 $\preceq$ を定義できる。
2. $\Gamma_{cl}(Y)$ と $\Gamma_M([Y])$ の違いを説明できる。
3. 古典的臨界複体が臨界的埋め込み型を与える理由を説明できる。
4. 頂点リンクの平面性と局所可埋め込み性の同値を説明できる。
5. $\text{Cone } K_5, \text{Cone } K_{3,3}$ が臨界型である理由を説明できる。
6. 局所可埋め込み複体のブランチグラフとセクターを説明できる。
7. 三種類の基本簡約と辞書式複雑度 κ の役割を説明できる。
8. 主定理の局所場合と大域場合の証明方針を説明できる。
9. 主定理が分類定理ではないこと、障害集合が無限であることを説明できる。
10. 2 次元、3 次元、4 次元以上で何が証明され、何が未解決かを区別できる。

13.16 練習問題

練習問題 13.1. 有限複体の埋め込み型 $[X]$ と半順序 $[X] \preceq [Y]$ を定義し、半順序の 3 条件を確かめよ。

練習問題 13.2. 細分に頑健な古典的臨界複体の定義を述べよ。なぜ $r = 2$ だけでなく任意の $r \geq 2$ を量化するのか説明せよ。

練習問題 13.3. $X \in \Gamma_{cl}(Y)$ ならば $[X] \in \Gamma_M([Y])$ であることを、十分細かい重心細分の小さな開星を用いて示せ。

練習問題 13.4. 有限 2 次元複体の局所可埋め込み性が、頂点リンクの平面性と同値である理由を説明

せよ。

練習問題 13.5. $[\text{Cone } K_5]$ が $[S^3]$ に関して臨界的であることの証明を、錐頂点を避ける場合と含む場合に分けて説明せよ。

練習問題 13.6. 球面・二円板・弧からなる例の非埋め込み性が局所リンクではなく大域的分離に由来する理由を説明せよ。

練習問題 13.7. 局所可埋め込み複体に対する三種類の基本簡約を述べ、辞書式複雑度 κ が停止性を保証する仕組みを説明せよ。

練習問題 13.8. 臨界的障害型の存在定理を述べ、その証明を局所非可埋め込みの場合と局所可埋め込みの場合に分けて説明せよ。

練習問題 13.9. 固定細分の部分複体の中で単体数最小の非埋め込み複体を選ぶだけでは、なぜ埋め込み型臨界性を証明できないのか説明せよ。

練習問題 13.10. 簡約過程をアルゴリズムにできる理由と、そのことが実用上容易な判定を意味しない理由を説明せよ。

練習問題 13.11. $\Gamma_M([S^3])$ が無限であることを、閉向き付け不可能曲面の族を用いて説明せよ。

練習問題 13.12. 3次元の二つの既知の臨界型を挙げ、一般の3次元有限複体について何が未解決か説明せよ。

13.17 次章への橋渡し

本章では、局所削除に依存する臨界性を、相互 PL 埋め込みから得られる半順序へ拡張した。局所非可埋め込みの場合は二つの錐障害が現れ、局所可埋め込みの場合は表面層別と有限停止する簡約によって臨界型へ到達する。次章では、この結果を本巻全体の流れに位置づけ、有限分類ではなく有界クラスの分類へ研究課題を組み直す。

第 14 章

まとめと発展問題

14.1 本章の目標

本章は、数学特論 7 の最終回として、本巻全体を総合する章である。前半では、これまでに学んだ埋め込み問題の流れを整理し、後半では、最近の研究 [19, 20] の観点を取り入れて、今後の発展問題を提示する。

学習の指針

本章はまとめの章であり、新しい定理の証明はほとんど現れない。その代わり、第 1 章から第 13 章までの道具 (オイラー公式、クラトフスキーの定理、ホモロジーとトーション、多重分岐曲面と正則近傍、臨界性、埋め込み型の半順序) が「どの問題を解決するために導入されたのか」を意識して読んでほしい。用語が思い出せないときは、各章の該当箇所と巻頭の既習事項の要点に戻って確認しながら進むとよい。

本巻の出発点は、次の素朴な問いであった。

ある空間は、別の空間の中に交わずに入るだろうか。

この問いは、グラフの平面性ではクラトフスキーの定理として美しく解決された。しかし、2 次元複体を 3 次元球面 S^3 に埋め込む問題では、単純な有限リストだけでは捉えきれない多様な現象が現れる。そのため、本書では、ホモロジー、多重分岐曲面、種数、臨界的複体、そして相互 PL 埋め込みによる埋め込み型の順序構造を順に導入した。

本章では、とくに次の三つの到達点を強調する。

1. K_5 と $K_{3,3}$ による平面グラフの理論を、2 次元複体の S^3 埋め込み問題へどのように持ち上げるか。
2. 多重分岐曲面の正則近傍、ホモロジー、種数が、埋め込み障害としてどのように働くか。
3. 臨界性を、単なる「削除最小性」ではなく、埋め込み型の半順序における最小障害として捉え直す意義を理解すること。

本章の目標は次の通りである。

- 本巻全体の論理の流れを説明できる。

- 古典的な臨界性と、埋め込み型による臨界性の違いを理解する。
- $\text{Cone } K_5$ が従来の臨界性定義の限界を示す例であることを理解する。
- $(G \times S^1) \cup H$ 型複体の分類定理の考え方を整理する。
- 臨界的障害型の存在定理の意味を理解する。
- 卒業研究・修士研究へつながる発展問題を見つける。

14.2 本巻の全体像

本巻では、埋め込み問題を次の順序で学んだ。

段階	内容
第 1 段階	埋め込みの定義、ジョルダン型定理、wild/tame の違い
第 2 段階	単体的複体、重心細分、一般の位置
第 3 段階	グラフの平面性、オイラー公式、クラトフスキーの定理
第 4 段階	高次元ユークリッド空間への埋め込みとファン・カンペン障害
第 5 段階	ホモロジー群、トーション、 S^3 内の部分多様体の制約
第 6 段階	多重分岐曲面、正則近傍、種数、マイナー
第 7 段階	$G \times S^1$ 、臨界的複体、埋め込み型の半順序と最小障害

この流れの中心にあるのは、次の考え方である。

埋め込みが存在するなら満たされる条件を見つけ、その条件が破れることを示して、埋め込み不可能性を証明する。

たとえば、 K_5 の非平面性は、平面グラフなら成り立つはずの不等式 $e \leq 3v - 6$ に反することから示された。また、 S^3 に埋め込まれるコンパクト 3 次元部分多様体 M については、 $H_1(M)$ がトーションをもたないことを用いて、トーションをもつ対象の非埋め込み性を示した。

直観: 七つの段階のつながり

表の各段階は独立の話題ではなく、一本の筋でつながっている。第 3 段階までで「グラフを平面 (球面) に埋め込む」問題の完全な解答 (クラトフスキーの定理) を手に入れ、第 4~5 段階でホモロジーという代数的な障害の言葉を整備した。第 6 段階の多重分岐曲面は「 S^3 の中に入り得る 2 次元複体」の標準形であり、第 7 段階の臨界性と半順序は「最小の障害を探す」というクラトフスキー型の問いを 3 次元で定式化し直すための言語である。迷子になったらこの表に戻り、いまどの段階の道具を使っているのかを確認するとよい。

多重分岐曲面では、正則近傍 $N(X)$ が X に変形レトラクトするため、 $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。したがって、 $H_1(X)$ のトーションや、正則近傍の境界種数は、 S^3 への埋め込み可能性を調べるための重要な手がかりになる。

復習: 変形レトラクトとホモロジー

第 I 巻で学んだように、 $A \subset Y$ が Y の変形レトラクトならば、包含写像はホモトピー同値であり、すべての n について $H_n(A) \cong H_n(Y)$ が成り立つ。本巻では、これを $A = X$ (多重分岐曲面)、 $Y = N(X)$ (正則近傍) に適用して、2 次元複体のホモロジーを 3 次元多様体のホモロジーと同一視した。巻頭の既習事項の要点も参照。

14.3 クラトフスキーの定理から 3 次元版クラトフスキー計画へ

クラトフスキーの定理は、有限グラフ G が平面的でないための必要十分条件を、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むこととして与える。これは、平面への埋め込みを妨げる最小障害が、本質的には K_5 と $K_{3,3}$ であることを意味する。

この定理をモデルにすると、2 次元複体について次の問いが自然に現れる。

問題 14.1 (3 次元版クラトフスキー問題). S^3 に埋め込める 2 次元複体を、いくつかの「禁じられた複体」を含まないことによって特徴づけることはできるか。

この問いは、グラフの場合よりもはるかに難しい。理由は二つある。

第一に、2 次元複体には、単なる辺の交差だけでなく、面の貼り付き、正則近傍、補空間のホモロジー、局所的な特異性などが関わる。第二に、「最小障害」をどう定義するか自体が問題になる。単にセルや点を削除して最小性を見るだけでは、本質的な障害を捉えきれない場合がある。

本書で扱った多重分岐曲面や埋め込み型の半順序は、この 3 次元版クラトフスキー問題に取り組むための枠組みである。

14.4 古典的臨界性とその限界

第 11 章と第 12 章では、臨界的複体を

それ自身は埋め込めないが、任意の小さな部分を取り除くと埋め込める複体

として導入した。より厳密には、有限単体的複体 X が空間 Y に関して古典的に臨界的であるとは、 $|X|$ は $|Y|$ に埋め込めないが、任意の $r \geq 2$ と r 回重心細分 $X^{(r)}$ の任意の単体 σ について、その開星状近傍を取り除いた空間 $|X^{(r)} \setminus \text{ost}(\sigma)|$ は $|Y|$ に埋め込める、ということであった。

復習: 開星状近傍

単体的複体 K の単体 σ に対し、開星状近傍 $\text{ost}(\sigma)$ とは、 σ を面として含むすべての単体の内部の和集合である。これは $|K|$ の中で σ のまわりの開集合であり、「 σ の近くを少しだけ取り除く」操作を単体的に実現する。すべての $r \geq 2$ を量化するのは、細分が進むほど小さな局所削除が現れ、その削除後の可埋め込み性がより強い条件になるからである (第 11 章参照)。

この定義は、グラフの平面性に対してはうまく働く。たとえば、 K_5 と $K_{3,3}$ は S^2 に埋め込めないが、任意の辺を削除すると平面的になる。したがって、これらは平面性に対する古典的な臨界障害である。

具体例: K_5 から辺を 1 本除くと平面的になる

K_5 の頂点を a, b, c, d, e とし、辺 de を取り除いたグラフを考える。頂点数 $v = 5$ 、辺数 $e' = 10 - 1 = 9$ であり、平面グラフの不等式 $e' \leq 3v - 6 = 9$ は等号で成り立つので、不等式からは非平面性はない。実際、三角形 abc を平面に描き、 d をその内側、 e をその外側に置いて、 d と e をそれぞれ a, b, c に結べば、辺は一度も交わらない。これで de 以外の 9 本の辺がすべて描けたので、 K_5 から辺を 1 本除いたグラフは平面的である。どの辺を除いても対称性から同じ結論になる。

しかし、この定義には限界がある。重要な例が K_5 の錐 $\text{Cone } K_5$ である。これは、 K_5 に新しい頂点の一つを加え、その頂点から K_5 の各点へ向かう錐を作って得られる 2 次元複体である。

命題 14.2. $\text{Cone } K_5$ は S^3 に埋め込めない。

証明の考え方. もし $\text{Cone } K_5$ が S^3 に埋め込めたとする。錐の頂点のまわりに十分小さい 2 球面を取ると、その球面は $\text{Cone } K_5$ と、底面の K_5 と同相なグラフで交わる。したがって、 K_5 が S^2 に埋め込まれることになる。これは K_5 の非平面性に反する。よって $\text{Cone } K_5$ は S^3 に埋め込めない。 $\square$

ところが、 $\text{Cone } K_5$ は上の古典的定義では臨界的でない。底面側の小さな 2 単体の開星状近傍を取り除いても、錐の頂点のまわりには依然として K_5 型のリンクが残るため、なお S^3 には埋め込めないからである。

この例は、物理的に「小さな部分を取り除く」定義だけでは、埋め込み不可能性の本質的な最小原因を捉えきれないことを示している。

直観: 錐の頂点のリンクを見る

上の証明の考え方は、「特異点のまわりの小さな球面との交わり (リンク) を見る」という、本巻で繰り返し使った局所的な手法である。錐の頂点のリンクは底面の K_5 と同相なので、埋め込みがあればリンクが S^2 に入ってしまう、非平面性と矛盾する。一方、底面側の 2 単体を少し削っても、頂点のリンクは K_5 の部分分割を含んだままなので、同じ議論が生き残る。つまり $\text{Cone } K_5$ の非埋め込み性の「原因」は頂点のごく近くに集中しており、底面側をいくら削っても消えない。これが古典的臨界性が失敗する仕組みである。

14.5 埋め込み型による臨界性の再定義

そこで、[20] では、複体を「どの複体に埋め込めるか」という観点から比較する枠組みが導入される。有限単体的複体 X, Y に対して、 $X \preceq Y$ とは、 $|X|$ が $|Y|$ に PL 埋め込み可能であることを意味する。また、 $X \sim Y$ を、 $X \preceq Y$ かつ $Y \preceq X$ が成り立つこととして定義する。この同値関係による同値類を $[X]$ と書き、これを X の**埋め込み型**と呼ぶ。

この同値類の上には自然な半順序が入る。すなわち、 $[X] \preceq [Y]$ とは、 X が Y に埋め込めることを意味する。この順序では、 $[X] \preceq [Y]$ は、 X が Y よりも埋め込みの意味で単純であることを表す。

具体例: 小さな複体の埋め込み型を比較する

- S^1 は赤道として S^2 に埋め込めるが、 S^2 は S^1 に埋め込めない (コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続単射は像への同相を与えるが、 S^1 の部分空間に S^2 と同相なものはない)。よって $[S^1] \prec [S^2]$ であり、これは真の不等式である。
- K_5 は $\mathbb{R}^3 \subset S^3$ の中に、頂点を一般の位置に取って辺を線分で結べば埋め込めるので、 $[K_5] \preceq [S^3]$ である。グラフは 1 次元なので、 S^2 に埋め込めない K_5 も、次元を一つ上げれば埋め込める。
- 一方、本節の言葉では、 K_5 の非平面性は $[K_5] \not\preceq [S^2]$ と書ける。

このように、既知の埋め込み・非埋め込みの事実は、すべて半順序の言葉に翻訳できる。

定義 14.3 (埋め込み型としての臨界性). 埋め込み型 $[X]$ が $[Y]$ に関して**臨界的**であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう。

1. $[X] \not\preceq [Y]$ 、すなわち X は Y に埋め込めない。
2. $[Z] \prec [X]$ を満たす任意の真に小さい埋め込み型 $[Z]$ について、 $[Z] \preceq [Y]$ が成り立つ。

この定義は、具体的にどのセルを削除するかではなく、埋め込み型の半順序の中で最小かどうかを見る。したがって、Cone K_5 のように、古典的な削除操作では臨界的と判定されない障害も、埋め込み型の意味では臨界的な障害として捉え直すことができる。

14.6 臨界的障害型の存在定理

埋め込み型による再定義の利点は、単に例を救うことだけではない。より重要なのは、次のような存在定理が成り立つことである。

定理 14.4 (臨界的障害型の存在定理). X を有限 2 次元単体的複体とする。もし $|X|$ が S^3 に埋め込めないならば、 $|X|$ に埋め込まれる有限 2 次元複体 X_0 が存在して、 $[X_0]$ は $[S^3]$ に関して臨界的である。言い換えると、必要なら X を細分することで、 X の中に S^3 への埋め込みを妨げる最小の埋め込み型をもつ部分複体を見つけられる。

証明の二分法

頂点リンクが非平面的なら、クラトフスキーの定理により Cone K_5 または Cone $K_{3,3}$ を取り出す。すべてのリンクが平面的なら、ブランチグラフと曲面セクターからなる正規形に移り、非埋め込み性を保つ削除・穿孔・本質的弧切断を有限回行う。停止した簡約障害が半順序全体で臨界的であることは、局所削除の有限場合分けによって保証される。固定細分の部分複体から単体数最小のものを選ぶだけでは、この最後の極小性は得られない。

この定理は、3 次元版クラトフスキー計画の正当性を支える。つまり、 S^3 に埋め込めない 2 次元複体を調べるとき、その内部に必ず何らかの最小障害型が存在する。したがって、「禁じられた複体を探す」という方針は、単なる比喩ではなく、半順序集合の最小元を探す問題として定式化できる。

直観: クラトフスキーの定理との対応

グラフの場合と比べると、この定理の位置づけがよく分かる。平面性では「非平面的グラフは必ず K_5 か $K_{3,3}$ の部分分割を含む」が成り立ち、障害のリストは 2 個で尽きていた。存在定理はその前半、すなわち「埋め込めない複体の中には必ず臨界的な障害が見つかる」という部分の 3 次元版である。ただし後半のリストの有限性は保証されず、実際に無限個の臨界型が存在する (修士研究に向けた問題 6 を参照)。この「存在は言えるが有限性は言えない」という非対称性が、3 次元の難しさの核心である。

有効性と次元に関する補足

有限 2 次元複体の S^3 可埋め込み性は決定可能なので、上の簡約過程はアルゴリズム化できる。ただし判定問題は NP-hard であり、決定可能性は計算が容易であることを意味しない。また、3 次元では $B^{3\perp}$ と $S^3 \sqcup \{\bullet\}$ という二つの臨界型が知られ、コンパクト 3 次元多様体は臨界型を表さない。一般の 3 次元有限複体への存在定理の拡張は未解決である。

ただし、存在定理は、臨界的障害型の集合が有限であることを意味しない。むしろ、次の重要な研究問題が残る。

問題 14.5. $\Gamma_M([S^3])$ は閉向き付け不可能曲面と多重分岐曲面の双方から無限族を含む。局所分岐次数、セクター数、セクター種数、ブランチグラフ複雑度などを有界にしたとき、対応する臨界型の部分集合は有限になるか。また、その要素を有効に列挙できるか。

14.7 $(G \times S^1) \cup H$ 型複体の分類

第 12 章で扱った複体 $X = (G \times S^1) \cup H$ は、グラフ理論と 2 次元複体の埋め込み問題を直接つなぐ重要な例である。ここで G と H はグラフであり、 $G \times S^1$ の部分に H が貼り付けられていると考える。

この型の複体では、円周方向をつぶす縮約写像 $\hat{f}: (G \times S^1) \cup H \rightarrow G \cup H$ を考えることができる。直感的には、各円筒状セクター $e \times S^1$ を元の辺 e に押しつぶす写像である。

この縮約は、埋め込み問題を低次元の問題へ落とす。すなわち、縮約グラフ $\hat{X} = G \cup H$ が S^2 に埋め込めるなら、元の複体 X は S^3 に埋め込める。したがって、対偶として、 X が S^3 に埋め込めないなら、 $\hat{X}$ は非平面的でなければならない。

具体例: G がサイクルのとき

G を頂点 3 個・辺 3 本のサイクル (三角形) とし、 $H = \emptyset$ とする。このとき $G \times S^1$ はトーラス $S^1 \times S^1$ であり、 S^3 の中の標準的なトーラスとして実際に埋め込める。一方、縮約グラフは $\hat{X} = G$ 自身、すなわち平面的な三角形である。「縮約グラフが平面的ならば X は S^3 に埋め込める」という上の主張と整合していることを確認してほしい。逆に $G = K_5$ とすると縮約グラフは非平面的になり、この判定法からは埋め込み可能性について何も結論できない (実際に $K_5 \times S^1$ が埋め込めないことの証明は第 11 章の基本障害定理を参照)。

ここでクラトフスキーの定理を適用すると、 $\widehat{X}$ は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。ただし、これは非埋め込みの必要条件にすぎない。必要十分条件は面条件で与えられる： X が S^3 に埋め込めるのは、 G のある平面埋め込みにおいて、 H の各ピースの貼り付け集合が一つの面の上にあるとき、かつそのときに限る。

[19] の分類定理は、この判定条件に基づいている。

定理 14.6 (直積型臨界複体の分類). $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に関して古典的に臨界的であるための必要十分条件は、 $|X|$ が次のいずれかと同相であることである。

- (I) クラトフスキー型の 3 種類 (K_5 と $K_{3,3}$ に由来する)。
- (II) 巡回順序型の 6 種類 (Θ_4 の上に作られる)。
- (III) パリティ型の無限族 (奇数個のマーク付き二重辺をもつ閉路の上に作られる)。

証明戦略の本質は次の通りである。

1. $G \times S^1$ の S^3 への任意の埋め込みについて、補空間の領域が G の平面埋め込みの面と対応することを示し、面条件による埋め込み判定と臨界性の条件 (C0), (C1), (C2) を得る。
2. ピースが 1 個の場合は、クラトフスキーの定理により型 (I) が得られる。
3. ピースが 2 個以上の場合は、 G の平面埋め込みの自由度を SPQR 木で解析し、型 (II) と型 (III) に到達する。

この結果は、3 次元の埋め込み問題の一部が、平面グラフの組合せ論を通して完全に分類できることを示している。臨界的複体は無限個あるが、障害の仕組みは「一つのグラフの非平面性」「巡回順序」「パリティ」の三つに限られる。

14.8 多重分岐曲面・種数・ホモロジーの役割

本巻後半で導入した多重分岐曲面の理論は、臨界的複体を調べるためのもう一つの重要な道具である。多重分岐曲面 X の正則近傍 $N(X)$ は 3 次元多様体であり、多くの場合 $N(X)$ は X に変形レトラクトする。したがって、 X のホモロジーは 3 次元近傍のホモロジーとして理解できる。

また、正則近傍の境界種数や埋め込み可能種数を使うことで、多重分岐曲面の複雑さを測ることができる。第 10 章で扱った評価式は、概念的には次の形で理解できる。

多重分岐曲面の種数は、 H_1 のランクと境界の種数によって下から制約される。

すなわち、ホモロジーが大きい複体を低い種数の 3 次元多様体に収めるには限界がある。さらに、 H_1 にトーションが現れる場合には、第 7 章のトーション消滅定理により、 S^3 への埋め込み不可能性が従う。

このように、多重分岐曲面の研究では、

組合せ構造 $\longrightarrow$ ホモロジー計算 $\longrightarrow$ 埋め込み障害

という流れが基本になる。

14.9 到達度確認の観点

本書の到達度確認では、単に定義を暗記するだけでなく、次の四つの力を確認したい。

1. **定義を正確に述べる力。** 埋め込み、平面的グラフ、単体的複体、多重分岐曲面、臨界性、埋め込み型を正確に説明できるか。
2. **基本定理を使う力。** オイラー公式、クラトフスキーの定理、一般の位置、マイヤー・ヴィートリス完全系列を適切に使えるか。
3. **障害を見つける力。** オイラー標数、トーション、種数、縮約グラフの非平面性を使って、非埋め込み性を説明できるか。
4. **発展的な見方を説明する力。** 古典的臨界性の限界、埋め込み型の半順序、存在定理の意義を自分の言葉で説明できるか。

特に、本章では、個別の計算問題だけでなく、「なぜこの定義が必要になったのか」、「どの定理がどの問題を解決しているのか」という全体像を重視する。

研究ノート：古典から発展へ

第 1 章から第 7 章までは、ジョルダン型定理、クラトフスキーの定理、ホモロジー、マイヤー・ヴィートリス完全系列など、主に確立された古典的道具を学ぶ部分である。第 8 章以降は、多重分岐曲面、種数評価、臨界的複体、埋め込み型の半順序など、研究テーマに直結しやすい話題へ進む。卒業研究では、まず小さな例を計算し、どの障害が効くかを確認することから始めるとよい。

14.10 3 次元版クラトフスキー計画の現状と展望

クラトフスキーの定理は、平面に埋め込めないグラフを、 K_5 と $K_{3,3}$ という二つの禁止構造で特徴づける。本書で扱ってきた問題は、この考え方を 3 次元空間と 2 次元複体へ拡張できるか、という問いである。しかし、3 次元では障害の種類が急に増える。ホモロジーのトーション、正則近傍の種数、分岐構造、縮約操作、埋め込み型の半順序が、それぞれ異なる側面を反映する。

したがって、3 次元版クラトフスキー計画の目標は、単に有限個の例を列挙することではない。重要なのは、障害を比較する枠組みを作り、どの意味で最小なのかを明確にすることである。第 13 章の半順序は、そのための一つの言語である。今後の研究では、具体例の分類、最小性の判定、既知の障害との関係を結びつけることが中心課題となる。

14.11 卒業研究に向けた問題

ここでは、学部 4 年生の卒業研究として取り組みやすい問題を挙げる。

学習の指針

発展問題に取り組むときは、いきなり一般論を目指さず、まず問題 1~3 のように「最後まで手で計算できる小さな例」を一つ選んで完走することを勧める。グラフなら頂点と辺を列挙してオイラー公式を検算し、複体なら鎖群と境界写像を行列で書き下してスミス標準形まで計算する。計算が一つ完成すると、問題 4 以降の概念的な比較 (古典的臨界性と埋め込み型臨界性の違いなど) が具体的なイメージを伴って理解できるようになる。

問題 1: 小さなグラフの平面性とクラトフスキー障害

頂点数が小さいグラフについて、平面性を判定せよ。具体的には、頂点数 5 または 6 の連結グラフをいくつか選び、次を調べるとよい。

- オイラー公式による不等式で非平面性を検出できるか。
- K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むか。
- 辺を 1 本削除したとき、平面的になるか。

問題 2: $G \times S^1$ の計算

有限連結グラフ G に対し、 $G \times S^1$ のセル構造とホモロジー群を計算せよ。とくに、 G の第一ベッチ数を $\beta_1(G) = e - v + 1$ とすると、

$$H_1(G \times S^1) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)+1}, \quad H_2(G \times S^1) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)}$$

となることを具体例で確認せよ。

問題 3: 多重分岐曲面のホモロジー計算

多重分岐曲面 X について、ブランチを生成元とし、セクターの境界が与える関係式から $H_1(X)$ を計算せよ。行列表示を用いると、トーション部分をスミス標準形によって求められる。

たとえば、接続行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

から現れるトーション部分を調べる問題は、多重分岐曲面の埋め込み障害を理解する良い例である。

問題 4: 古典的臨界性と埋め込み型臨界性の比較

K_5 、 $K_5 \times S^1$ 、 $\text{Cone } K_5$ を比較し、それぞれがどの意味で臨界的な障害になるかを調べよ。特に、 $\text{Cone } K_5$ が古典的な開星状近傍削除の定義では臨界的でない一方、埋め込み型の半順序では臨界的に見える理由を説明せよ。

14.12 修士研究に向けた問題

より発展的には、次のような研究課題が考えられる。

問題 5：臨界的埋め込み型の分類

S^3 に関する臨界的埋め込み型 $[X]$ を分類せよ。すべての有限 2 次元複体での分類は非常に難しいため、まずは次のような部分クラスに制限するのが自然である。

- 正則多重分岐曲面。
- $G \times S^1$ 型複体。
- $(G \times S^1) \cup H$ 型複体。
- ブランチ数やセクター数が小さい多重分岐曲面。

問題 6：有界クラスでの有限性

グラフの平面性では、障害物は K_5 と $K_{3,3}$ の 2 種類であった。一方、2 次元複体の S^3 への埋め込みでは、臨界的埋め込み型の集合は無限であることが知られている [20]。向き付け不可能閉曲面の族と、多重分岐曲面の族 $X_2(n)$ が、それぞれ無限個の相異なる臨界型を与えるからである。

復習: 向き付け不可能閉曲面が臨界型を与える理由

S^3 に埋め込まれた閉曲面は ジョルダン – ブラウアー分離定理により S^3 を分離し、両側的である。 S^3 は向き付け可能なので、その閉曲面も向き付け可能でなければならない。したがって種数 k の向き付け不可能閉曲面 N_k は S^3 に埋め込めない。一方、 N_k の真のコンパクト部分多面体は境界をもつ曲面の中に入り、そのような曲面は S^3 に埋め込める。よって $[N_k]$ は臨界的である。さらに閉曲面間の埋め込みは不変領域定理により全射になるため、相互埋め込みなら同相であり、異なる k は異なる埋め込み型を与える。

問題 14.7. 局所分岐次数、セクター数、セクターの種数、ブランチグラフの複雑さを制限した有界クラスに対して、対応する臨界的埋め込み型の集合は有限か。有限なら、それを列挙できるか。

この問題は、3 次元版クラトフスキー理論の中心的課題である。

問題 7：局所可埋め込み性と大域的障害

ある 2 次元複体が局所的には B^3 に埋め込めるが、全体としては S^3 に埋め込めない場合、その非埋め込み性は大域的な障害に由来する。このような複体について、ホモロジー、正則近傍、補空間、臨界的埋め込み型を調べよ。

問題 8：マイナー理論との接続

多重分岐曲面に対して、セクター削除やアニュラスセクターの縮約を用いたマイナー理論を考える。このマイナー操作に関して、 S^3 埋め込み可能性が閉じているか、またその障害物集合をどのように定義できるかを調べよ。

問題 9：固定した複体の下の局所有限性

固定した有限 2 次元複体 X に対して

$$\{[Y] \in \Gamma_M([S^3]) \mid [Y] \preceq [X]\}$$

は有限かを調べよ。全体の障害集合が無限でも、一つの有限複体の内部に実現される臨界型は有限である可能性がある。この問いは原論文 [20] で未解決問題として提起されている。

問題 10：3 次元臨界型の分類

既知の 3 次元臨界型 $B^{3\perp}$ と $S^3 \sqcup \{\bullet\}$ 以外に、 S^3 に対する 3 次元臨界型が存在するかを調べよ。候補は、リンクが S^2 を真に含む点をもたず、 S^3 型部分多面体を含まず、コンパクト 3 次元多様体でもない必要がある。

14.13 練習問題

練習問題 14.1. 本巻の流れを、

グラフの平面性 $\longrightarrow$ 高次元埋め込み $\longrightarrow$ 多重分岐曲面 $\longrightarrow$ 臨界的複体

という観点から説明せよ。

練習問題 14.2. 古典的臨界性の定義を述べよ。特に、任意の $r \geq 2$ と開星状近傍を用いる理由を説明せよ。

練習問題 14.3. $\text{Cone } K_5$ が S^3 に埋め込めない理由を説明せよ。また、なぜ $\text{Cone } K_5$ 自身は古典的な意味では臨界的でないのか説明せよ。

練習問題 14.4. 埋め込み型 $[X]$ と、埋め込み型の半順序 $[X] \preceq [Y]$ を定義せよ。また、この順序が「単純さ」を表している理由を説明せよ。

練習問題 14.5. 埋め込み型としての臨界性を定義せよ。また、この定義が古典的臨界性よりも柔軟である理由を説明せよ。

練習問題 14.6. 臨界的障害型の存在定理を述べ、その意義を説明せよ。

練習問題 14.7. $X = (G \times S^1) \cup H$ に対する縮約写像 $\hat{f}: X \rightarrow G \cup H$ を説明せよ。また、 $G \cup H$ が平面的なら X が S^3 に埋め込める理由を説明せよ。

練習問題 14.8. $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込めないなら、縮約グラフ $G \cup H$ は非平面的でなければならない。このことを、前問の対偶として説明せよ。

練習問題 14.9. $(G \times S^1) \cup H$ 型の臨界複体の分類定理を述べ、三つの型がどのような障害の仕組みに対応するかを、クラトフスキーの定理との関係に触れながら説明せよ。

練習問題 14.10. 多重分岐曲面の H_1 にトーションが現れると、なぜ S^3 への埋め込み障害になるのか説明せよ。

練習問題 14.11. 接続行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のミス標準形が対角成分 $1, 1, 1, 3$ をもつとする。この行列が与えるアーベル群のトーション部分を求めよ。

練習問題 14.12. $\Gamma_M([S^3])$ 全体が無限であるにもかかわらず、有界な部分クラスでの有限分類が 3 次元版クラトフスキー計画にとって重要である理由を説明せよ。

14.14 本巻の結論

本巻を通して見てきたことは、次の一文にまとめられる。

埋め込み問題とは、空間そのものだけでなく、その近傍、補空間、ホモロジー、種数、そして埋め込み型の順序構造を同時に調べる問題である。

グラフの平面性は、 K_5 と $K_{3,3}$ という明確な障害によって支配されていた。2 次元複体の S^3 への埋め込み問題では、状況はより複雑であるが、多重分岐曲面、臨界的複体、埋め込み型の半順序を用いることで、その複雑さを整理する道筋が見えてくる。

本書の到達点は、完全な分類を与えることではなく、分類へ向かうための道具と視点を身につけることである。今後、学生自身が具体例を計算し、障害を見つけ、新しい臨界的複体を探すことで、この理論はさらに発展していく。

第 II 部

模範解答編

解答編の使い方

この解答編では、本文第 1 章から第 14 章までの練習問題に対する詳しい解答をまとめる。単に答えだけを示すのではなく、どの定義・定理・計算を用いるかが分かるように、途中の理由も記した。まず本文の練習問題を自分で考え、その後でこの解答を参照すると効果的である。

読み方

埋め込み問題では、「もし埋め込めるなら何が成り立つか」を先に考え、その必要条件が破れることを確認するのが基本である。ホモロジー計算では、鎖群、境界作用素、サイクル、バウンダリ、商群という順に確認すると見通しがよい。多重分岐曲面では、ブランチ、セクター、プレブランチ、正則近傍の対応を図で思い浮かべながら読むと理解しやすい。

第 1 章

第 1 章 埋め込み問題への導入 の解答

問題 1

問題

次の写像が埋め込みであるかどうかを判定せよ。

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t).$$

解答

この写像は埋め込みではない。理由は、 $f(0) = (1, 0)$, $f(1) = (1, 0)$ であり、 $0 \neq 1$ であるにもかかわらず同じ点に写るからである。したがって f は単射ではない。

埋め込みであるためには、少なくとも異なる点が異なる点に写らなければならない。この写像は区間 $[0, 1]$ を一周させて円周に写す写像であり、端点 0 と 1 を貼り合わせるように働いている。したがって、定義域を $[0, 1]$ としている限り、埋め込みではない。

ただし、 $[0, 1]$ の端点 0 と 1 を同一視して得られる空間は円周 S^1 である。その商空間から単位円周への写像として見れば、これは標準的な円周の埋め込みになる。この違いは、埋め込みでは「像の形」だけでなく「定義域の位相」が重要であることを示している。

問題 2

問題

位相空間 X から Y への写像 $f : X \rightarrow Y$ が埋め込みであることの定義を述べよ。また、単に連続な単射であることと何が違うか説明せよ。

解答

写像 $f : X \rightarrow Y$ が埋め込みであるとは、 f が X から像 $f(X)$ への同相写像を与えることをいう。ここで、 $f(X)$ には Y からの相対位相を入れる。すなわち、 f は連続で単射であり、さらに逆写像 $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ も連続でなければならない。

連続な単射であることは、点集合としては X を Y の中に重ならないように入れていることを意味する。しかし、それだけでは、像 $f(X)$ の位相がもとの X の位相と一致するとは限らない。埋め込みでは、点が一对一に対応するだけでなく、近さや収束の仕方も保たれる必要がある。したがって、埋め込みとは「形を位相的に保ったまま部分空間として入れる」ことを表す概念である。

問題 3

問題

ジョルダン曲線とは何かを説明し、円、楕円、複雑に曲がった単純閉曲線がいずれもジョルダン曲線の例である理由を述べよ。

解答

ジョルダン曲線とは、平面内の部分空間で、円周 S^1 と同相なものをいう。同じことを、平面内の単純閉曲線ともいう。「単純」とは自己交差がないこと、「閉」とは始点と終点がつながって輪になっていることを意味する。

円は明らかに S^1 と同相であるから、ジョルダン曲線である。楕円も、円を一方向に伸ばしたものと考えられ、位相的には円周と同じなのでジョルダン曲線である。さらに、複雑に曲がった曲線であっても、途中で自分自身と交わらず、1本の閉じた輪になっていれば、それは S^1 と同相である。したがって、滑らかであるか、多角線であるか、複雑に曲がっているかにかかわらず、自己交差のない閉じた輪はジョルダン曲線である。

問題 4

問題

円周 S^1 を平面に標準的に埋め込んだとき、補空間 $\mathbb{R}^2 - S^1$ の連結成分を述べよ。また、それぞれが有界か非有界かを答えよ。

解答

標準的な埋め込みで S^1 を単位円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と見る。このとき補空間は $\mathbb{R}^2 - S^1 = \{x^2 + y^2 < 1\} \cup \{x^2 + y^2 > 1\}$ である。

集合 $\{x^2 + y^2 < 1\}$ は円周の内側であり、有界な連結成分である。一方、 $\{x^2 + y^2 > 1\}$ は円周の外側であり、非有界な連結成分である。ジョルダン曲線定理は、標準円周だけでなく、任意のジョルダン曲線について同じように内側と外側の2つの連結成分が存在することを主張している。

問題 5

問題

ジョルダン曲線定理の証明の考え方を、多角線の場合、半直線法、近似という三つの語を用いて説明せよ。

解答

ジョルダン曲線定理の完全な証明は難しいが、基本的な考え方は次の三段階で説明できる。

第一に、任意の曲線をいきなり扱うのではなく、まず単純閉多角線の場合を考える。多角線は有限個の線分からなるため、交点の数を数える議論がしやすい。

第二に、単純閉多角線に対して半直線法を用いる。点 P から十分一般の方向に半直線を引き、その半直線が多角線と交わる回数を数える。交点の数が奇数なら P は内側、偶数なら P は外側と判定する。この判定が半直線の選び方によらないことを示すことで、平面上の点を内側と外側に分けることができる。

第三に、一般のジョルダン曲線を単純閉多角線で近似する。複雑な曲線でも、十分細かく見れば多角線で近似できる。多角線について得られた内側・外側の分離の性質を、近似の極限に移すことで、一般のジョルダン曲線の場合の結論を得る。この最後の部分を厳密に行うには、コンパクト性や ε - δ 論法などが必要になる。

問題 6

問題

ジョルダン曲線定理とジョルダン－シェーンフリースの定理の違いを、「分割の有無」と「分割の質」という観点から説明せよ。

解答

ジョルダン曲線定理は、平面内の単純閉曲線 C が平面を 2 つの連結成分に分けることを述べる定理である。つまり、この定理は「分割の有無」に関する定理である。具体的には、 $\mathbb{R}^2 - C$ が有界な内側と非有界な外側の 2 成分に分かれ、 C が両成分の共通の境界になることを主張する。

一方、ジョルダン－シェーンフリースの定理は、その分割が標準的であることを述べる。任意のジョルダン曲線 C に対して、平面全体の同相写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ で $F(C) = S^1$ となるものが存在する。したがって、 C の内側は円板と同相であり、外側も標準円周の外側と同じ位相型をもつ。つまり、ジョルダン－シェーンフリースの定理は「分割の質」に関する定理である。

まとめると、ジョルダン曲線定理は「分かれる」ことを述べ、ジョルダン－シェーンフリースの定理は「その分かれ方が標準的である」ことを述べる。

問題 7

問題

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ の中では、円周 S^1 を非自明に結ぶことができない。その理由を、ジョルダン – シェーンフリースの定理を用いて説明せよ。

解答

平面内の円周の埋め込みの像は、ジョルダン曲線である。ジョルダン – シェーンフリースの定理によれば、任意のジョルダン曲線 $C \subset \mathbb{R}^2$ に対して、平面全体の同相写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が存在し、 $F(C) = S^1$ となる。

これは、どれほど複雑に描かれた単純閉曲線でも、平面全体を連続的に変形することで標準円周に移せることを意味する。したがって、平面内の円周の埋め込みには、3 次元空間の結び目のような非自明な結び方は存在しない。平面の中では、曲線が自己交差しない限り、すべての閉じた輪は位相的には標準円周と同じである。

問題 8

問題

ジョルダン – ブラウアー分離定理の主張を述べ、 $n = 3$ の場合に何を意味するか説明せよ。

解答

ジョルダン – ブラウアー分離定理は、 S^{n-1} が $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれているとき、その補空間 $\mathbb{R}^n - S^{n-1}$ がちょうど 2 つの連結成分に分かれることを主張する。一方は有界成分であり、もう一方は非有界成分である。さらに、埋め込まれた S^{n-1} は、それら 2 つの成分の共通の境界になる。

$n = 3$ の場合には、 S^2 が $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれている状況である。このとき、任意の埋め込まれた球面 S^2 は、3 次元空間を内側と外側の 2 つに分ける。ただし、この定理が保証するのは「2 つに分かれる」ことまでであり、その内側や外側が標準的な 3 次元球体と同相であることまでは保証しない。この点が、2 次元のジョルダン – シェーンフリースの定理との大きな違いである。

問題 9

問題

アレクサンダーの角付き球面が、なぜ 3 次元におけるジョルダン – シェーンフリース型定理の反例になるのか説明せよ。また、tame な埋め込みと wild な埋め込みの違いを述べよ。

解答

ジョルダン－シェーンフリースの定理は、平面内のジョルダン曲線について、その内側が円板と同相であり、平面全体の同相写像で標準円周に移せることを述べる。もしこのような性質が3次元でもそのまま成り立つなら、 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた任意の球面 S^2 は、標準的な球面と同じように、3次元球体とその外側に分けるはずである。

しかし、アレクサンダーの角付き球面は S^2 と同相でありながら、補空間の一方が標準的な球体の補空間と同相でない。特に、無限に絡み合う角の構造のために、補空間には一点に縮められないループが現れ、基本群が非自明になる。このため、3次元では「球面が空間を2つに分ける」ことは成り立っても、「分け方が必ず標準的である」とは言えない。この意味で、アレクサンダーの角付き球面は3次元版のシェーンフリース型主張に対する反例である。

tame な埋め込みとは、標準的な多面体的または滑らかな埋め込みと同じように扱える埋め込みである。その補空間も期待される標準的な性質をもつ。一方、wild な埋め込みとは、空間そのものは通常の球面や円周と同相であっても、埋め込まれ方が病的で、補空間の基本群や局所構造に異常が現れる埋め込みである。アレクサンダーの角付き球面は、wild な埋め込みの代表例である。

問題 10

問題

「 K_5 が平面に埋め込めない」という主張を証明するには、なぜ一つの図を描くだけでは不十分なのか説明せよ。

解答

一つの図で K_5 を平面に描いて交差が生じたとしても、それはその描き方が失敗したことを示すだけである。別の描き方では交差を避けられる可能性が、まだ残っている。したがって、一つの図だけでは、 K_5 が本当に平面に埋め込めないことを証明したことにはならない。

非平面性を証明するには、 K_5 のあらゆる平面への描き方を排除する必要がある。そのためには、平面に埋め込めるなら必ず満たされる条件を見つけ、 K_5 がその条件に反することを示すのが有効である。たとえば、第3章で扱うように、単純平面グラフで $v \geq 3$ なら $e \leq 3v - 6$ が成り立つ。 K_5 では $v = 5$, $e = 10$ なので、この不等式は $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ を要求することになり、矛盾する。したがって、 K_5 は平面に埋め込めない。

このように、埋め込み不可能性を示すには、特定の図ではなく、すべての可能な埋め込みに共通して成り立つ不変量や条件を用いる必要がある。この条件が破れることを示すものが、埋め込み障害である。

第 2 章

第 2 章 単体的複体と多面体の復習 の 解答

問題 1

問題

n 単体の定義を、「アフィン独立」と「凸包」という語句を用いて述べよ。

解答

n 単体とは、 $\mathbb{R}^N$ 内のアフィン独立な $n + 1$ 個の点の凸包である。より詳しく書くと、点 $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ がアフィン独立であるとは、 $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$ が線形独立であることをいう。このとき、これらの点の凸包

$$[v_0, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

を n 単体という。

ここで凸包という条件は、頂点 $v_0, \dots, v_n$ を含む最小の凸集合を取るという意味である。たとえば、 $n = 0$ では点、 $n = 1$ では線分、 $n = 2$ では中身を含む三角形、 $n = 3$ では中身を含む四面体が得られる。

問題 2

問題

2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ のすべての面を列挙せよ。

解答

単体の面は、その頂点集合の部分集合を選ぶことで得られる。2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ の頂点集合は $\{v_0, v_1, v_2\}$ である。

まず、1 個の頂点を選ぶと 0 次元の面が得られる。したがって 0 面は $[v_0]$, $[v_1]$, $[v_2]$ である。

次に、2 個の頂点を選ぶと 1 次元の面、すなわち辺が得られる。したがって 1 面は $[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$, $[v_0, v_2]$ である。

最後に、3 個の頂点すべてを選ぶと、もとの 2 単体自身 $[v_0, v_1, v_2]$ が得られる。これも自分自身の面とみなす。よって、非空の面をすべて列挙すると、3 個の頂点、3 個の辺、1 個の 2 単体自身である。

問題 3

問題

単体の有限集合 K が単体的複体であるための 2 つの条件を述べよ。また、それぞれの条件が何を意味しているか説明せよ。

解答

単体の有限集合 K が単体的複体であるためには、次の 2 条件を満たす必要がある。

第一は**面の条件**である。これは、 $\sigma \in K$ であり、 τ が σ の面ならば、必ず $\tau \in K$ であるという条件である。たとえば、2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ を K に入れたなら、その 3 つの辺と 3 つの頂点もすべて K に入っていなければならない。つまり、部品として三角形を使うなら、その構成要素もすべて含めるという条件である。

第二は**交わりの条件**である。これは、 $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ に対して、交わり $\sigma_1 \cap \sigma_2$ が空集合であるか、または σ_1 と σ_2 の共通の面でなければならないという条件である。たとえば、2 つの三角形が 1 本の辺全体を共有している場合はよい。共有部分が両方の三角形の共通の 1 面だからである。一方、片方の頂点がもう片方の辺の途中に接しているだけの場合は、その点がもう片方の三角形の面として登録されていないので、そのままでは交わりの条件を満たさない。

問題 4

問題

2 つの三角形が 1 つの辺全体を共有して貼り合わされている図形は、単体的複体の交わりの条件を満たすか。理由を述べよ。

解答

交わりの条件を満たす。

理由は、2 つの三角形の共通部分が、ちょうど 1 本の辺全体になっているからである。たとえば、三角形 $\sigma_1 = [v_0, v_1, v_2]$ と $\sigma_2 = [v_1, v_2, v_3]$ が辺 $[v_1, v_2]$ を共有しているとする。このとき $\sigma_1 \cap \sigma_2 = [v_1, v_2]$ である。この $[v_1, v_2]$ は σ_1 の面でもあり、 σ_2 の面でもある。したがって、共通部分は両方の単体の共通の面である。よって、交わりの条件を満たす。

この例は、単体的複体における「よい貼り合わせ」の典型例である。

問題 5

問題

一方の三角形の頂点が、もう一方の三角形の辺の途中の点に接している図形は、そのまま単体的複体の交わりの条件を満たすか。理由を述べよ。また、単体的複体として扱うにはどうすればよいか説明せよ。

解答

そのままでは単体的複体の交わりの条件を満たさない。

交わりの条件では、2つの単体の交わりは空集合であるか、または両方の単体に共通する面でなければならない。いま、一方の三角形の頂点が、もう一方の三角形の辺の途中の点に接しているとする。この場合、共通部分は1点である。しかし、その点は一方の三角形の頂点ではあるが、もう一方の三角形では辺の途中の点であり、頂点として登録されていない。したがって、その点はもう一方の三角形の面ではない。よって、共通部分は「共通の面」ではなく、交わりの条件に反する。

この図形を単体的複体として扱うには、辺の途中で接している点を新しい頂点として追加し、その辺を2つの辺に細分すればよい。つまり、辺の途中の接点を正式な0単体にし、もとの辺をその点で分割する。すると、共通部分は両方の単体の共通の0面となり、交わりの条件を満たすようになる。

問題 6

問題

三角形の周からなる単体的複体と、中身を含む三角形からなる単体的複体の違いを説明せよ。また、それぞれの多面体がどのような空間と同相か答えよ。

解答

三角形の周からなる単体的複体は、3つの頂点と3つの辺だけを含む。2単体 $[v_0, v_1, v_2]$ は含まれていない。したがって、その多面体は三角形の境界だけであり、円周 S^1 と同相である。一方、中身を含む三角形からなる単体的複体は、3つの頂点、3つの辺に加えて、2単体 $[v_0, v_1, v_2]$ 自身を含む。したがって、その多面体は三角形の内部も含む閉円板であり、 D^2 と同相である。両者の違いは、2単体が入っているかどうかである。三角形の周だけでは中央に1次元の穴が残るので S^1 と同相になる。中身を含めるとその穴が埋まるので、閉円板 D^2 と同相になる。この違いは、後にホモロジー群を計算するときにも重要になる。

問題 7

問題

位相空間 X の単体分割とは何か説明せよ。また、単体分割がなぜ位相空間の研究に役立つのか述べてよ。

解答

位相空間 X の単体分割とは、ある単体的複体 K と同相写像 $h: |K| \rightarrow X$ の組のことである。ここで $|K|$ は、単体的複体 K の多面体、すなわち K に含まれる単体をすべて貼り合わせて得られる位相空間である。

単体分割が役立つ理由は、連続的な空間 X を、有限個の点、辺、三角形などの貼り合わせとして扱えるようになるからである。たとえば、曲面を三角形分割すれば、その曲面を三角形の個数、辺の貼り合わせ方、頂点のつながり方という有限のデータで記述できる。これにより、オイラー標数やホモロジー群を組合せ的に計算できる。

埋め込み問題でも同様に、単体分割を用いると、空間がどこで交わるか、どの単体がどの単体に写るかを有限のデータとして調べられる。したがって、単体分割は連続的なトポロジーを組合せ的に研究するための基本的な道具である。

問題 8

問題

線分 $[v_0, v_1]$ の重心細分を説明し、新しく現れる頂点と辺を述べよ。

解答

線分 $[v_0, v_1]$ の重心は、2つの頂点の平均 $b = \frac{v_0 + v_1}{2}$ で表される点である。これは線分の中点である。

重心細分では、この中点 b を新しい頂点として加える。そして、もとの線分 $[v_0, v_1]$ を2つの小さな線分 $[v_0, b]$, $[b, v_1]$ に分ける。したがって、新しく現れる頂点は b であり、新しい辺は $[v_0, b]$ と $[b, v_1]$ である。

重要なのは、細分の前後で多面体としての空間は変わらないことである。つまり、 $[v_0, v_1] = [v_0, b] \cup [b, v_1]$ であり、重心細分は同じ線分に細かいメッシュを入れる操作である。

問題 9

問題

単体写像と PL 写像の違いを説明せよ。

解答

単体写像は、単体的複体の頂点を頂点に写し、さらに各単体を行き先の単体へ線形に写す写像である。頂点の行き先を決めると、各単体上の写像はアフィン写像として自動的に定まる。したがって、単体写像は非常に組合せ的であり、頂点の対応という有限データで記述できる。

一方、PL 写像は、もとの単体分割の上では単体写像でなくてもよい。しかし、定義域を適当に細分した単体的複体 K' の上で単体写像になるような写像を PL 写像という。つまり、PL 写像は「十分細かく見ると単体写像になる写像」である。

したがって、単体写像は PL 写像の特別な場合である。PL 写像の方が柔軟であり、元の頂点が行き先の頂点に写らなくても、細分後の新しい頂点を使って単体写像として扱える場合がある。埋め込み問題では、PL 写像を用いることで、連続的な図形を単体ごとの線形な配置として調べることができる。

問題 10

問題

単体近似定理の主張と意義を説明せよ。特に、「連続」と「組合せ」という言葉を用いて説明せよ。

解答

単体近似定理の主張は、次のようにまとめられる。単体的複体 K, L と連続写像 $f: |K| \rightarrow |L|$ が与えられたとき、 K を十分細かく重心細分すれば、 f とホモトピックな単体写像 $g: |\text{sd}^r K| \rightarrow |L|$ を作ることができる。つまり、任意の連続写像は、定義域を十分細かく分割すれば、組合せ的に扱いやすい単体写像で近似できる。

この定理の意義は、連続的なトポロジーの問題を、組合せ的な問題へ翻訳できる点にある。連続写像は無限に多くの点の動きを含むため、そのままでは扱いにくい。しかし、単体写像は頂点の行き先という有限のデータで決まる。したがって、単体近似定理により、連続写像の問題を、頂点・辺・三角形の対応を調べる組合せ的な問題として扱えるようになる。

たとえば、線分を三角形の内部の曲線へ写す連続写像は、そのままでは単体写像でないかもしれない。しかし、線分を十分細かく細分すれば、各小区間の像を三角形の頂点の開星の中に収めることができ、単体写像による近似が得られる。このように、単体近似定理は「連続」の世界と「組合せ」の世界を結ぶ基本的な橋である。

第 3 章

第 3 章 平面的グラフとオイラーの公式の解答

問題 1

問題

三角形の周を平面グラフとして考える。頂点数 v 、辺数 e 、面数 f を求め、オイラーの公式を確認せよ。

解答

三角形の周は、3 つの頂点と 3 本の辺からなる連結な平面グラフである。したがって $v = 3$, $e = 3$ である。通常の三角形として平面に描くと、補空間は三角形の内側と外側の 2 つの連結成分に分かれる。外側の非有界領域も 1 つの面として数えるので、 $f = 2$ である。よって $v - e + f = 3 - 3 + 2 = 2$ となり、オイラーの公式 $v - e + f = 2$ が確認できる。

問題 2

問題

四角形の周に対して、頂点数 v 、辺数 e 、面数 f を求めよ。また、オイラーの公式を確認せよ。

解答

四角形の周は、4 つの頂点と 4 本の辺からなる。したがって $v = 4$, $e = 4$ である。これを平面に単純な四角形として描くと、補空間は四角形の内側と外側の 2 つの面に分かれる。したがって $f = 2$ である。よって $v - e + f = 4 - 4 + 2 = 2$ となり、オイラーの公式を満たす。

問題 3

問題

木 T が v 個の頂点をもつとき、辺数が $v - 1$ であることを用いて、平面に埋め込まれた木がオイラーの公式を満たすことを確認せよ。

解答

木は連結で閉路をもたないグラフである。頂点数が v の木の辺数は $e = v - 1$ である。木を平面に埋め込んでも閉路がないので、有界な面は作られない。したがって、補空間は外側の 1 つの面だけからなり、 $f = 1$ である。よって $v - e + f = v - (v - 1) + 1 = 2$ となる。したがって、平面に埋め込まれた木もオイラーの公式を満たす。

問題 4

問題

完全グラフ K_4 の頂点数と辺数を求めよ。また、 $e \leq 3v - 6$ を満たすことを確認せよ。この事実だけで K_4 が平面的であると結論してよいか考えよ。

解答

K_4 は 4 つの頂点の任意の 2 点を辺で結んだグラフである。したがって $v = 4$, $e = \binom{4}{2} = 6$ である。単純平面グラフに対する必要条件は $e \leq 3v - 6$ である。右边を計算すると $3v - 6 = 3 \cdot 4 - 6 = 6$ であるから、 K_4 は $e = 6 \leq 6 = 3v - 6$ を満たす。

ただし、この不等式は平面的であるための必要条件であって、十分条件ではない。したがって、不等式を満たすだけで K_4 が平面的であると結論してはいけない。 K_4 が実際に平面的であることは、交差のない描画を具体的に与えることで確認する必要がある。

問題 5

問題

完全グラフ K_5 が平面的でないことを、オイラーの公式と不等式 $3f \leq 2e$ を用いて示せ。

解答

K_5 の頂点数と辺数は $v = 5$, $e = \binom{5}{2} = 10$ である。仮に K_5 が平面的であるとする。すると、連結平面グラフなのでオイラーの公式 $v - e + f = 2$ が成り立つ。したがって $5 - 10 + f = 2$ より $f = 7$ である。

一方、 K_5 は単純グラフであるから、各面の境界は少なくとも 3 本の辺を含む。また、各辺は 2 つの面の境界として数えられる。したがって $3f \leq 2e$ が成り立つ必要がある。ここに $f = 7$ と

$e = 10$ を代入すると $3 \cdot 7 \leq 2 \cdot 10$ すなわち $21 \leq 20$ となる。これは矛盾である。よって、仮定が誤りであり、 K_5 は平面的でない。

問題 6

問題

完全二部グラフ $K_{3,3}$ が平面的でないことを、三角形をもたない平面グラフの不等式 $e \leq 2v - 4$ を用いて示せ。

解答

$K_{3,3}$ は、3つの頂点からなる部分と、別の3つの頂点からなる部分の間をすべて結んだ完全二部グラフである。したがって $v = 3 + 3 = 6$, $e = 3 \cdot 3 = 9$ である。また、二部グラフでは同じ側の頂点どうしを結ぶ辺がないため、三角形は存在しない。

仮に $K_{3,3}$ が平面的であるとすると、三角形をもたない単純平面グラフの不等式 $e \leq 2v - 4$ を満たすはずである。しかし、右辺を計算すると $2v - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$ である。ところが $e = 9$ なので $9 \leq 8$ という矛盾が生じる。したがって、 $K_{3,3}$ は平面的でない。

問題 7

問題

完全二部グラフ $K_{2,3}$ の頂点数と辺数を求めよ。また、不等式 $e \leq 2v - 4$ を満たすことを確認せよ。このことから何が分かり、何は分からないか説明せよ。

解答

$K_{2,3}$ は、2つの頂点からなる部分と、3つの頂点からなる部分をもつ完全二部グラフである。したがって頂点数は $v = 2 + 3 = 5$ であり、辺数は $e = 2 \cdot 3 = 6$ である。 $K_{2,3}$ は二部グラフなので三角形をもたない。したがって、もし平面的なら $e \leq 2v - 4$ を満たす必要がある。右辺は $2v - 4 = 2 \cdot 5 - 4 = 6$ であり、実際に $e = 6 \leq 6$ を満たす。

ただし、この不等式は平面的であるための必要条件であって、十分条件ではない。したがって、不等式を満たすことから分かるのは「この条件では非平面性を示せない」ということだけである。実際には $K_{2,3}$ は平面的であるが、それは具体的な平面埋め込みを描いて確認する必要がある。

問題 8

問題

「オイラーの公式は埋め込み障害を与える」という意味を、 K_5 または $K_{3,3}$ の例を用いて説明せよ。

解答

埋め込み障害とは、「もし埋め込みが存在するなら必ず満たすはずの条件」を見つけ、その条件が破れていることによって埋め込み不可能性を示すものである。

オイラーの公式は、連結平面グラフが必ず満たす条件 $v - e + f = 2$ を与える。さらに、単純平面グラフなら $e \leq 3v - 6$ を満たす。 K_5 では $v = 5$, $e = 10$ であるが、平面的なら $e \leq 3v - 6 = 9$ を満たすはずである。しかし実際には $10 > 9$ であり、この必要条件に反する。したがって K_5 は平面的でない。

同様に、 $K_{3,3}$ は三角形をもたないので、平面的なら $e \leq 2v - 4$ を満たすはずである。ところが $v = 6$, $e = 9$ であり、右辺は $2 \cdot 6 - 4 = 8$ なので、 $9 > 8$ となる。したがって $K_{3,3}$ も平面的でない。このように、オイラーの公式とそこから導かれる不等式は、平面埋め込みの存在を妨げる障害として働く。

問題 9

問題

グラフの細分とは何か説明せよ。また、細分によってグラフの平面性が変わらない理由を述べよ。

解答

グラフの細分とは、グラフの辺の途中で新しい頂点を1つ以上挿入し、もとの1本の辺を複数の辺からなる道に置き換える操作である。たとえば、辺 uv の途中で新しい頂点 w を入れると、辺 uv は2本の辺 uw と wv に置き換わる。

細分は、グラフの組合せ的な表示を細かくするだけで、多面体としての位相空間を変えない。実際、1本の線分の途中で点を追加しても、得られる空間はもとの線分と同相である。したがって、もとのグラフが平面に埋め込めるなら、その埋め込みの辺上に新しい頂点を置けば細分グラフも平面に埋め込める。逆に、細分グラフが平面に埋め込めるなら、次数2の新しい頂点を無視して辺をつなげ直すことで、もとのグラフの平面埋め込みが得られる。よって、細分によって平面性は変わらない。

問題 10

問題

クラトフスキーの定理の主張を述べ、この定理が「埋め込みの障害」をどのように具体化しているか説明せよ。

解答

クラトフスキーの定理は、有限グラフ G が平面的であるための必要十分条件を次のように述べる。

G が平面的であることと、 G が K_5 の細分も $K_{3,3}$ の細分も部分グラフとして含まないことは同値である。

つまり、 G が平面的でないならば、必ず K_5 または $K_{3,3}$ の細分が G の中に部分グラフとして現れる。逆に、そのような部分グラフを含んでいれば、 K_5 または $K_{3,3}$ の非平面性を含んでいるため、 G も平面的でない。

この定理は、平面に埋め込めないという幾何学的な性質を、 K_5 と $K_{3,3}$ という具体的な組合せ的構造の存在に置き換えている。したがって、 K_5 と $K_{3,3}$ は、平面埋め込みに対する「禁じられた部分構造」、すなわち埋め込み障害である。この点で、クラトフスキーの定理は「埋め込みの障害」という考え方を非常に明確に具体化している。

問題 11

問題

ファン・カンペン障害の直感的な意味を、「互いに素な単体の像の交差」という言葉を用いて説明せよ。

解答

ファン・カンペン障害は、単体的複体をユークリッド空間に埋め込もうとしたときに、どうしても消せない交差が残るかどうかを代数的に測る量である。

k 次元単体的複体 K を $\mathbb{R}^{2k}$ に写すと、一般の位置では、互いに素な k 単体 σ, τ の像 $f(\sigma), f(\tau)$ が有限個の点で交わることがある。もし K が本当に埋め込めるなら、互いに素な単体の像は交わってはいけな。したがって、これらの交差点をすべて消せる必要がある。ファン・カンペン障害は、このような交差情報を全体として集めたものである。その障害が 0 でない場合、どのように写像を変えても、互いに素な単体の像の交差を完全には消せない。したがって、埋め込みは存在しない。グラフの場合には $k = 1$ であり、これは平面上で互いに頂点を共有しない辺どうしの交差が避けられないことを代数的に表すものと考えられる。

第 4 章

第 4 章 クラトフスキーの定理の証明 の 解答

問題 1

問題

2-連結グラフと 3-連結グラフの定義を述べよ。

解答

グラフ G が **2-連結**であるとは、 G が連結で頂点数が 3 以上であり、どの 1 頂点を取り除いても連結なままであることをいう。言い換えると、 G が頂点数 3 以上でカット頂点をもたない連結グラフであることである。

グラフ G が **3-連結**であるとは、 G が連結で頂点数が 4 以上であり、どの 2 頂点を取り除いても連結なままであることをいう。直感的には、2-連結グラフよりもさらに壊れにくいグラフであり、2 個までの頂点を消してもグラフ全体の連結性が保たれる。頂点数の条件を落とすと、たとえば K_3 が「3-連結」になってしまうので注意する。

問題 2

問題

クラトフスキーの定理の証明で、なぜ 3-連結グラフの場合が証明の核心になるのか説明せよ。

解答

3-連結グラフは、どの 2 頂点を取り除いても連結なままであるため、構造が非常に硬い。そのため、平面への埋め込み方が強く制約され、3-連結な平面的グラフでは埋め込みが本質的に一意に近い性質をもつ。このような硬い構造では、非平面性の原因を局所的に分析しやすく、辺の縮約や平面描画の復元の失敗から K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を見つけやすい。

一方、2-連結だが 3-連結でないグラフや、カット頂点をもつグラフは、より小さな部品に分解できる。したがって、まず分解できない本質的な場合である 3-連結グラフを扱い、その結果を

分解と復元によって一般の場合へ拡張するのが効率的である。

問題 3

問題

平面的グラフの部分グラフは平面的であることを説明せよ。また、この事実から、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むグラフが非平面的であることを導け。

解答

G が平面的であるとする。すると、 G には平面上で辺が端点以外では交差しない描画が存在する。 G の部分グラフは、この描画からいくつかの頂点と辺を取り除いて得られる。取り除く操作によって新しい交差が生じることはないので、部分グラフも平面的である。

次に、 G が K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を部分グラフとして含むとする。部分分割は辺の途中に頂点を挿入するだけなので、平面性を変えない。したがって、 K_5 と $K_{3,3}$ の部分分割はいずれも非平面的である。もし G が平面的なら、その部分グラフも平面的でなければならない。しかし、その部分グラフとして非平面的な部分分割が含まれているため矛盾する。よって G は非平面的である。

問題 4

問題

クラトフスキーの定理に対する最小反例 G が 2-連結でなければならない理由を説明せよ。

解答

最小反例 G とは、非平面的であるにもかかわらず、 K_5 の部分分割も $K_{3,3}$ の部分分割も含まない反例のうち、頂点数または辺数が最小のものをいう。

もし G が 2-連結でなければ、 G はカット頂点をもつ。すると G は複数のブロックをカット頂点で貼り合わせたものとして分解できる。もしすべてのブロックが平面的なら、それらをカット頂点に沿って平面内で貼り合わせることで、 G 全体も平面的になる。これは G が非平面的であることに反する。

したがって、少なくとも一つのブロック B は非平面的である。 B は G の真の部分グラフなので、 G より小さい。 G の最小性より、 B は反例ではあり得ず、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。すると G も同じ部分分割を含むことになり、 G が反例であることに矛盾する。よって G は 2-連結でなければならない。

問題 5

問題

最小反例 G が次数 2 の頂点をもたない理由を、隣接頂点が結ばれている場合と結ばれていない場合に分けて説明せよ。

解答

G に次数 2 の頂点 v があるとし、その隣接頂点を u, w とする。

まず、 u と w が辺で結ばれている場合を考える。このとき、 v を取り除いて得られるグラフ $G-v$ は G より小さいので、最小性より $G-v$ は反例ではない。もし $G-v$ が非平面的なら、 $G-v$ は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含み、それは G の部分グラフでもあるから、 G が反例であることに矛盾する。よって $G-v$ は平面的である。 $G-v$ の平面描画において、辺 uw の近くに新しい頂点 v と 2 本の辺 uv, vw を挿入すれば、 G の平面描画が得られる。これは G が非平面的であることに反する。

次に、 u と w が辺で結ばれていない場合を考える。このとき、 v を取り除き、代わりに辺 uw を加えたグラフ H を作る。 H は G より小さいので、やはり反例ではない。もし H が非平面的なら、 H は K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。 G は H の辺 uw を部分分割して得られるグラフだから、 G もその部分分割を含み、矛盾する。よって H は平面的である。部分分割は平面性を変えないため、 G も平面的になる。これも矛盾である。

したがって、最小反例 G は次数 2 の頂点をもたない。なお、「最小性から小さいグラフは平面的」と一足飛びに言えるわけではなく、上のように「反例でない」から出発して場合分けする必要がある点に注意する。

問題 6

問題

2-連結だが 3-連結でない非平面的グラフ G を、2 頂点 $\{u, v\}$ によって部品 $G_1, G_2, \dots$ に分解する。このとき、なぜ少なくとも一つの部品が非平面的でなければならないか説明せよ。

解答

G が 2-連結だが 3-連結でないなら、ある 2 頂点 u, v を取り除くとグラフが複数の成分に分かれる。この構造を用いて、 G を u, v を共有する複数の部品 $G_1, G_2, \dots$ に分解する。各部品には、必要に応じて仮想的な辺 uv を加えておく。

もしすべての部品 G_i が平面的であるなら、各 G_i を平面に描き、それらを共有頂点 u, v に沿って貼り合わせることで、 G 全体の平面描画を作ることができる。部品どうしは u, v でだけ接するように配置できるため、新しい交差を作らずに貼り合わせられる。

しかし、 G は非平面的である。したがって、すべての部品が平面的であることはあり得ない。よって、少なくとも一つの部品は非平面的でなければならない。

問題 7

問題

分解された部品 G_1 の中に見つかった K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が、仮想的な辺 uv を使っている場合、それを元のグラフ G の中にどのように復元するか説明せよ。

解答

部品 G_1 は、元のグラフの一部に仮想的な辺 uv を加えて作られている。帰納法によって G_1 の中に K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が見つかったとする。

もしその部分分割が仮想的な辺 uv を使っていなければ、それはそのまま元のグラフ G の部分グラフである。問題は、その部分分割が仮想的な辺 uv を使っている場合である。

この場合、元のグラフ G では、仮想的な辺 uv は実際の辺ではなく、他の部品を通る u から v への道に対応している。そこで、 G_1 内の部分分割で使われていた仮想辺 uv を、元の G の中に存在する u から v への道で置き換える。辺を道で置き換える操作は、まさに部分分割を作る操作である。したがって、元のグラフ G の中にも K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が復元される。

問題 8

問題

3-連結な非平面的グラフの場合の証明の考え方を、「最小性」と「辺の縮約」という語を用いて説明せよ。

解答

K_5 の部分分割も $K_{3,3}$ の部分分割も含まない 3-連結非平面的グラフのうち、辺数が最小のもの G を取る（単に「辺数最小の 3-連結非平面的グラフ」と言うと $K_{3,3}$ になってしまうので、禁止構造を含まないという条件を込めて最小性を取る）。この「最小性」により、 G より小さなグラフは反例ではない。

そこで、 G の辺 $e = uv$ で G/e がふたたび 3-連結になるものを選び（そのような辺は必ず存在する）、これを縮約して G/e を作る。 G/e に K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割があれば、それを G に引き戻せるので矛盾する。したがって G/e は平面的である。 G/e の平面描画を取り、縮約で一つにまとめた頂点を再び u と v に分け、辺 uv を戻して G の平面描画を作ろうとする。もしこの復元が成功すれば、 G は平面的になってしまう。しかし G は非平面的なので、復元は必ず失敗する。この失敗の原因は、縮約された頂点の周りの隣接点の配置が、 u と v を交差なしに分けることを妨げることにある。その妨げ方を詳しく調べると、 K_5 型または $K_{3,3}$ 型の部分分割が現れる。これにより、3-連結な非平面的グラフは K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むことが分かる。

問題 9

問題

クラトフスキーの定理の証明全体を、「最小反例」「分解」「復元」という三つの語を用いて要約せよ。

解答

クラトフスキーの定理の難しい方向は、非平面的グラフが必ず K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むことを示すものである。証明ではまず、この主張に反する**最小反例** G が存在すると仮定する。最小性により、 G はカット頂点をもたず、次数2の頂点ももたないなど、強い制約を受ける。

次に、 G の連結度に応じて**分解**を行う。2-連結だが3-連結でない場合には、2 頂点分離 $\{u, v\}$ によって G を小さな部品に分解する。非平面性は少なくとも一つの部品に現れるため、帰納法によりその部品の中に K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が見つかる。

最後に、部品の中で見つかった禁止構造を元のグラフへ**復元**する。もし禁止構造が分解時に加えた仮想辺を使っていれば、その仮想辺を元のグラフの中の対応する道で置き換える。これにより、元の G の中にも K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割が存在することになる。これは G が反例であるという仮定に矛盾する。したがって最小反例は存在せず、クラトフスキーの定理が成り立つ。

第 5 章

第 5 章 高次元ユークリッド空間への埋め込み の解答

問題 1

問題

$\mathbb{R}^3$ 内の 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 がアフィン独立であることは、幾何学的には何を意味するか述べて。

解答

$\mathbb{R}^3$ 内の 4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 がアフィン独立であるとは、ベクトル $P_1 - P_0, P_2 - P_0, P_3 - P_0$ が線形独立であることをいう。幾何学的には、この 4 点が同一平面上にないことを意味する。したがって、4 点はずぶれた平面図形ではなく、3 次元的な四面体を張る。逆に 4 点が同一平面上にあるなら、そのうちの 1 点は他の 3 点のアフィン結合で表され、アフィン従属になる。

問題 2

問題

点集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ のアフィン包 $\text{Aff}(S)$ を定義せよ。また、2 点 P, Q のアフィン包が何になるか説明せよ。

解答

点集合 $S \subset \mathbb{R}^m$ のアフィン包 $\text{Aff}(S)$ とは、 S の点のすべてのアフィン結合からなる集合である。すなわち、

$$\text{Aff}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i \mid P_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \right\}$$

である。これは、 S を含む最小のアフィン部分空間である。

2 点 P, Q が異なる場合、 $\text{Aff}\{P, Q\} = \{(1-t)P + tQ \mid t \in \mathbb{R}\}$ であり、これは P と Q を通る直線である。 $0 \leq t \leq 1$ に制限すると、 P と Q を結ぶ線分になる。

問題 3

問題

k 次元単体的複体 K が $\mathbb{R}^m$ に必ず線形埋め込み可能であるための十分条件を述べよ。

解答

十分条件は $m \geq 2k + 1$ である。すなわち、任意の有限 k 次元単体的複体 K は、 $\mathbb{R}^{2k+1}$ 、およびそれより高い次元のユークリッド空間に線形に埋め込める。この結果は、頂点を $\mathbb{R}^m$ 内の一般の位置に配置し、各単体上で線形に拡張することで示される。次元 $2k + 1$ は、互いに素な k 単体どうしの交差を一般の位置によって避けられる最初の次元である。

問題 4

問題

線形埋め込み定理の証明において、なぜ頂点の像を一般の位置に選ぶ必要があるのか説明せよ。

解答

頂点の像を一般の位置に選ぶ理由は、単体がつぶれたり、互いに素な単体の像が交わったりすることを防ぐためである。

単体 $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$ の頂点の像がアフィン従属であると、 $f(\sigma)$ は本来の p 次元単体としてではなく、より低次元につぶれてしまう可能性がある。また、互いに素な 2 つの単体 σ と τ の像が交わると、 K の異なる点が同じ点に写るため、写像は単射でなくなる。

頂点の像を一般の位置に選ぶと、 $m + 1$ 個以下の点はアフィン独立になる。 $m \geq 2k + 1$ のとき、互いに素な 2 つの単体の頂点をすべて合わせても高々 $2k + 2 \leq m + 1$ 個であるから、それらはアフィン独立である。その結果、互いに素な単体のアフィン包は不必要に交わらず、写像が単射になる。

問題 5

問題

互いに素な p 次元単体 σ と q 次元単体 τ の像が一般の位置で交わらないための次元条件を、 p, q, m を用いて述べよ。

解答

$\mathbb{R}^m$ 内に p 次元の図形と q 次元の図形を一般の位置に置くと、交わりの期待次元は $p + q - m$ である。したがって、 $p + q < m$ ならば、期待される交わりの次元は負になり、一般には交わらない。

単体的複体の埋め込み定理では、 $p, q \leq k$ なので $p + q \leq 2k$ である。 $m \geq 2k + 1$ ならば $p + q \leq 2k < 2k + 1 \leq m$ となり、互いに素な単体の像は一般の位置で交わらない。

問題 6

問題

任意の有限グラフが $\mathbb{R}^3$ に埋め込める理由を、線形埋め込み定理を用いて説明せよ。また、 $\mathbb{R}^2$ に埋め込めないグラフの例を 2 つ挙げよ。

解答

有限グラフは 1 次元単体的複体である。したがって $k = 1$ として線形埋め込み定理を適用すると、任意の有限グラフは $\mathbb{R}^{2k+1} = \mathbb{R}^{2 \cdot 1 + 1} = \mathbb{R}^3$ に線形に埋め込める。直感的には、平面では辺どうしが交差してしまう場合でも、3 次元では一方の辺を上下方向にずらすことで交差を避けられる。

一方、臨界次元 $m = 2k = 2$ 、すなわち平面では、埋め込めないグラフが存在する。代表例は K_5 , $K_{3,3}$ である。これらはクラトフスキーの定理における平面性の基本障害である。

問題 7

問題

任意の有限 2 次元複体が必ず埋め込めるユークリッド空間の次元を答えよ。また、この結果だけではクラインの壺が $\mathbb{R}^4$ に埋め込めることを説明できない理由を述べよ。

解答

2 次元複体では $k = 2$ である。線形埋め込み定理より、任意の有限 2 次元複体は $\mathbb{R}^{2k+1} = \mathbb{R}^{2 \cdot 2 + 1} = \mathbb{R}^5$ に線形に埋め込める。

クラインの壺も 2 次元複体として三角形分割できるので、この定理から少なくとも $\mathbb{R}^5$ には埋め込めることが分かる。しかし、 $\mathbb{R}^4$ は臨界次元 $2k = 4$ であり、一般の位置の定理が自動的な埋め込みを保証する次元ではない。したがって、クラインの壺が $\mathbb{R}^4$ に埋め込めるという事実は、線形埋め込み定理だけでは説明できず、より個別の幾何学的・位相的議論が必要である。

問題 8

問題

臨界次元 $m = 2k$ が特別である理由を、互いに素な k 単体どうしの交差の期待次元を用いて説明せよ。

解答

互いに素な 2 つの k 次元単体を $\mathbb{R}^m$ に一般の位置で置くと、交わりの期待次元は $k + k - m = 2k - m$ である。

$m = 2k + 1$ なら $2k - (2k + 1) = -1$ となり、一般には交わらない。したがって、 $2k + 1$ 次元では一般の位置によって交差を避けられる。

一方、 $m = 2k$ なら $2k - 2k = 0$ となる。これは、互いに素な k 単体の像が一般に点で交わり得ることを意味する。点として現れる交差は、写像を少し動かすだけではすべて消せるとは限らない。このため、 $m = 2k$ は埋め込み可能性が非自明になる臨界次元であり、ファン・カンペン障害のような代数的障害が現れる。

問題 9

問題

削除積 X^* と差の写像 $g(x, y) = f(x) - f(y)$ を用いて、埋め込み性をどのように言い換えられるか説明せよ。

解答

削除積は $X^* = (X \times X) - \Delta$, $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ で定義される。したがって、 X^* の点は、 X の異なる 2 点の組 (x, y) である。

写像 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ に対し、差の写像を $g: X^* \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g(x, y) = f(x) - f(y)$ で定める。もし $g(x, y) = 0$ なら、 $f(x) = f(y)$ であり、異なる 2 点と同じ点に写っている。これは単射性の失敗、すなわち自己交差である。

したがって、 f が単射であることは、 g が原点を取らないこと、すなわち $0 \notin g(X^*)$ と同値である。コンパクトな複体からハウスドルフ空間への連続単射は埋め込みになるので、この条件は埋め込み性を調べる中心的な言い換えである。

問題 10

問題

ファン・カンペン－フローレスの定理において、 $\Delta_6^{(2)}$ がどのような 2 次元複体であり、なぜ $\mathbb{R}^4$ への埋め込み問題が臨界次元の問題であるか説明せよ。

解答

Δ^6 は 7 つの頂点をもつ 6 次元単体である。その 2 スケルトン $\Delta_6^{(2)}$ とは、7 つの頂点と、それらが張るすべての辺およびすべての三角形からなる 2 次元単体的複体である。つまり、頂点集合から選べる任意の 3 点が 2 単体を張っている。

この複体は 2 次元なので $k = 2$ である。臨界次元は $2k = 4$ であり、したがって $\mathbb{R}^4$ への埋め込み問題はまさに臨界次元の問題である。一般の位置で 2 次元単体どうしを $\mathbb{R}^4$ に置くと、交わりの期待次元は $2 + 2 - 4 = 0$ であり、点交差が一般に現れ得る。

ファン・カンペン－フローレスの定理は、この交差をすべて消すことはできず、 $\Delta_6^{(2)}$ は $\mathbb{R}^4$ に埋め込めないことを述べている。これは、 K_5 が $\mathbb{R}^2$ に埋め込めないことの高次元版と見ることができる。

第 6 章

第 6 章 ホモロジー群と埋め込み障害 の 解答

問題 1

問題

三角形の周 K について、 $C_0(K)$, $C_1(K)$, $C_2(K)$ をそれぞれ書け。

解答

三角形の周 K は 3 つの頂点 v_0, v_1, v_2 と 3 つの辺 $e_{01} = [v_0, v_1]$, $e_{12} = [v_1, v_2]$, $e_{20} = [v_2, v_0]$ からなる。したがって $C_0(K) = \mathbb{Z}v_0 \oplus \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$ である。また、1 単体は 3 本の辺なので $C_1(K) = \mathbb{Z}e_{01} \oplus \mathbb{Z}e_{12} \oplus \mathbb{Z}e_{20}$ である。三角形の中身を含まないで 2 単体は存在しない。したがって $C_2(K) = 0$ である。

問題 2

問題

2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ に対して、 $\partial_2[v_0, v_1, v_2]$ を計算せよ。さらに、その境界をもう一度取って $\partial_1\partial_2[v_0, v_1, v_2] = 0$ を確認せよ。

解答

境界作用素の定義より $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ である。ここで $-[v_0, v_2] = [v_2, v_0]$ なので、向きをそろえれば $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ である。さらに $\partial_1[v_i, v_j] = [v_j] - [v_i]$ を用いると、

$$\begin{aligned}\partial_1\partial_2[v_0, v_1, v_2] &= ([v_2] - [v_1]) - ([v_2] - [v_0]) + ([v_1] - [v_0]) \\ &= [v_2] - [v_1] - [v_2] + [v_0] + [v_1] - [v_0] \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって、この例で $\partial^2 = 0$ が確認できる。

問題 3

問題

p 次元サイクル群 $Z_p(K)$ 、 p 次元バウンダリ群 $B_p(K)$ 、 p 次ホモロジー群 $H_p(K)$ を、境界作用素を用いて定義せよ。

解答

p 次元サイクル群は $Z_p(K) = \text{Ker } \partial_p = \{c \in C_p(K) \mid \partial_p(c) = 0\}$ である。つまり、境界をもたない p 鎖全体である。

p 次元バウンダリ群は

$$B_p(K) = \text{Im } \partial_{p+1} = \{c \in C_p(K) \mid c = \partial_{p+1}(d) \text{ for some } d \in C_{p+1}(K)\}$$

である。つまり、何か一つ高い次元の鎖の境界として現れる p 鎖全体である。

$\partial^2 = 0$ より $B_p(K) \subset Z_p(K)$ であるから、商群 $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ を定義できる。これが p 次ホモロジー群である。

問題 4

問題

2 つの頂点 v_1, v_2 と、それらを結ぶ 2 本の辺 e_1, e_2 からなる複体 K を考える。向きを $e_1 : v_1 \rightarrow v_2, e_2 : v_2 \rightarrow v_1$ とする。このとき $H_0(K)$ と $H_1(K)$ を計算せよ。

解答

鎖群は

$$C_0(K) = \mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2, \quad C_1(K) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2, \quad C_2(K) = 0$$

である。境界は $\partial_1(e_1) = v_2 - v_1, \quad \partial_1(e_2) = v_1 - v_2$ である。

一般の 1 鎖を $c = ae_1 + be_2$ と書くと、 $\partial_1 c = a(v_2 - v_1) + b(v_1 - v_2) = (b - a)v_1 + (a - b)v_2$.
よって $\partial_1 c = 0$ となる条件は $a = b$ である。したがって $Z_1(K) = \mathbb{Z}(e_1 + e_2)$. また $C_2(K) = 0$ なので $B_1(K) = 0$ である。よって $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) \cong \mathbb{Z}$.

次に H_0 を求める。 $\partial_0 = 0$ なので $Z_0(K) = C_0(K)$. また $B_0(K) = \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}(v_2 - v_1)$ である。したがって $H_0(K) = C_0(K)/\mathbb{Z}(v_2 - v_1) \cong \mathbb{Z}$. これは K が連結であることを表している。

問題 5

問題

前問の複体について、単体数からオイラー標数を計算し、ベッチ数による計算と一致することを確認せよ。

解答

この複体は頂点を 2 つ、辺を 2 本もち、2 単体はもたない。したがって単体数から $\chi(K) = c_0 - c_1 + c_2 = 2 - 2 + 0 = 0$ である。

前問より $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$ なので $\beta_0(K) = 1$, $\beta_1(K) = 1$ である。したがってベッチ数から

$$\sum_p (-1)^p \beta_p(K) = \beta_0 - \beta_1 = 1 - 1 = 0.$$

単体数によるオイラー標数と一致する。

問題 6

問題

連結グラフ G の頂点数を v 、辺数を e とする。オイラー標数を用いて $\beta_1(G) = e - v + 1$ を導け。

解答

連結グラフ G は 1 次元複体なので、 $H_p(G) = 0$ は $p \geq 2$ で成り立つ。また連結性より $\beta_0(G) = 1$ である。単体数からは $\chi(G) = v - e$ である。一方、オイラー・ポアンカレの公式より $\chi(G) = \beta_0(G) - \beta_1(G) = 1 - \beta_1(G)$ である。両者を等置すると $v - e = 1 - \beta_1(G)$ であり、整理して $\beta_1(G) = e - v + 1$ を得る。

問題 7

問題

トーラス T^2 のホモロジー群 $H_0(T^2)$, $H_1(T^2)$, $H_2(T^2)$ を述べ、オイラー標数を求めよ。

解答

トーラス T^2 は連結な向き付け可能閉曲面で、種数 1 である。したがって $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ である。ベッチ数は $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ なので、 $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$ である。

問題 8

問題

射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の第一ホモロジー群に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が現れることは、どのような意味でトーションをもつと言えるか説明せよ。

解答

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明な元を a とする。このとき $a \neq 0$ であるが、 $2a = 0$ が成り立つ。このように、0 ではないのに有限回足すと 0 になる元をトーション元という。したがって、 $H_1(\mathbb{R}P^2)$ に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が現れるということは、1 次元ホモロジー類の中に、2 倍すると 0 になる非自明な類があることを意味する。これは自由アーベル群 $\mathbb{Z}^r$ には見られない現象である。

問題 9

問題

「もし埋め込めるなら、ホモロジー群がある性質を満たす」という形の議論が、なぜ埋め込み障害になるのか説明せよ。

解答

埋め込み障害の典型的な論理は対偶である。まず、「もし X が Y に埋め込めるなら、あるホモロジー群が特定の性質を満たす」という必要条件を証明する。次に、実際の X についてホモロジー群を計算し、その必要条件を満たさないことを示す。すると、埋め込みが存在すると仮定した場合に矛盾が生じるので、 X は Y に埋め込めないと結論できる。

たとえば、次章で示すように、 S^3 内のコンパクト 3 次元部分多様体の H_1 はトーションをもたない。したがって、 H_1 にトーションをもつコンパクト 3 次元多様体は、 S^3 の部分多様体としては埋め込めない。

第 7 章

第 7 章 S^3 に埋め込まれた部分多様体のホモロジーの解答

問題 1

問題

空間 $X = A \cup B$ に対するマイヤー・ヴィートリス完全系列のうち、 $H_p(X)$ を含む中心部分を、 $H_p(A \cap B)$ から $H_{p-1}(A \cap B)$ まで書け。

解答

マイヤー・ヴィートリス完全系列の中心部分は

$$\cdots \longrightarrow H_p(A \cap B) \xrightarrow{i_*} H_p(A) \oplus H_p(B) \xrightarrow{j_*} H_p(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

である。ここで i_* は共通部分から A と B への包含写像が誘導する写像、 j_* は A 側と B 側のサイクルを X の中で足し合わせる写像、 ∂_* はつなぎ準同型である。

問題 2

問題

系列が完全であるとはどういう意味か、像と核という言葉を用いて説明せよ。

解答

アーベル群と準同型の系列

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

が完全であるとは、任意の n について $\text{Im } f_{n+1} = \text{Ker } f_n$ が成り立つことをいう。つまり、 f_n によって 0 に写る元は、ちょうど 1 つ前の写像 f_{n+1} から来た元である。この条件により、系列の一部が分かれば未知の群や写像について強い制約が得られる。

問題 3

問題

短い完全系列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ が完全であるとき、最初の写像が単射で、最後の写像が全射である理由を説明せよ。

解答

最初の写像を $f: A \rightarrow B$ 、次の写像を $g: B \rightarrow C$ とする。左端で完全であるとは $\text{Ker } f = \text{Im}(0 \rightarrow A) = 0$ ということである。したがって f は単射である。

右端で完全であるとは $\text{Im } g = \text{Ker}(C \rightarrow 0) = C$ ということである。したがって g は全射である。また中央での完全性は $\text{Im } f = \text{Ker } g$ を意味する。

問題 4

問題

n 次元球面 S^n を 2 つの半球で分解することにより、 $p \geq 2$ について $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$ が得られる理由を説明せよ。

解答

S^n を北半球側 A と南半球側 B に分ける。 A と B はどちらも可縮なので、 $q \geq 1$ について $H_q(A) = H_q(B) = 0$ である。また共通部分は赤道の近傍であり、 $A \cap B \simeq S^{n-1}$ である。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の部分

$$H_p(A) \oplus H_p(B) \rightarrow H_p(S^n) \rightarrow H_{p-1}(A \cap B) \rightarrow H_{p-1}(A) \oplus H_{p-1}(B)$$

を見る。 $p \geq 2$ なら両端の群は 0 なので、 $0 \rightarrow H_p(S^n) \rightarrow H_{p-1}(A \cap B) \rightarrow 0$ が完全になる。したがって $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(A \cap B) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$ である。

問題 5

問題

前問の結果から、 $n \geq 1$ に対して

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を導け。

解答

球面 S^n は連結なので、常に $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ である。また前問より、 $p \geq 2$ について $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$ が成り立つ。これを繰り返すと $H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \cdots \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である。一方、中間次元 $0 < p < n$ については、同じ帰納法により最終的に S^m の存在しない中間次元のホモロジーに帰着し、0 になる。したがって

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。

問題 6

問題

つなぎ準同型 ∂_* は、なぜ「縫い目」を検出する写像と考えられるのか、 S^2 を 2 つの半球に分ける例で説明せよ。

解答

S^2 を北半球側 A と南半球側 B に分ける。 A と B はどちらも可縮なので 2 次元の穴をもたない。しかし、それらを赤道付近の共通部分 $A \cap B \simeq S^1$ に沿って貼り合わせると、球面 S^2 の 2 次元の基本類が生まれる。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の一部は

$$0 = H_2(A) \oplus H_2(B) \rightarrow H_2(S^2) \xrightarrow{\partial_*} H_1(A \cap B) \rightarrow H_1(A) \oplus H_1(B) = 0$$

である。したがって ∂_* は同型であり、 S^2 の 2 次元の基本類を赤道の 1 次元サイクルに対応させる。この意味で、 ∂_* は全体の穴がどの縫い目から生じたかを検出する写像である。

問題 7

問題

$M \subset S^3$ をコンパクト 3 次元部分多様体、 $E(M) = \overline{S^3 - \text{int } M}$ とする。マイヤー・ヴィートリス完全系列を用いて $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ を示せ。

解答

S^3 は $S^3 = M \cup E(M)$, $M \cap E(M) = \partial M$ と分解される。これにマイヤー・ヴィートリス完全系列を適用し、必要な部分だけを書き出すと $H_2(S^3) \rightarrow H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M) \oplus H_1(E(M)) \rightarrow H_1(S^3)$ である。球面 S^3 について $H_2(S^3) = 0$, $H_1(S^3) = 0$ であるから、完全系列は $0 \rightarrow H_1(\partial M) \rightarrow H_1(M) \oplus H_1(E(M)) \rightarrow 0$ となる。したがって中央の写像は単射かつ全射で

あり、 $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ が成り立つ。

問題 8

問題

$M = S^1 \times D^2$ を標準的なソリッドトーラスとする。 $H_1(M)$, $H_1(\partial M)$ を求め、外部もソリッドトーラスである場合に $H_1(\partial M) \cong H_1(M) \oplus H_1(E(M))$ を確認せよ。

解答

ソリッドトーラス $M = S^1 \times D^2$ は S^1 に変形レトラクトするので $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$ である。境界は $\partial M = S^1 \times S^1 = T^2$ なので $H_1(\partial M) \cong H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ である。外部 $E(M)$ もソリッドトーラスなら $H_1(E(M)) \cong \mathbb{Z}$ である。したがって $H_1(M) \oplus H_1(E(M)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2 \cong H_1(\partial M)$ となり、定理の同型が確認できる。

問題 9

問題

結び目 $K \subset S^3$ の外部 $E(K) = \overline{S^3 - \text{int } N(K)}$ について、 $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}$ であることを説明せよ。

解答

結び目の正則近傍 $N(K)$ はソリッドトーラスである。したがって $H_1(N(K)) \cong \mathbb{Z}$ であり、境界はトーラスなので $H_1(\partial N(K)) \cong \mathbb{Z}^2$ である。第 7 章の同型を $M = N(K)$ に適用すると $H_1(\partial N(K)) \cong H_1(N(K)) \oplus H_1(E(K))$ である。よって $\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z} \oplus H_1(E(K))$ となる。したがって $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 10

問題

$H_1(M)$ に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 型のトーションがあるとき、なぜ M は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体として埋め込めないのか説明せよ。

解答

第 7 章の定理によれば、 S^3 に埋め込まれたコンパクト 3 次元部分多様体 M について、 $H_1(M)$ はトーションをもたない。もし $H_1(M)$ に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 型のトーションがあれば、非自明な元 a で $pa = 0$ となるものが存在する。これはトーション元であり、定理の結論に反する。したがっ

て、そのような M は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体として埋め込めない。

問題 11

問題

マイヤー・ヴィートリス完全系列を用いたジョルダン閉曲線定理の証明では、なぜ $H_0(S^2 - C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を示せば十分なのか説明せよ。

解答

位相空間 X の 0 次ホモロジー群 $H_0(X)$ は、 X の連結成分を数える群である。具体的には、 X が r 個の連結成分をもつなら $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^r$ である。したがって $H_0(S^2 - C) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が分かれば、補空間 $S^2 - C$ はちょうど 2 つの連結成分をもつことが分かる。これは、単純閉曲線 C が球面を 2 つの領域に分けることを意味する。平面の場合は、 S^2 から無限遠点を除くことで、内側と外側の 2 領域に対応する。

第 8 章

第 8 章 多重分岐曲面と S^3 への埋め込み 障害 の解答

問題 1

問題

多重分岐曲面におけるブランチ、セクター、プレブランチをそれぞれ説明せよ。

解答

多重分岐曲面は、曲面片が円周状の集合に沿って貼り合わされた 2 次元複体である。曲面でない点の集合は有限個の円周の和になっており、この円周状の部分をブランチという。ブランチを取り除いた残りの曲面片の閉包をセクターという。各セクターは境界付き曲面であり、その境界成分がブランチに貼り付けられる。貼り付ける前のセクターの境界成分をプレブランチという。

例えば、3 枚の円板の境界を同じ円周に貼り付けた空間では、共通の円周がブランチ、3 枚の円板がセクター、各円板の境界がプレブランチである。

問題 2

問題

貼り付き次数と代数的次数の違いを説明せよ。特に、向きが反対の場合に代数的次数がどのように変わるか述べよ。

解答

貼り付き次数は、プレブランチがブランチに何回巻き付くかを表す正の整数である。向きを忘れて、単に巻き付く回数だけを数える。

一方、代数的次数は、向きを考慮した符号付き整数である。プレブランチがブランチに向きをそろえて 1 回巻き付けば代数的次数は +1、逆向きに 1 回巻き付けば -1 である。同じ向きに 2 回巻き付けば +2、逆向きに 2 回巻き付けば -2 となる。

したがって、貼り付き次数は「何回巻くか」を表し、代数的次数は「向きを含めて何回巻くか」を表す。埋め込み障害を行列で表すときには、正負の符号をもつ代数的次数が重要になる。

問題 3

問題

多重分岐曲面 $X \subset S^3$ が与えられたとき、双対グラフ G_X をどのように構成するか説明せよ。

解答

まず、 $S^3 - X$ の連結成分を考える。各連結成分を 1 つの頂点に置き換える。次に、2 つの連結成分があるセクター e_i をはさんで隣り合っている場合、対応する 2 つの頂点を 1 本の辺 e_i^* で結ぶ。このようにして得られるグラフが双対グラフ G_X である。

直感的には、 X が S^3 をいくつかの部屋に分けるときの、部屋を頂点にし、セクターを通して隣の部屋へ移る関係を辺で表したものが双対グラフである。平面グラフの双対グラフと同じく、「領域を頂点に置き換える」という発想で作られる。

問題 4

問題

基本関係式

$$\sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j] + [m_i] = 0$$

の各項が何を表しているか説明せよ。

解答

この式は、補空間 $S^3 - G_X$ の 1 次ホモロジー群の中で成り立つ関係式である。

ℓ_j は X のブランチであり、 $[\ell_j]$ はそのブランチが表すホモロジー類である。係数 $\text{ade}_{e_i}(\ell_j)$ は、セクター e_i の境界がブランチ ℓ_j に符号付きで何回巻き付くかを表す代数的次数である。したがって

$$\sum_{j=1}^n \text{ade}_{e_i}(\ell_j)[\ell_j]$$

は、セクター e_i の境界がブランチたちに沿って作るホモロジー類を表している。

m_i は、双対グラフの辺 e_i^* の近くを一回まわるメリディアンであり、 $[m_i]$ はそのホモロジー類である。式全体は、セクターの境界から来るホモロジー類とメリディアンのホモロジー類が相殺して、和が 0 になることを表している。幾何的には、「セクターの境界がブランチに巻き付く量」と「双対辺をまわる量」が釣り合っている、という意味である。

問題 5

問題

整数行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が定める準同型 $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ を考える。Coker A を求め、この行列が埋め込み障害を与える理由を説明せよ。

解答

この行列はすでにスミス標準形 $\text{diag}(2, 2)$ である。したがって、この行列が定める準同型 $A: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ の余核は

$$\text{Coker } A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

である。

この余核は 0 ではないので、 A は整数係数の右逆をもたない。もしこの行列が、ある多重分岐曲面 X の埋め込みから定まる代数的次数行列 A_T として現れるなら、本章の判定定理 ($X \hookrightarrow S^3$ ならば $\text{Coker } A_T = 0$) に反する。したがって、この行列は S^3 への埋め込み障害を与える。なお、同じ行列を接続行列 M_X と見た場合には、 $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ にトーションが現れ、第 7 章のトーション消滅定理からも非埋め込み性が従う。 A_T と M_X のどちらとして扱っているかで、使う定理が違うことに注意する。

問題 6

問題

ブランチの数が $n = 2$ 、双対グラフの第一ベッチ数が $m = 3$ である多重分岐曲面があるとす。このとき Coker A_T がどうなるかを述べ、判定定理から何が結論できるか説明せよ。また「余核の自由部分はトーションではないから障害にならない」という考えがなぜ誤りかを述べよ。

解答

この場合、代数的次数行列は 3×2 行列になる。したがって、準同型 $A_T: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ の余核には必ず自由部分 $\mathbb{Z}^{3-r}$ ($r = \text{rank } A_T \leq 2$) が残り、Coker $A_T \neq 0$ である。すなわち A_T は整数係数の右逆をもたない。

ここが混乱しやすい点である。「Coker A_T に $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ($d \geq 2$) 型のトーションが現れる」ことは、Coker $A_T \neq 0$ の一つの現れ方にすぎない。埋め込み可能性の必要条件は Coker $A_T = 0$ (=右逆の存在) であり、 $m > n$ ならこれは自動的に破れる。したがって、 $m > n$ という情報だけでも、この双対グラフ・全域木のもとでは埋め込みが不可能だと結論できる。ただし双対グラフ自体は埋め込みが与えられて初めて決まるので、 X の非埋め込み性を結論するには、 X

からあり得るすべての双対グラフについて同じことを確かめる必要がある。「自由部分はトーションではないから障害にならない」と考えるのは誤りである。

問題 7

問題

実射影平面を、代数的次数行列 [2] をもつ多重分岐曲面とみなす。本章の判定定理を用いて、 $\mathbb{RP}^2$ が S^3 に埋め込めないことを説明せよ。

解答

実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ は、1 本のブランチと 1 枚のセクターからなる多重分岐曲面として表せる。 $\mathbb{RP}^2$ が S^3 に埋め込めたとすると、ブランチの近傍で $\mathbb{RP}^2$ はメビウスの帯であるから円板セクターの両側は同じ部屋になり、双対グラフは頂点 1 個とループ 1 本からなる ($m = 1$)。セクターの境界がブランチに 2 回巻き付くため、代数的次数行列は $A_T = [2]$ である。この行列が定める準同型は $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x$ である。その余核は

$$\text{Coker}[2] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

であり、0 ではない。したがって [2] は整数係数の右逆をもたない (1×1 行列の 1 次小行列式は 2 で、最大公約数は $2 \neq 1$ である)。本章の判定定理より、 $\mathbb{RP}^2$ は S^3 に埋め込めない。すなわち $\mathbb{RP}^2 \not\hookrightarrow S^3$ である。別ルートとして、 $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ にトーションがあることと、正則近傍が $\mathbb{RP}^2$ に変形レトラクトすること、第 7 章のトーション消滅定理を組み合わせても同じ結論が得られる。

問題 8

問題

臨界的複体とは何か説明せよ。また、非埋め込み性を代数的障害で示し、最小性を幾何学的構成で示す、という方針を説明せよ。

解答

臨界的複体とは、それ自身は指定された空間に埋め込めないが、少し単純化すると埋め込めるようになる複体である。本章の文脈では、2 次元複体 X が S^3 に関して臨界的であるとは、 X は S^3 に埋め込めないが、任意の一点を取り除いた空間 $X - x$ は S^3 に埋め込める、という性質をもつことをいう。

臨界性を示すには、二つの段階が必要である。第一に、 X 自身が S^3 に埋め込めないことを示す。本章では、代数的次数行列の余核に現れるトーションを用いることで、この非埋め込み性を代数的に示すことができる。第二に、 X が最小の障害であることを示す必要がある。すなわち、一点を取り除くなどの単純化を行うと、実際に S^3 へ埋め込めることを幾何学的に構成する。

このように、非埋め込み性は代数的障害で示し、最小性は具体的な埋め込みやはめ込みの構成で示す。これは、グラフ平面性における K_5 や $K_{3,3}$ の極小性の議論を、2次元複体へ拡張する考え方である。

第 9 章

第 9 章 多重分岐曲面の種数 の解答

問題 1

問題

向き付け可能閉曲面 Σ_g について、 $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ を用いて、種数 g をオイラー標数で表せ。

解答

式 $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ を g について解く。両辺を移項すると $2g = 2 - \chi(\Sigma_g)$ である。したがって $g = 1 - \frac{1}{2}\chi(\Sigma_g)$ となる。たとえば球面では $\chi = 2$ なので $g = 0$ 、トーラスでは $\chi = 0$ なので $g = 1$ である。

問題 2

問題

ソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ の境界種数を求めよ。また、種数 g のハンドル体 H_g の境界種数を求めよ。

解答

ソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ の境界は $S^1 \times S^1 = T^2$ であり、トーラスの種数は 1 である。したがって境界種数は 1 である。また、種数 g のハンドル体 H_g の境界は種数 g の閉曲面 Σ_g である。したがって $g(\partial H_g) = g$ である。

問題 3

問題

一つのブランチに、次数 $1, 2, 3$ のプレブランチが貼り付いているとする。このブランチは正則かどうか判定せよ。

解答

ブランチが正則であるとは、そこに貼り付くプレブランチの次数がすべて等しいことをいう。この場合、次数は $1, 2, 3$ であり、等しくない。したがってこのブランチは正則ではない。最大公約数は $\gcd(1, 2, 3) = 1$ であるが、正則性は最大公約数ではなく「次数が揃っているか」で決まることに注意する。実際、ブランチの近傍のソリッドトーラスの境界上で、芯のまわりを 1 回・ 2 回・ 3 回まわる曲線を互いに交わらないように同時に描くことはできない。

問題 4

問題

一つのブランチに、次数 $2, 2, 2$ のプレブランチが貼り付いているとする。このブランチは正則かどうか判定せよ。正則ならば巻き付き数を求めよ。

解答

この場合、次数は $2, 2, 2$ ですべて等しい。したがってこのブランチは正則であり、巻き付き数は $\text{wrap}(l) = 2$ である。次数が 1 でなくても、揃っていれば正則である。

問題 5

問題

閉曲面 $F = \Sigma_g$ を多重分岐曲面とみなし、その正則近傍が $F \times [-1, 1]$ であるとする。このとき、近傍種数 $g(\partial N(F))$ を求めよ。

解答

$F = \Sigma_g$ の正則近傍が $N(F) = F \times [-1, 1]$ であるなら、その境界は $\partial N(F) = F \times \{-1\} \sqcup F \times \{1\}$ である。つまり、境界は F の 2 つのコピーからなる。各コピーの種数は g なので、境界種数は $g(\partial N(F)) = g + g = 2g$ である。

問題 6

問題

正則近傍 $N(X)$ が X に変形レトラクトするとき、 $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ が成り立つ理由を説明せよ。

解答

正則近傍 $N(X)$ が X に変形レトラクトするとは、包含 $X \subset N(X)$ に対して、 $N(X)$ 全体を連続的に X へ縮める写像が存在することを意味する。変形レトラクトはホモトピー同値を与えるので、ホモロジー群は保存される。したがって、すべての次元で $H_i(N(X)) \cong H_i(X)$ が成り立つ。特に $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。

問題 7

問題

多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるなら、なぜ $H_1(X)$ にトーションが現れないと期待できるのか、第7章の結果を用いて説明せよ。

解答

X が S^3 に埋め込まれるなら、その正則近傍 $N(X)$ は S^3 のコンパクト3次元部分多様体になる。第7章の定理より、そのような部分多様体の $H_1(N(X))$ はトーションをもたない。さらに $N(X)$ は X に変形レトラクトするので $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。したがって、 $H_1(X)$ にもトーションは現れないと期待できる。これは多重分岐曲面に対する基本的なトーション障害である。

問題 8

問題

近傍種数とヒーガード種数はどのように違うか説明せよ。

解答

近傍種数は、多重分岐曲面 X の正則近傍 $N(X)$ の境界 $\partial N(X)$ の種数の総和であり、 X の局所的な厚み付き近傍の複雑さを測る。一方、ヒーガード種数は、閉3次元多様体全体を二つのハンドル体に分解するときのヒーガード曲面の最小種数であり、周囲の3次元多様体全体の複雑さを測る。したがって、近傍種数は部分空間の近傍に関する量であり、ヒーガード種数は3次元多様体全体に関する量である。両者は関連するが、同じ量ではない。

追加問題 1

問題

境界付きコンパクト 3 次元多様体 N の埋め込み可能種数 $\text{eg}(N)$ を定義せよ。また、 N が S^3 に埋め込めるなら $\text{eg}(N) = 0$ であることを説明せよ。

解答

N の埋め込み可能種数とは、 N を埋め込むことのできる閉向き付け可能 3 次元多様体 M のヒーガード種数 $g_H(M)$ の最小値である。すなわち $\text{eg}(N) = \min\{g_H(M) \mid N \hookrightarrow M\}$ である。もし N が S^3 に埋め込めるなら、 $M = S^3$ を選べる。 S^3 のヒーガード種数は 0 なので $\text{eg}(N) \leq 0$ である。ヒーガード種数は非負整数だから、結局 $\text{eg}(N) = 0$ となる。

なお、閉曲面 Σ_g については、正則近傍が $\Sigma_g \times [-1, 1]$ ただ一つなので $g_{\min}(\Sigma_g) = g_{\max}(\Sigma_g) = 2g$ であるが、 $\Sigma_g \times [-1, 1]$ は S^3 に埋め込めるので $\min g(\Sigma_g) = \max g(\Sigma_g) = 0$ である。 $g_{\min}, g_{\max}$ (境界種数) と $\min g, \max g$ (埋め込み可能種数) はまったく別の量である。

追加問題 2

問題

多重分岐曲面のマイナー操作として、セクター削除とアニュラス状セクターの縮約を説明せよ。また、なぜ S^3 への埋め込み可能性はマイナーで保たれると期待できるか述べて。

解答

セクター削除とは、多重分岐曲面を構成する境界付き曲面の成分を 1 つ取り除く操作である。これはグラフで辺を削除する操作に対応する。アニュラス状セクターの縮約とは、2 つのブランチをつなぐ帯状のセクターをつぶし、接続関係を単純化する操作である。これはグラフの辺縮約に対応する。

もし元の多重分岐曲面が S^3 に埋め込まれていれば、セクター削除は埋め込まれた部分を取り除くだけなので、残りも S^3 に埋め込まれている。また、アニュラス状セクターの縮約は正則近傍内で局所的に実現できる単純化であり、埋め込み可能性を壊さない。したがって、 S^3 への埋め込み可能性はマイナーで保たれると期待できる。

追加問題 3

問題

性質 P がマイナーに関して閉じているとき、障害物集合 $\Omega(P)$ を定義せよ。 $P = P_{S^3}$ の場合、これはどのような意味をもつか説明せよ。

解答

性質 P がマイナーに関して閉じているとき、 P を持たないが、どの真のマイナーも P を持つような対象を、 P に対する最小障害と考える。その集合を

$$\Omega(P) = \{[X] \mid [X] \notin P, \text{ かつ } [X] \text{ の任意の真のマイナーは } P \text{ に属する}\}$$

と定義する。

$P = P_{S^3}$ を「 S^3 に埋め込める」という性質とすると、 $\Omega(P_{S^3})$ は、それ自身は S^3 に埋め込めないが、任意の真のマイナーは S^3 に埋め込めるような多重分岐曲面の集合である。これは、グラフ平面性における K_5 と $K_{3,3}$ に対応する、3次元版の禁じられた対象の候補である。

第 10 章

第 10 章 種数と埋め込み障害 の解答

問題 1

問題

コンパクト向き付け可能 3 次元多様体 N の境界が、種数 2 の閉曲面 1 つとトーラス 2 つからなるとする。このとき $g(\partial N)$ を求めよ。

解答

境界は、種数 2 の閉曲面 1 つとトーラス 2 つからなる。境界種数は、各境界成分の種数の和である。種数 2 の閉曲面の種数は 2 であり、トーラスの種数は 1 である。したがって $g(\partial N) = 2 + 1 + 1 = 4$ である。

問題 2

問題

N が多重分岐曲面 X に変形レトラクトし、 $\chi(X) = -2$ であるとする。もし ∂N の連結成分数が 3 なら、 $g(\partial N)$ を求めよ。

解答

第 10 章の公式 $g(\partial N) = b(\partial N) - \chi(X)$ を用いる。ここで $b(\partial N) = 3$ 、 $\chi(X) = -2$ であるから $g(\partial N) = 3 - (-2) = 5$ である。したがって境界成分全体の種数の総和は 5 である。

問題 3

問題

正則多重分岐曲面 X のセクターが、円板 2 枚とトーラスから 1 つの円板を除いた曲面 1 枚からなるとする。このとき $\chi(X)$ を求めよ。

解答

多重分岐曲面のオイラー標数は、セクターのオイラー標数の和で計算できる。円板のオイラー標数は 1 なので、円板 2 枚の寄与は $1 + 1 = 2$ である。トーラスから 1 つの円板を除いた曲面は一つ穴あきトーラスであり、トーラスのオイラー標数 0 から円板を 1 つ除くことで $\chi = 0 - 1 = -1$ となる。したがって $\chi(X) = 1 + 1 + (-1) = 1$ である。

問題 4

問題

閉曲面 Σ_g を多重分岐曲面とみなしたとき、 $g_{\min}(\Sigma_g) = g_{\max}(\Sigma_g) = 2g$ であることを説明せよ。

解答

閉曲面 Σ_g を多重分岐曲面と見ると、ブランチはなく、正則近傍は一意的に $\Sigma_g \times [-1, 1]$ である。その境界は Σ_g の 2 つのコピーなので、境界種数は $g + g = 2g$ である。正則近傍の取り方に自由度がないため、取り得る種数はこの 1 つだけである。したがって $g_{\min}(\Sigma_g) = g_{\max}(\Sigma_g) = 2g$ である。

問題 5

問題

連結グラフ G の正則近傍がハンドル体になることを用いて、その境界種数が $e - v + 1$ であることを説明せよ。

解答

連結グラフ G の正則近傍 $N(G)$ はハンドル体になる。 G の頂点数を v 、辺数を e とすると、 G の第一ベッチ数は $\beta_1(G) = e - v + 1$ である。正則近傍 $N(G)$ は G に変形レトラクトするので、 $N(G)$ の 1 次元の穴の数も $e - v + 1$ である。ハンドル体の種数はその第一ベッチ数に等しいため、 $N(G)$ は種数 $e - v + 1$ のハンドル体である。したがって境界種数も $e - v + 1$ である。

問題 6

問題

正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるなら、 $H_1(X)$ にトーションが現れない理由を説明せよ。

解答

X が S^3 に埋め込まれるなら、正則近傍 $N(X)$ は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体である。第 7 章の結果により、 $H_1(N(X))$ はトーションをもたない。また正則近傍は X に変形レトラクトするため $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。したがって $H_1(X)$ もトーションをもたない。これは、 $H_1(X)$ のトーションが S^3 への埋め込み障害になることを意味する。

問題 7

問題

ある正則多重分岐曲面 X について $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であることが分かった。このとき、 X は S^3 に埋め込めるか。理由を述べよ。

解答

$H_1(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ には非自明なトーションがある。実際、生成元 a に対して $a \neq 0$ だが $3a = 0$ である。もし X が S^3 に埋め込めるなら、前問の理由により $H_1(X)$ はトーションをもたないはずである。これは $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が現れることと矛盾する。したがって、この X は S^3 に埋め込めない。

問題 8

問題

なぜ「種数が大きい」ことだけでは、 S^3 への埋め込み不可能性を示したことにならないのか説明せよ。

解答

種数が大きいことは、近傍や境界が複雑であることを示すが、それだけで埋め込み不可能性を意味するわけではない。実際、任意の種数 g のハンドル体は S^3 に標準的に埋め込める。つまり、高い種数の 3 次元部分多様体でも S^3 に入る例は多い。埋め込み不可能性を示すには、種数の大きさだけでなく、ホモロジーのトーション、補空間との関係、正則近傍の境界成分数など、埋め込みが存在すれば満たすべき具体的な条件に反することを示す必要がある。

追加問題 1

問題

正則多重分岐曲面 X の近傍 N について、 $\text{eg}(N) \geq \text{rank } H_1(X) - g(\partial N)$ という下からの評価が何を意味しているか、直感的に説明せよ。

解答

$\text{rank } H_1(X)$ は、 X が持つ独立な 1 次元サイクルの数を表す。 N は X に変形レトラクトするので、 N も同じだけの 1 次元ホモロジーを持つ。一方、 $g(\partial N)$ は、境界がどれだけその複雑さを担っているかを表す。境界で吸収しきれない 1 次元ホモロジーの分だけ、 N を含む閉 3 次元多様体そのものが複雑でなければならない。その必要な複雑さが $\text{eg}(N)$ の下限として $\text{rank } H_1(X) - g(\partial N)$ に現れている。

追加問題 2

問題

正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込めるなら、ある近傍 N に対して $g(\partial N) \geq \text{rank } H_1(X)$ が成り立つ理由を説明せよ。

解答

X が S^3 に埋め込めるなら、その正則近傍 N も S^3 に埋め込める。したがって $\text{eg}(N) = 0$ である。下からの評価 $\text{eg}(N) \geq \text{rank } H_1(X) - g(\partial N)$ に代入すると、 $0 \geq \text{rank } H_1(X) - g(\partial N)$ となる。これを移項して $g(\partial N) \geq \text{rank } H_1(X)$ を得る。したがって、この不等式に反する X は S^3 に埋め込めない。

追加問題 3

問題

グラフ G の最小種数 $\min g(G)$ と最大種数 $\max g(G)$ を定義せよ。また、胞体的埋め込みにおいて $2 - 2g = V - E + R$ (V, E, R は頂点数・辺数・面数) が成り立つ理由を述べよ。

解答

$\min g(G)$ は、 G を交差なしに埋め込める向き付け可能閉曲面の種数の最小値である。一方、 $\max g(G)$ は、 G が胞体的に埋め込まれる向き付け可能閉曲面の種数の最大値である。胞体的に埋め込まれるとは、補空間の各成分が円板であることをいう。

G が種数 g の閉曲面 Σ_g に胞体的に埋め込まれていると、頂点は 0 セル、辺は 1 セル、補空間の円板成分は 2 セルになる。したがって曲面のオイラー標数は $\chi(\Sigma_g) = V - E + R$ である。

一方、向き付け可能閉曲面では $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ なので、 $2 - 2g = V - E + R$ が成り立つ。

追加問題 4

問題

任意の有限グラフ G に対して $\min g(G \times S^1) = 2 \min g(G)$, $\max g(G \times S^1) = 2 \max g(G)$ が成り立つという定理の意味を説明せよ。

解答

この定理は、グラフ理論の種数と、多重分岐曲面の 3 次元的な種数が、円周との直積によって正確に対応することを述べている。 G を曲面に埋め込む難しさが $\min g(G)$ や $\max g(G)$ で測られるのに対し、 $G \times S^1$ を 3 次元多様体の中に実現する難しさが $\min g(G \times S^1)$ や $\max g(G \times S^1)$ で測られる。

定理は、後者が前者のちょうど 2 倍であることを示す。つまり、グラフを円周方向に持ち上げて 2 次元複体にすると、曲面への埋め込みの複雑さが 3 次元トポロジーの複雑さとして 2 倍に現れる。これは、グラフ理論と 3 次元多様体論を直接結びつける結果である。

第 11 章

第 11 章 グラフと円周の直積 の解答

問題 1

問題

G が 1 本の線分であるとき、 $G \times S^1$ がアニュラスであることを説明せよ。

解答

1 本の線分を $G = [0, 1]$ とすると、 $G \times S^1 = [0, 1] \times S^1$ である。これは円周 S^1 を区間方向に連続的に動かして得られる曲面であり、円筒の側面と同相である。位相的には、2 つの境界成分をもつ環状の曲面、すなわちアニュラスである。境界は $\{0\} \times S^1$ と $\{1\} \times S^1$ の 2 つの円周である。

問題 2

問題

$G = S^1$ のとき、 $G \times S^1$ がトーラスであることを説明せよ。

解答

$G = S^1$ のとき、 $G \times S^1 = S^1 \times S^1$ である。これは 2 つの円周方向をもつ積空間であり、標準的なトーラス T^2 である。一方の S^1 はもとのグラフの円周方向、もう一方の S^1 は直積に用いた円周方向に対応する。

問題 3

問題

有限グラフ G の頂点数を v 、辺数を e とする。 $G \times S^1$ の 0 セル、1 セル、2 セルの数を求め、 $\chi(G \times S^1) = 0$ を確認せよ。

解答

S^1 に 1 つの 0 セルと 1 つの 1 セルをもつ CW 構造を入れる。 G の頂点数を v 、辺数を e とすると、 $G \times S^1$ の 0 セルは頂点と S^1 の 0 セルの積なので v 個である。1 セルは、辺と 0 セルの積が e 個、頂点と 1 セルの積が v 個で、合計 $e + v$ 個である。2 セルは、辺と 1 セルの積なので e 個である。したがって $\chi(G \times S^1) = v - (e + v) + e = 0$ である。

問題 4

問題

G を連結グラフとし、 $\beta_1(G) = e - v + 1$ とする。このとき $H_1(G \times S^1) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)+1}$ となる理由を説明せよ。

解答

キュネット公式を用いると、連結グラフ G について $H_1(G \times S^1) \cong H_1(G) \oplus H_1(S^1)$ である。連結グラフでは $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)}$, $\beta_1(G) = e - v + 1$ であり、また $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である。したがって $H_1(G \times S^1) \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{\beta_1(G)+1}$ となる。

問題 5

問題

$K_5 \times S^1$ について、ブランチの本数、セクターの枚数、各ブランチの次数を求めよ。

解答

K_5 は 5 個の頂点と 10 本の辺をもつ。 $K_5 \times S^1$ では、頂点 v がブランチ $v \times S^1$ に対応するので、ブランチの本数は 5 本である。辺 e はアニュラスセクター $e \times S^1$ に対応するので、セクターの枚数は 10 枚である。 K_5 の各頂点の次数は 4 なので、各ブランチには 4 枚のアニュラスが集まる。したがって各ブランチの次数は 4 である。

問題 6

問題

$K_{3,3} \times S^1$ について、ブランチの本数、セクターの枚数、各ブランチの次数を求めよ。

解答

$K_{3,3}$ は 6 個の頂点と 9 本の辺をもつ完全二部グラフである。したがって $K_{3,3} \times S^1$ のブランチは 6 本、セクターは 9 枚である。 $K_{3,3}$ では各頂点は反対側の 3 個の頂点すべてと結ばれてい

るので、各頂点の次数は 3 である。したがって、各ブランチには 3 枚のアニュラスセクターが集まり、各ブランチの次数は 3 である。

問題 7

問題

G が平面的なら $G \times S^1$ が S^3 に埋め込める理由を、 $G \subset D^2$, $G \times S^1 \subset D^2 \times S^1$ を用いて説明せよ。

解答

G が平面的なら、 G は十分大きな円板 D^2 の中に $G \subset D^2$ として埋め込める。直積を取ると $G \times S^1 \subset D^2 \times S^1$ である。 $D^2 \times S^1$ はソリッドトーラスであり、これは S^3 に標準的に埋め込める。したがって、合成により $G \times S^1 \hookrightarrow S^3$ が得られる。

問題 8

問題

なぜ $K_5 \times S^1$ や $K_{3,3} \times S^1$ の非埋め込み性は、 H_1 のトーションだけでは検出できないのか説明せよ。

解答

$K_5 \times S^1$ や $K_{3,3} \times S^1$ の H_1 は自由アーベル群であり、トーションをもたない。たとえば $H_1(K_5 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^7$, $H_1(K_{3,3} \times S^1) \cong \mathbb{Z}^5$ である。したがって、第 7 章で扱った「 H_1 にトーションがあれば埋め込めない」という障害は使えない。これらの非埋め込み性は、もとのグラフ K_5 や $K_{3,3}$ の非平面性が円周方向に持ち上がった幾何学的な障害であり、単純なホモロジーのトーションだけでは検出できない。

追加問題 1

問題

点を 1 つ取り除くというナイーブな臨界性の定義には、どのような問題があるか説明せよ。

解答

点を 1 つ取り除くと、もとの空間がコンパクトであっても、残りは一般に非コンパクトになる。たとえば閉曲面から 1 点を除くと、穴のあいた非コンパクト曲面になる。本書では有限単体的複体やその多面体を扱いたいので、点を取り除いた空間がこのクラスから外れると、組合せ的な議論が難しくなる。そこで、点そのものではなく、十分細かい細分の中の小さな開星状近傍

を取り除く定義を用いる。

追加問題 2

問題

任意の $r \geq 2$ に対する重心細分 $X^{(r)}$ と開星状近傍 $\text{ost}(\sigma)$ を用いた、細分に頑健な古典的臨界性の定義を述べよ。

解答

単体的複体 X が空間 Y に関して古典的に臨界的であるとは、まず X が Y に埋め込めないことをいう。さらに、任意の $r \geq 2$ と $X^{(r)}$ の任意の単体 σ に対し、 $|X^{(r)} \setminus \text{ost}(\sigma)|$ が Y に埋め込めることを要求する。すべての r を量化することで、さらに細かい細分から生じる、より小さな局所削除に対しても条件が保たれる。

追加問題 3

問題

$\Gamma_{\text{cl}}(S^1) = \{S^1 \sqcup \{*\}\}$ となる理由を説明せよ。

解答

S^1 に埋め込めるコンパクト 1 次元複体は、円周の部分集合として実現できる必要がある。連結グラフで次数 3 以上の頂点をもつものは S^1 に埋め込めないが、その分岐点から離れた小部分を取り除いても次数 3 以上の構造は残るため、臨界的ではない。

非連結な場合、各成分は S^1 に埋め込めるが、全体としては S^1 に入らない最小例を考える。 S^1 と孤立点の非交和 $S^1 \sqcup \{*\}$ は S^1 に埋め込めない。しかし、 S^1 側から小さな部分を取り除けば線分と点になり、 S^1 に埋め込める。孤立点側を取り除けば S^1 だけが残る。したがって、これが S^1 に関する臨界的複体である。

追加問題 4

問題

$\Gamma_{\text{cl}}(S^2) = \{K_5, K_{3,3}, S^2 \sqcup \{*\}\}$ という結果が、クラトフスキーの定理とどのように対応しているか説明せよ。

解答

1 次元複体、すなわちグラフについては、クラトフスキーの定理により、 S^2 に埋め込めない最小の障害は K_5 と $K_{3,3}$ である。これらは任意の辺を削除すると平面的になるので、臨界的な障害として現れる。

2 次元成分をもつ場合には、 S^2 と孤立点の非交和 $S^2 \sqcup \{*\}$ が S^2 に埋め込めない最小例になる。 S^2 の小さな円板を取り除けば円板になり、孤立点とともに S^2 に埋め込める。孤立点を取り除けば S^2 が残る。したがって、 $\Gamma_{\text{cl}}(S^2)$ には K_5 、 $K_{3,3}$ 、 $S^2 \sqcup \{*\}$ が現れる。これは、古典的臨界性の定義がクラトフスキーの定理を自然に拡張していることを示している。

第 12 章

第 12 章 臨界的複体の具体例 の解答

問題 1

問題

$X = (G \times S^1) \cup H$ に対して、縮約写像 $\hat{f}: X \rightarrow G \cup H$ を言葉で説明せよ。

解答

縮約写像とは、 $G \times S^1$ の円周方向をつぶして、もとのグラフ G に戻す写像である。より具体的には、各点 $x \in G$ に対して円周 $\{x\} \times S^1$ を 1 点に同一視する。この操作により、辺 e に対応するアニュラス $e \times S^1$ は、もとの辺 e に縮約される。一方、貼り付けられているグラフ H はそのまま残す。その結果、2 次元複体 $X = (G \times S^1) \cup H$ は 1 次元グラフ $\hat{X} = G \cup H$ へ写される。

問題 2

問題

$G \cup H$ が S^2 に埋め込めるなら、 $(G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込める理由を説明せよ。

解答

$G \cup H$ が S^2 に埋め込めるとする。 $G \cup H$ はコンパクトなので、 S^2 から 1 点を除いた平面の中、さらに十分大きな円板の内部に埋め込める： $G \cup H \subset \text{int } D^2$ 。この平面図を固定する。まず、直積を取ることで $G \times S^1 \subset D^2 \times S^1$ という「垂直な」埋め込みが得られる。ここで $D^2 \times S^1$ はソリッドトーラスであり、 S^3 に標準的に埋め込める。次に、 H は 1 枚のレベル円板 $D^2 \times \{\text{pt}\}$ の中に、平面図の通りに置く。平面図の中で H が G と交わるのは指定された貼り付け点だけなので、レベル円板の中に置いた H が $G \times S^1$ と交わるのも、その点 (v, pt) だけである。したがって $(G \times S^1) \cup H$ 全体が S^3 に埋め込まれる。「 $G \times S^1$ は縦 (S^1 方向) に、 H は横 (レベル円板の中) に」置くのが要点である。

問題 3

問題

$X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込めないとする。このとき $G \cup H$ が非平面的でなければならない理由を説明せよ。

解答

問題 2 の結果の対偶を用いる。すなわち、もし $G \cup H$ が平面的であれば、 $(G \times S^1) \cup H$ は S^3 に埋め込める。したがって、 $(G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込めないなら、 $G \cup H$ は平面的ではあり得ない。よって $G \cup H$ は非平面的である。

問題 4

問題

上の結果とクラトフスキーの定理を用いて、 $G \cup H$ が K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含むことを説明せよ。

解答

問題 3 より、 $G \cup H$ は非平面的である。クラトフスキーの定理によれば、有限グラフが非平面的であるための必要十分条件は、 K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を部分グラフとして含むことである。したがって、非平面的なグラフ $G \cup H$ は、必ず K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。これにより、3 次元の非埋め込み問題は、 K_5 と $K_{3,3}$ に由来する 2 次元の平面性障害へ帰着される。

問題 5

問題

臨界性の条件が、なぜ余分な辺や冗長な部分を排除するのか説明せよ。

解答

臨界的であるとは、それ自身は埋め込めないが、真に単純化した任意の複体は埋め込めるということである。もし複体 X に余分な辺や冗長な部分があれば、その部分を削除しても、非埋め込み性の原因となる核は残る。すると、削除後の複体もなお S^3 に埋め込めないことになる。これは「任意の真の単純化は埋め込める」という臨界性の条件に反する。したがって、臨界的複体には非埋め込み性に無関係な余分な部分は残れない。

問題 6

問題

縮約グラフが K_5 で、その中の星形グラフ $K_{1,4}$ が H である場合、縮約を戻すと $K_4 \times S^1$ に $K_{1,4}$ を貼った臨界的複体（型 (I) の (a)）が現れる、という説明の意味を述べよ。

解答

縮約グラフ $\hat{X} = G \cup H$ の段階では、 $G \times S^1$ の円周方向はすべて潰されており、1次元グラフだけが見えている。縮約グラフ K_5 の中で H が星形グラフ $K_{1,4}$ である場合、残りの部分 $G = K_5 \setminus E(K_{1,4})$ は K_4 である ($K_{1,4}$ の中心では K_5 での次数 4 がすべて H に使われて G での次数が 0 になり、4 枚の葉では $4 - 1 = 3$ となるので、残るのは 4 頂点すべてが次数 3 の K_4 である)。縮約を戻すとは、その G の各頂点を円周ブランチに、各辺をアニュラスセクターに戻すことである。したがって、 $K_4 \times S^1$ （ブランチ 4 本、アニュラスセクター 6 枚）に $K_{1,4}$ の 4 枚の葉を 4 本のブランチ円周へ貼り付けた複体が復元される。これが実際に臨界的であることは、面条件で確かめられる。ピースは $K_{1,4}$ 1 個で、貼り付け集合は K_4 の 4 頂点全体である。 K_4 の平面埋め込みの面はどれも三角形なので 4 頂点を含む面はなく (C0)、どの辺についても両側の 2 面を合併すれば 4 頂点すべてを含み (C1)、 $K_{1,4}$ の辺を 1 本除けば残る 3 頂点は一つの三角形の面に乗る (C2)。

問題 7

問題

正則多重分岐曲面の第 1 ホモロジー群の計算公式において、セクターが関係式を与える理由を説明せよ。

解答

セクターから開円板を一つ取り除いた穴あき曲面を考える。その穴を円板で貼り戻すとき、貼り戻す円板の境界は、穴あき曲面の中では 1 サイクルであるが、円板を貼った後には円板の境界になるので 0 になる。この境界サイクルは、セクターの境界がどのブランチに何回巻き付いているかによって、

$$\sum_k d(l_k; e_i) l_k$$

というブランチの線形結合で表される。したがって、円板を貼る操作は、ホモロジー群に

$$\sum_k d(l_k; e_i) l_k = 0$$

という関係式を加えることに対応する。これをすべてのセクターについて行くと、第 1 ホモロジー群の表示が得られる。

問題 8

問題

行列

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のスミス標準形が $\text{diag}(1, 1, 1, 3)$ であるとき、この行列が与えるアーベル群のトーション部分を求めよ。

解答

整数行列 M が与えるアーベル群は、生成元に対して M の行または列から来る関係式を課した商群として理解できる。スミス標準形が $\text{diag}(1, 1, 1, 3)$ であるとき、対角成分 1 は関係式 $x = 0$ を与えるだけなので非自明なトーションを生まない。一方、対角成分 3 は関係式 $3x = 0$ を与える。これは巡回群 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に対応する。したがって、トーション部分は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。

問題 9

問題

$H_1(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^4$ である正則多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込めない理由を説明せよ。

解答

$H_1(X)$ には $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ という非自明なトーションが含まれている。もし X が S^3 に埋め込めるなら、その正則近傍 $N(X)$ は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体になる。また、正則近傍は X に変形レトラクトするので $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。しかし第 7 章の結果より、 S^3 に埋め込まれたコンパクト 3 次元部分多様体の H_1 はトーションをもたない。これは $H_1(X)$ に $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が含まれることと矛盾する。したがって、 X は S^3 に埋め込めない。

問題 10

問題

臨界的複体の分類問題が「3 次元版クラトフスキーの定理」を目指すものだと言える理由を説明せよ。

解答

クラトフスキーの定理は、グラフが平面に埋め込めない理由を、 K_5 と $K_{3,3}$ という最小障害によって特徴づける定理である。同様に、2次元複体が S^3 に埋め込めない理由を、臨界的複体という最小障害のリストで特徴づけたい、というのが3次元版クラトフスキーの考え方である。 $(G \times S^1) \cup H$ 型複体では、面条件によって3次元の埋め込み問題を平面グラフの組合せ的な問題に帰着し、臨界的複体を完全に分類できた。得られたリストは無限個の複体を含むが、障害の仕組みは「一つのグラフの非平面性（クラトフスキー型）」「巡回順序」「パリティ」の三つに限られる。この意味で、臨界的複体の分類は、クラトフスキーの定理を2次元複体と3次元空間の文脈へ拡張する試みである。

問題 11

問題

パリティ型の複体 X_n について、二重辺の裏返しを表す変数 $t_i \in \{0, 1\}$ を用いて、 n が奇数なら X_n は S^3 に埋め込めず、 n が偶数なら埋め込めることを説明せよ。

解答

埋め込み判定定理により、 X_n が S^3 に埋め込めることと、 G のある平面埋め込みで面条件が成り立つことは同値である。 G^* は n 角形の各辺を二重にしたグラフで、その平面埋め込みは各二重辺 D_i を裏返すかどうか $t_i \in \{0, 1\}$ で決まる。 $t_i = 0$ なら外側の辺のマーク m_i^+ が外側の面 J_{out} に、内側の辺のマーク m_i^- が内側の面 J_{in} に乗り、 $t_i = 1$ なら逆になる。ピースは弧 h_i (m_i^- と m_{i+1}^+ を結ぶ) の n 個である。異なる二重辺の上の2個のマークが共有できる面は J_{in} か J_{out} だけなので、 h_i に対する面条件は「 m_i^- と m_{i+1}^+ が同じ側にある」こと、すなわち

$$t_{i+1} \equiv t_i + 1 \pmod{2}$$

である。 $i = 1, \dots, n$ について辺々加えると、左辺と右辺の t の和は打ち消し合い、 $0 \equiv n \pmod{2}$ を得る。したがって n が奇数なら解はなく、どの平面埋め込みでも面条件は成り立たないので、 X_n は S^3 に埋め込めない。 n が偶数なら $t_i \equiv i \pmod{2}$ がすべての条件を満たすので、面条件が成り立ち、 S^3 に埋め込める。

問題 12

問題

巡回順序型の複体 Δ_0 ($G^* = \Theta_4$ 、 H は S_1, S_2, S_3 上のマークを結ぶ三角形) について、条件 (C0) が成り立つこと、および S_0 に関する条件 (C1) が成り立つことを説明せよ。

解答

Θ_4 (の細分) の平面埋め込みは、4 本の辺 S_0, S_1, S_2, S_3 の巡回順序で決まり、面は巡回的に隣り合う 2 本の辺の間に 1 つずつある。 S_i 上のマークは、 S_i の両隣の 2 つの面に乗る。 H を貼り付け点で切り開くと、ピースは 3 本の弧 h_{12}, h_{23}, h_{31} であり、 h_{ij} の貼り付け集合は S_i 上のマークと S_j 上のマークである。これらが共通の面に乗るのは、 S_i と S_j が巡回順序で隣り合うときに限る。

(C0) : 面条件が成り立つには、 S_1, S_2, S_3 のどの 2 本も隣り合っていないなければならない。しかし 4 本の辺の巡回順序では、各辺の隣は 2 本だけであり、 S_0 がどこかに入るので、 S_1, S_2, S_3 のうち S_0 の両隣にある 2 本は互いに隣り合わない。よって面条件はどの平面埋め込みでも成り立たない。

(C1) (S_0 の場合) : 巡回順序 (S_1, S_2, S_3, S_0) を取る。 S_1 と S_2 、 S_2 と S_3 は隣り合うので、 h_{12}, h_{23} は面条件を満たす。 S_0 の両側の面は、 S_3 と S_0 の間の面と、 S_0 と S_1 の間の面であり、これらを合併した面には S_3 上のマークと S_1 上のマークの両方が乗る。したがって h_{31} も S_0 -合併面条件を満たす。

第 13 章

第 13 章 埋め込み型と最小障害 の解答

問題 1

問題

有限複体の埋め込み型 $[X]$ と半順序 $[X] \preceq [Y]$ を定義し、半順序の 3 条件を確かめよ。

解答

$X \preceq Y$ を、 $|X|$ が $|Y|$ に PL 埋め込みできることとする。 $X \sim Y$ を $X \preceq Y$ かつ $Y \preceq X$ で定め、この同値類を $[X]$ と呼ぶ。同値類の間では、 $[X] \preceq [Y]$ を $X \preceq Y$ により定める。恒等写像から反射律が成り立つ。埋め込みの合成から推移律が成り立つ。 $[X] \preceq [Y]$ かつ $[Y] \preceq [X]$ なら $X \sim Y$ なので $[X] = [Y]$ であり、反対称律も成り立つ。したがって埋め込み型全体の上で $\preceq$ は半順序である。

問題 2

問題

細分に頑健な古典的臨界複体の定義を述べよ。なぜ $r = 2$ だけでなく任意の $r \geq 2$ を量化するのか説明せよ。

解答

X が Y に関して古典的に臨界的であるとは、 $|X|$ は $|Y|$ に PL 埋め込みできず、任意の $r \geq 2$ 、任意の単体 $\sigma \subset X^{(r)}$ に対して

$$|X^{(r)} \setminus \text{ost}(\sigma)|$$

が $|Y|$ に PL 埋め込みできることをいう。細分を進めるとメッシュが小さくなり、開星の削除量も小さくなり得る。小さい削除の後にも埋め込めるという条件は、大きい削除後の可埋め込み性より強い。したがって第二重心細分だけの確認では不十分であり、すべての $r \geq 2$ を量化する。

問題 3

問題

$X \in \Gamma_{\text{cl}}(Y)$ ならば $[X] \in \Gamma_{\text{M}}([Y])$ であることを、十分細かい重心細分の小さな開星を用いて示せ。

解答

$[Z] \prec [X]$ とする。PL 埋め込み $Z \hookrightarrow X$ を細分すれば、その像を部分複体 $Z_0 \subset X$ とみなせる。真の不等式なので Z_0 は X 全体ではない。したがって $|X| \setminus |Z_0|$ は空でない開集合を含む。重心細分のメッシュは 0 へ収束するので、十分大きい r と頂点 $v \in X^{(r)}$ を取り、 $\text{ost}(v)$ を $|X| \setminus |Z_0|$ の中に含まれる。よって

$$|Z_0| \subset |X^{(r)} \setminus \text{ost}(v)|.$$

古典的臨界性により右辺は Y に埋め込めるから、 Z も Y に埋め込める。すべての $[Z] \prec [X]$ について同じなので、 $[X] \in \Gamma_{\text{M}}([Y])$ である。

問題 4

問題

有限 2 次元複体の局所可埋め込み性が、頂点リンクの平面性と同値である理由を説明せよ。

解答

頂点 v の閉星はリンクグラフ $\text{lk}_X(v)$ 上の錐である。この錐が 3 次元球体に埋め込めることと、リンクが球体の境界 S^2 に埋め込めること、すなわち平面的であることは同値である。辺の内点のリンクは有限集合の懸垂である一般化 theta グラフ、2 単体の内点のリンクは円周であり、いずれも平面的である。したがって細分後のすべての頂点リンクが平面的であることが、すべての点の局所可埋め込み性と同値になる。

問題 5

問題

$[\text{Cone } K_5]$ が $[S^3]$ に関して臨界的であることの証明を、錐頂点を避ける場合と含む場合に分けて説明せよ。

解答

$\text{Cone } K_5$ が S^3 に埋め込めないことは、錐頂点のリンクが非平面的な K_5 になることから従う。 $[Z] \prec [\text{Cone } K_5]$ とし、細分後に Z を錐の部分複体とみなす。

Z が錐頂点を避けるなら、錐から頂点近傍を除いた $K_5 \times I$ の中に入る。有限グラフ K_5 は $\mathbb{R}^3$ に埋め込め、その各辺に細い帯を付ければ $K_5 \times I$ も $\mathbb{R}^3$ に埋め込める。

Z が錐頂点を含む場合、その点のリンク L は K_5 の細分の部分グラフである。 L が非平面的なら、 K_5 の極小非平面性により L は K_5 の細分を含み、 Z は $\text{Cone } K_5$ を含む。すると $[Z] = [\text{Cone } K_5]$ となり、真の不等式に反する。よって L は平面的である。平面上の L の錐を下半空間へ、残りの帯状部分を上半空間へ置き、 L で貼り合わせれば Z は $\mathbb{R}^3$ に埋め込める。したがって真に小さい型はすべて S^3 に埋め込め、 $[\text{Cone } K_5]$ は臨界的である。

問題 6

問題

球面・二円板・弧からなる例の非埋め込み性が局所リンクではなく大域的分離に由来する理由を説明せよ。

解答

この例の各点のリンクは平面的であり、各点の近傍は B^3 に埋め込める。したがって非埋め込み性は局所リンクからは検出されない。しかし S^2 を S^3 に埋め込むと ジョルダン－ブラウアー分離定理により補空間は二つに分かれる。球面上で横断的に交わる二つの貼り付け弧の近くでは、二枚の円板は互いに交わらないため球面の反対側に置かれる。その結果、円板上の点 p_1, p_2 は球面の反対側にあり、それらを結ぶ弧 γ は球面を横切らなければならない。これは γ が球面と交わらないという構成条件に反する。よって障害は大域的な分離に由来する。

問題 7

問題

局所可埋め込み複体に対する三種類の基本簡約を述べ、辞書式複雑度 κ が停止性を保証する仕組みを説明せよ。

解答

基本簡約は、(I) セクターまたは整理後の不要なブランチ辺の削除、(II) 閉セクターの穿孔、(III) 種数量を下げる・貼り付き成分を分離する・冗長なカラーを切り離す本質的固有弧に沿う切断である。

複雑度を

$$\kappa(X) = \left(c(X), \sum_S h(S), b(X), a(X), s(X), e(B(X)) \right)$$

とする。穿孔は閉セクター数 $c(X)$ を減らし、種数低下型切断は $\sum h(S)$ を減らす。貼り付き分離型は前の成分を増やさず貼り付き余剰 $b(X)$ を減らし、カラー低下型や削除は後続の成分を減らす。したがって各簡約は非負整数列を辞書式に真に減らす。非負整数列の辞書式真降下は無限に続かないので、簡約列は有限で停止する。

問題 8

問題

臨界的障害型の存在定理を述べ、その証明を局所非可埋め込みの場合と局所可埋め込みの場合に分けて説明せよ。

解答

定理は、有限 2 次元複体 X が S^3 に埋め込めないなら、 $|X_0| \hookrightarrow |X|$ かつ $[X_0] \in \Gamma_M([S^3])$ を満たす有限 2 次元複体 X_0 が存在し、細分後には X_0 を X の部分複体として取れる、というものである。

X が局所可埋め込みでなければ、非平面的頂点リンクを取る。クラトフスキーの定理によりその中に K_5 または $K_{3,3}$ の細分があり、対応する錐を X_0 とする。二つの錐型は臨界的である。 X が局所可埋め込みなら、ブランチグラフと曲面セクターの正規形に移る。非埋め込み性を保つ基本簡約を可能な限り行う。辞書式複雑度により有限回で簡約障害 X_0 に到達する。局所削除の完全な場合分けにより、簡約障害より真に小さい型はすべて S^3 に埋め込めるので、 $[X_0]$ は臨界的である。

問題 9

問題

固定細分の部分複体の中で単体数最小の非埋め込み複体を選ぶだけでは、なぜ埋め込み型臨界性を証明できないのか説明せよ。

解答

固定細分には有限個の部分複体しかないので、包含または単体数に関して最小の非埋め込み部分複体は選べる。しかし埋め込み型の臨界性は、固定細分の部分複体だけでなく、 $[Z] \prec [X]$ を満たすすべての型を比較する。そのような Z の像を X の部分複体として実現するにはさらに細分が必要ながることがあり、単体数は増えることもある。したがって固定した有限集合の中の最小性は、半順序全体での極小性を意味しない。表面簡約と、任意の最初の真の型低下を基本簡

約へ移す局所場合分けが必要である。

問題 10

問題

簡約過程をアルゴリズムにできる理由と、そのことが実用上容易な判定を意味しない理由を説明せよ。

解答

頂点リンクの平面性は判定できる。局所可埋め込みの場合にはブランチグラフとセクターを組合せ的に求められ、各段階で基本簡約後に生じる位相型も有限個に列挙できる。さらに有限 2 次元複体の S^3 可埋め込み性は決定可能なので、各候補が許容的かを判定できる。 κ が真に減るため手続きは必ず停止する。

しかし可埋め込み性判定は NP-hard である。したがって理論上停止するアルゴリズムが存在しても、入力が大きいと計算量が非常に大きくなり得る。決定可能性と実用的な効率性は別の問題である。

問題 11

問題

$\Gamma_M([S^3])$ が無限であることを、閉向き付け不可能曲面の族を用いて説明せよ。

解答

種数 $g \geq 1$ の閉向き付け不可能曲面を N_g とする。 S^3 内の閉曲面は分離し、両側的である。向き付け可能な S^3 の中の両側的閉曲面は向き付け可能なので、 N_g は S^3 に埋め込めない。

$[Z] \prec [N_g]$ なら、 Z の像は N_g の真のコンパクト部分多面体である。その正則近傍は境界をもつコンパクト曲面であり、これは S^3 に埋め込める。よって $[N_g]$ は臨界的である。また閉曲面間の埋め込みは不変領域定理により全射なので、相互埋め込みなら同相であり、異なる g は異なる型を与える。したがって $\Gamma_M([S^3])$ は無限である。

問題 12

問題

3 次元の二つの既知の臨界型を挙げ、一般の 3 次元有限複体について何が未解決か説明せよ。

解答

既知の 3 次元臨界型は

$$[B^{3\perp}], \quad [S^3 \sqcup \{\bullet\}]$$

である。 $B^{3\perp}$ は 3 球体の内点に一端だけを付けた弧を加えた空間であり、 $S^3 \sqcup \{\bullet\}$ は 3 球面と孤立点の非交和である。どちらも不変領域定理により S^3 に埋め込めず、真に小さい型は埋め込める。

原論文 [20] は、コンパクト 3 次元多様体は臨界型を表さないこと、リンクが S^2 を真に含む点があれば $B^{3\perp}$ を含むこと、 S^3 型部分多面体を真に含めば $S^3 \sqcup \{\bullet\}$ を含むことを示す。未解決なのは、これらの条件を避ける一般の 3 次元有限複体にも必ず臨界型が含まれるか、また上の二つ以外の 3 次元臨界型が存在するかである。

第 14 章

第 14 章 まとめと発展問題 の解答

問題 1

問題

本巻の流れを、

グラフの平面性 $\rightarrow$ 高次元埋め込み $\rightarrow$ 多重分岐曲面 $\rightarrow$ 臨界的複体

という観点から説明せよ。

解答

本巻の出発点は、グラフを平面に交差なしで描けるかという平面性問題である。平面的グラフにはオイラー公式が成り立ち、そこから K_5 と $K_{3,3}$ の非平面性が分かる。さらにクラトフスキーの定理により、任意の非平面的グラフは、これら二つの基本障害を部分分割として含むことが分かる。

次に、一般の n 次元単体的複体をユークリッド空間へ埋め込む問題を考えた。一般の位置の考え方により、任意の有限 n 次元複体は $\mathbb{R}^{2n+1}$ には埋め込めるが、境界的な次元 $\mathbb{R}^{2n}$ では交差点が残り、ファン・カンペン障害のような高次元の障害が現れる。

後半では、2 次元複体の S^3 への埋め込み問題を扱うため、多重分岐曲面を導入した。多重分岐曲面はブランチとセクターからなる 2 次元複体であり、その正則近傍は 3 次元多様体になる。そのため、ホモロジーや種数を使って埋め込み可能性を調べることができる。

最後に、埋め込めない複体の中で最小の障害を表すものとして、臨界的複体を導入した。これは、グラフの平面性における K_5 と $K_{3,3}$ の役割を、2 次元複体の S^3 埋め込み問題へ拡張するための考え方である。

問題 2

問題

古典的臨界性の定義を述べよ。特に、任意の $r \geq 2$ と開星状近傍を用いる理由を説明せよ。

解答

有限単体的複体 X が空間 Y に関して古典的に臨界的であるとは、 $|X|$ は $|Y|$ に埋め込めないが、任意の $r \geq 2$ と $X^{(r)}$ の任意の単体 σ に対して、開星状近傍を取り除いた空間 $|X^{(r)} \setminus \text{ost}(\sigma)|$ が $|Y|$ に埋め込めることをいう。

点を単に取り除くと非コンパクトになり得るので、開星という標準的な小近傍を除く。重心細分を進めるほど、より小さい局所削除が現れる。その削除後にも可埋め込みであることはより強い条件なので、第二重心細分だけでなくすべての $r \geq 2$ を量化する。

問題 3

問題

$\text{Cone } K_5$ が S^3 に埋め込めない理由を説明せよ。また、なぜ $\text{Cone } K_5$ 自身は古典的な意味では臨界的でないのか説明せよ。

解答

$\text{Cone } K_5$ は K_5 の錐であり、 K_5 に新しい錐頂点を加え、その頂点と K_5 の各点を結んでできる 2 次元複体である。もし $\text{Cone } K_5$ が S^3 に埋め込めたと仮定する。錐頂点のまわりに十分小さい 2 球面 S^2 を取ると、この球面は $\text{Cone } K_5$ と K_5 と同相なグラフで交わる。すると K_5 が S^2 に埋め込めることになるが、これは K_5 の非平面性に反する。したがって $\text{Cone } K_5$ は S^3 に埋め込めない。

一方、古典的臨界性では、任意の十分細かい細分の任意の単体の開星状近傍を取り除くと埋め込めるようになることが求められる。しかし $\text{Cone } K_5$ の底面側の小さな 2 単体の近傍を取り除いても、錐頂点のリンクとして K_5 型の非平面的構造が残る。したがって削除後も S^3 に埋め込めず、 $\text{Cone } K_5$ 自身は古典的に臨界的ではない。

問題 4

問題

埋め込み型 $[X]$ と、埋め込み型の半順序 $[X] \preceq [Y]$ を定義せよ。また、この順序が「単純さ」を表している理由を説明せよ。

解答

有限単体的複体 X, Y に対して、 $X \preceq Y$ とは $|X|$ が $|Y|$ に PL 埋め込み可能であることをいう。また、 $X \sim Y$ を、 $X \preceq Y$ かつ $Y \preceq X$ が成り立つこととして定義する。この同値関係による同値類を $[X]$ と書き、 X の埋め込み型という。

同値類の間で $[X] \preceq [Y]$ とは、代表元 X が代表元 Y に埋め込めることをいう。この定義は代表元の取り方によらず well-defined である。

この順序が単純さを表す理由は、 X が Y に埋め込めるなら、 X は Y の中に実現できる程度の複雑さしか持たないからである。つまり、 $[X] \preceq [Y]$ のとき、 X は Y よりも埋め込みの意味で単純、あるいは同程度に単純であると解釈できる。

問題 5

問題

埋め込み型としての臨界性を定義せよ。また、この定義が古典的臨界性よりも柔軟である理由を説明せよ。

解答

埋め込み型 $[X]$ が $[Y]$ に関して臨界的であるとは、次の 2 条件を満たすことをいう。第一に、 $[X] \not\preceq [Y]$ である。つまり X は Y に埋め込めない。第二に、 $[Z] \prec [X]$ を満たす任意の真に小さい埋め込み型 $[Z]$ について、 $[Z] \preceq [Y]$ が成り立つ。つまり、 X より埋め込み型として真に単純なものはすべて Y に埋め込める。

古典的臨界性は、細分後の単体の開星状近傍を取り除くという具体的な削除操作に基づく。しかし、Cone K_5 のように、物理的な小部分を取り除いても非埋め込み性が残る対象がある。埋め込み型による臨界性は、具体的な削除操作ではなく、半順序における最小性を見るため、より本質的な「埋め込みの難しさ」を捉えることができる。

問題 6

問題

臨界的障害型の存在定理を述べ、その意義を説明せよ。

解答

存在定理は次のように述べられる。有限 2 次元単体的複体 X が S^3 に埋め込めないなら、 $|X|$ に埋め込まれる有限 2 次元複体 X_0 が存在して、 $[X_0]$ は $[S^3]$ に関して臨界的である。必要なら X を細分することで、 X_0 を X の部分複体として取ることができる。

この定理の意義は、任意の非埋め込み 2 次元複体の内部に、その非埋め込み性を担う最小障害型が存在することを保証する点にある。したがって、「 S^3 に埋め込めない理由を最小障害に分解して理解する」という方針が数学的に正当化される。これは、3 次元版クラトフスキー理論を作るうえで基本となる存在定理である。

問題 7

問題

$X = (G \times S^1) \cup H$ に対する縮約写像 $\hat{f}: X \rightarrow G \cup H$ を説明せよ。また、 $G \cup H$ が平面的なら X が S^3 に埋め込める理由を説明せよ。

解答

$G \times S^1$ の各円周ファイバーを 1 点につぶす写像を考える。すると、 $G \times S^1$ の部分は元のグラフ G に縮約される。一方、貼り付けられたグラフ H はそのまま残る。このようにして得られる写像が $\hat{f}: (G \times S^1) \cup H \rightarrow G \cup H$ である。

もし $G \cup H$ が平面的なら、 $G \cup H$ は 2 球面または円板の中に交差なしで描ける。その平面図の各頂点や辺のまわりに小さな厚みを付け、さらに円周方向を復元すると、 $G \times S^1$ のアニュラス状セクターを 3 次元空間内に配置できる。より直感的には、平面的な縮約グラフをソリッドトーラスやその近傍の中で円周方向に太らせることで、元の複体 X を S^3 に埋め込める。

問題 8

問題

$X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に埋め込めないなら、縮約グラフ $G \cup H$ は非平面的でなければならない。このことを、前問の対偶として説明せよ。

解答

前問で示した主張は、

$$G \cup H \text{ が平面的} \implies X = (G \times S^1) \cup H \text{ は } S^3 \text{ に埋め込める}$$

という形である。この対偶を取ると、 X が S^3 に埋め込めない $\implies G \cup H$ は平面的でないとなる。したがって、 X が非埋め込みなら、縮約グラフ $G \cup H$ は非平面的でなければならない。これにより、3 次元の埋め込み問題を、2 次元のグラフ平面性問題に帰着できる。

問題 9

問題

$(G \times S^1) \cup H$ 型の臨界複体の分類定理を述べ、三つの型がどのような障害の仕組みに対応するかを、クラトフスキーの定理との関係に触れながら説明せよ。

解答

分類定理 [19] は次の通りである。 $X = (G \times S^1) \cup H$ が S^3 に関して臨界的であるのは、クラトフスキー型 3 種類、巡回順序型 6 種類、パリティ型の無限族のいずれかと同相であるとき、かつそのときに限る。

X が S^3 に埋め込めないなら、前問より縮約グラフ $G \cup H$ は非平面的であり、クラトフスキーの定理により K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割を含む。しかしこれは必要条件にすぎないので、分類には必要十分条件である面条件 (G のある平面埋め込みで、各ピースの貼り付け集合が一つの面に乗ること) を用いる。

クラトフスキー型は、ピースが 1 個の場合であり、 G に 1 頂点を加えて貼り付け集合と結んだグラフが辺極小な非平面的グラフ、すなわち K_5 または $K_{3,3}$ の部分分割になる。ここでクラトフスキーの定理が直接使われる。巡回順序型は、 Θ_4 の 4 本の辺の巡回順序の中で 3 本の辺がどの 2 本も隣り合うことはできない、という障害である。パリティ型は、二重辺の裏返しに関する条件が、奇数個の二重辺を一周すると矛盾する、という障害である。したがって、このクラスの臨界複体は無限個あるが、障害の仕組みは三つに限られる。

問題 10

問題

多重分岐曲面の H_1 にトーションが現れると、なぜ S^3 への埋め込み障害になるのか説明せよ。

解答

多重分岐曲面 X が S^3 に埋め込まれるとする。その正則近傍を $N(X)$ とすると、 $N(X)$ は S^3 のコンパクト 3 次元部分多様体である。第 7 章で示したように、 S^3 に埋め込まれたコンパクト 3 次元部分多様体 M について、 $H_1(M)$ はトーションをもたない。したがって、 $H_1(N(X))$ はトーションをもたない。

一方、正則近傍 $N(X)$ は通常 X に変形レトラクトするので、 $H_1(N(X)) \cong H_1(X)$ である。よって、もし $H_1(X)$ に非自明なトーションがあるなら、 $N(X)$ は S^3 に埋め込めず、したがって X も S^3 に埋め込めない。これがトーションによる埋め込み障害である。

問題 11

問題

接続行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のスミス標準形が対角成分 $1, 1, 1, 3$ をもつとする。この行列が与えるアーベル群のトーション部分を求めよ。

解答

整数行列 A が与えるアーベル群は、生成元を 4 個持ち、 A の行または列が与える関係式で割った群として理解できる。スミス標準形が対角成分 $1, 1, 1, 3$ をもつということは、この群の有限部分が $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であることを意味する。ここで $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ は自明群なので消える。したがって、非自明なトーション部分は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。

もしこの行列が多重分岐曲面の接続行列から得られているなら、対応する H_1 には $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 型のトーションが現れる。したがって、その多重分岐曲面は S^3 への埋め込み障害をもつ可能性がある。

問題 12

問題

$\Gamma_M([S^3])$ 全体が無限であるにもかかわらず、有界な部分クラスでの有限分類が 3 次元版クラトフスキー計画にとって重要である理由を説明せよ。

解答

閉向き付け不可能曲面 N_g は $g \geq 1$ ごとに異なる臨界型を与え、多重分岐曲面 $X_2(n)$ も局所分岐次数によって区別される無限族を与える。さらに、 $(G \times S^1) \cup H$ 型という限られたクラスの中でさえ、パリティ型の無限族が存在する。したがって $\Gamma_M([S^3])$ 全体を有限リストにすることはできない。

しかし局所分岐次数、セクター数、セクター種数、ブランチグラフ複雑度などを制限すれば、そのクラスに現れる臨界型が有限になる可能性がある。有限性と有効な列挙が得られれば、その有界クラスに対してクラトフスキーの定理に似た禁止型判定を構成できる。したがって目標は「全体の有限リスト」から「自然な有界クラスの有限分類」へ移る。

用語索引

本索引では、本書で繰り返し使う用語を簡単にまとめる。ページ番号ではなく、主に現れる章を示す。

用語	主な章	意味・参照の目安
埋め込み	第 1 章	空間 X が像 $f(X)$ と同相になるような単射連続写像。
平面的グラフ	第 3 章	平面または球面に辺の交差なしで描けるグラフ。
部分分割	第 4 章	辺の途中に次数 2 の頂点を挿入して得られるグラフ。
一般の位置	第 5 章	余分な一致や交差が起きない配置。交差次元の見積もりに使う。
ファン・カンペン障害	第 5 章	臨界次元 $\mathbb{R}^{2k}$ への埋め込みを妨げる交差情報に基づく障害。
鎖群・境界作用素	第 6 章	ホモロジー群を定義するための代数的データ。
マイヤー・ヴィートリス完全系列	第 7 章	空間を二つに分けてホモロジーを計算する道具。
トーション	第 6–8 章	ある正整数倍で 0 になるホモロジー類。 S^3 への埋め込み障害になることがある。
ブランチ	第 8 章	多重分岐曲面で複数のセクターが集まる円周状部分。
セクター	第 8 章	ブランチに沿って貼り付く曲面片。
プレブランチ	第 8 章	貼り付け前のセクターの境界成分。
貼り付き次数	第 8 章	プレブランチがブランチに何回巻き付くかを表す正の整数。
代数的次数	第 8 章	向きを考慮した符号付きの貼り付き次数。
正則ブランチ	第 9 章	貼り付くプレブランチの貼り付き次数がすべて等しいブランチ。
巻き付き数	第 9 章	正則ブランチに貼り付くプレブランチの共通の貼り付き次数。
双対グラフ	第 8 章	補空間の部屋を頂点、セクターを横切る辺として作るグラフ。

代数的次数行列 A_T	第 8 章	全域木 T に属さない双対辺に対応するセクターの代数的次数を並べた整数行列。埋め込みがあれば整数右逆をもつ ($\text{Coker } A_T = 0$)。
接続行列 M_X	第 8・12 章	すべてのセクターの代数的次数を並べた整数行列。 $H_1(X; \mathbb{Z})$ の計算に用いる。 A_T とは別物。
正則近傍	第 8–10 章	複体に厚みを付けた 3 次元多様体で、もとの複体に変形レトラクトするもの。
境界種数の最小・最大 $g_{\min}, g_{\max}$	第 10 章	取り得る正則近傍の 境界種数 の最小値・最大値。 $\min g, \max g$ とは別物。
最小種数・最大種数 $\min g(X) \cdot \max g(X)$	第 9–10 章	取り得る近傍の 埋め込み可能種数 の最小値・最大値。 $g_{\min}, g_{\max}$ とは別物。
埋め込み可能種数	第 9–10 章	ある 3 次元多様体を埋め込める閉 3 次元多様体のヒーガード種数の最小値。
マイナー	第 10 章	セクター削除やアニュラス状セクター縮約で得る単純化。
縮約写像	第 12 章	$(G \times S^1) \cup H$ から $G \cup H$ へ、 S^1 方向を潰す写像。
ピース・貼り付け集合	第 12 章	H を貼り付け点で切り開いた各成分と、それが貼り付く頂点円周に対応する G の頂点の集合。
面条件	第 12 章	G の平面埋め込みで、各ピースの貼り付け集合が一つの面に乗ること。 $(G \times S^1) \cup H$ の S^3 への埋め込み可能性と同値。
古典的臨界複体	第 11–13 章	任意の十分細かい細分で単体の開星を局所削除すると可埋め込みになる非埋め込み複体。
埋め込み型	第 13 章	相互に PL 埋め込み可能な有限複体を同一視して得る同値類 $[X]$ 。
埋め込み型の半順序	第 13 章	$[X] \preceq [Y]$ を X が Y に PL 埋め込み可能であることにより定めた順序。
臨界的埋め込み型	第 13–14 章	$[Y]$ に埋め込めない型のうち、半順序で極小なもの。
局所可埋め込み性	第 13 章	各点が B^3 に埋め込み可能な近傍をもつこと。2 次元複体では頂点リンクの平面性と同値。
ブランチグラフ	第 13 章	局所可埋め込み 2 次元複体で、リンクが円周でも区間でもない点の集合の閉包。

参考文献

本書で扱った内容の背景を学ぶための基本文献を挙げる。すべてを読む必要はないが、卒業研究や修士研究へ進む場合には、関係する章から順に参照するとよい。

参考文献

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 2008.
- [2] R. Diestel, *Graph Theory*, 5th edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 173, Springer, 2017.
- [3] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fundamenta Mathematicae* **15** (1930), 271–283.
- [4] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.
- [6] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.
- [7] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, 1976.
- [8] J. Hempel, *3-Manifolds*, Annals of Mathematics Studies, Vol. 86, Princeton University Press, 1976.
- [9] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Universitext, Springer, 2003.
- [10] E. R. van Kampen, Komplexe in euklidischen Räumen, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* **9** (1933), 72–78.
- [11] A. Flores, Über n -dimensionale Komplexe, die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* **6** (1934), 4–7.
- [12] K. S. Sarkaria, A generalized van Kampen–Flores theorem, *Proceedings of the American Mathematical Society* **111** (1991), 559–565.
- [13] K. Eto, S. Matsuzaki and M. Ozawa, An obstruction to embedding 2-dimensional complexes into the 3-sphere, *Topology and its Applications* **198** (2016), 117–125.
- [14] S. Matsuzaki and M. Ozawa, Genera and minors of multibranched surfaces, *Topology and its Applications* **230** (2017), 621–638.
- [15] K. Ishihara, Y. Koda, M. Ozawa and K. Shimokawa, Neighborhood equivalence for multibranched surfaces in 3-manifolds, *Topology and its Applications* **257** (2019), 11–21.
- [16] M. Ozawa, A partial order on multibranched surfaces in 3-manifolds, *Topology and its Applications* **272** (2020), 107074.
- [17] M. Eudave-Muñoz and M. Ozawa, The maximum and minimum genus of a multibranched surface, *Topology and its Applications* **280** (2020), 107502.
- [18] M. Ozawa, Multibranched surfaces in 3-manifolds, *Journal of Mathematical Sciences* **255** (2021), 193–209.

-
- [19] M. Eudave-Muñoz and M. Ozawa, A classification of critical product-graph complexes in the 3-sphere, arXiv:2403.18279.
 - [20] M. Eudave-Muñoz and M. Ozawa, Embeddability types of simplicial complexes and minimal obstructions for the 3-sphere, preprint, 2026.
 - [21] J. Matoušek, E. Sedgwick, M. Tancer and U. Wagner, Embeddability in the 3-sphere is decidable, *Journal of the ACM* **65** (2018), no. 1, Article 5.
 - [22] A. de Mesmay, Y. Rieck, E. Sedgwick and M. Tancer, Embeddability in $\mathbb{R}^3$ is NP-hard, *Proceedings of the Twenty-Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (SODA 2018), 1316–1329.
 - [23] S. Mardešić and J. Segal, A note on polyhedra embeddable in the plane, *Duke Mathematical Journal* **33** (1966), 633–638.
 - [24] B. G. Casler, An imbedding theorem for connected 3-manifolds with boundary, *Proceedings of the American Mathematical Society* **16** (1965), 559–566.
 - [25] M. Skopenkov, Embedding products of graphs into Euclidean spaces, *Fundamenta Mathematicae* **179** (2003), 191–198.
 - [26] J. L. Gross and T. W. Tucker, *Topological Graph Theory*, Wiley, 1987.
 - [27] B. Mohar and C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*, Johns Hopkins University Press, 2001.
 - [28] N. Robertson and P. D. Seymour, Graph minors. XX. Wagner’s conjecture, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **92** (2004), 325–357.
 - [29] A. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, in *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 347, Cambridge University Press, 2008, 248–342.

あとがき

本書は、埋め込み問題を軸に、グラフ理論、代数的トポロジー、3次元多様体論、多重分岐曲面を接続することを目指した原案である。本版では、各章末の練習問題に対する詳細な解答に加え、既習事項の要点、図解、必須・発展項目の区別、計算例、研究ノート、用語索引、参考文献表を追加・整備した。今後、図版のさらなる清書、索引の精密化、出版社の体裁に合わせた組版調整を加えることで、より自習しやすい教材へ発展させることができる。