

手を動かして学ぶ位相幾何学 I

基本群からホモロジー群へ

本文・練習問題・模範解答

2026 年度 早稲田大学「数学特論 4」をもとに

小沢 誠

2026 年 10 月 6 日

目次

第 I 部 本文編	10
はじめに	11
第 1 章 位相空間とホモトピー	13
1.1 この章で学ぶこと	13
1.2 本書で扱う位相幾何学の考え方	13
1.3 位相空間	14
1.4 部分空間	14
1.5 連続写像	15
1.6 同相	16
1.7 位相的不変量	17
1.8 ホモトピー	17
1.9 可縮空間	18
1.10 ホモトピー同値	19
1.11 レトラクション	20
1.12 変形レトラクション	21
1.13 変形レトラクションの例	21
1.14 レトラクトではない例	23
1.15 ホモトピー同値と不変量	23
1.16 同相, ホモトピー同値, 変形レトラクトの関係	23
1.17 まとめ	24
第 2 章 基本群の定義	26
2.1 この章で学ぶこと	26
2.2 基本群とは何を測るものか	26
2.3 道	27
2.4 ループと基点	27
2.5 道の積	28
2.6 逆向きの道	29
2.7 ループのホモトピー	29
2.8 ホモトピー類	30
2.9 基本群の定義	31

2.10	基本群の基本例	32
2.11	連続写像から誘導される準同型	33
2.12	関手性	34
2.13	ホモトピーと基本群	35
2.14	ホモトピー同値と基本群	35
2.15	基点の役割	36
2.16	円周の基本群	36
2.17	円周の被覆写像	36
2.18	巻き数	37
2.19	円周の基本群の計算	38
2.20	穴のあいた平面の基本群	38
2.21	単連結	39
2.22	まとめ	39
第 3 章	ファン・カンペンの定理 (導入)	41
3.1	この章で学ぶこと	41
3.2	この章の位置づけ	41
3.3	群の表示の復習	42
3.4	自由積	43
3.5	自由積の元	44
3.6	正規閉包	45
3.7	融合積	46
3.8	ファン・カンペンの定理	48
3.9	表示を用いたファン・カンペンの使い方	49
3.10	例 1 : 8 の字空間	50
3.11	例 2 : 円周の開被覆の注意	51
3.12	2 セルを貼ると関係式が加わる	52
3.13	例 3 : トーラスの基本群	52
3.14	例 4 : 実射影平面の基本群	53
3.15	例 5 : 球面の基本群	54
3.16	まとめ	54
第 4 章	基本群の計算 (1) グラフと自由群	56
4.1	この章で学ぶこと	56
4.2	この章の位置づけ	56
4.3	準備 : CW 複体とは何か	57
4.4	1 次元 CW 複体としてのグラフ	58
4.5	ブーケと自由群	58
4.6	木は可縮である	59
4.7	極大木	60
4.8	一般の連結グラフの基本群	61

4.9	具体例	62
4.10	オイラー標数との関係	62
4.11	次章への橋渡し：2 セルの貼り付け	63
4.12	被覆空間への入口	63
4.13	円周の普遍被覆	64
4.14	道の持ち上げ	64
4.15	トーラスとクラインの壺の普遍被覆	65
4.16	グラフの普遍被覆	65
4.17	デッキ変換群への予告	66
4.18	まとめ	66
第 5 章	基本群の計算 (2) 閉曲面の基本群	68
5.1	この章で学ぶこと	68
5.2	この章の位置づけ	68
5.3	普遍被覆空間とデッキ変換群	69
5.4	2 セルを貼ると関係式が入る	70
5.5	トーラスの基本群	71
5.6	実射影平面の基本群	72
5.7	向き付け可能閉曲面の基本群	73
5.8	向き付け不可能閉曲面の基本群	74
5.9	基本群の可換化	75
5.9.1	曲面群の可換化	76
5.10	基本的な 3 次元多様体の基本群	77
5.10.1	3 次元球体と 3 次元球面	77
5.10.2	ソリッドトーラス	77
5.10.3	ハンドル体	77
5.10.4	積空間	77
5.11	実射影 3 空間の基本群	77
5.12	レンズ空間の基本群	78
5.13	不変量による識別	78
5.14	まとめ	79
第 6 章	結び目群	81
6.1	この章で学ぶこと	81
6.2	3 次元多様体の基本群として見る	81
6.3	結び目とは何か	82
6.4	なぜ補空間を見るのか	82
6.5	自明結び目の補空間	83
6.6	結び目図式	83
6.7	ヴィルティンガー表示の考え方	84
6.8	交点から関係式を読む	85

6.9	ヴィルティンガー表示の作り方	85
6.10	三葉結び目群の計算	86
6.11	三葉結び目群は非可換である	87
6.12	結び目群の可換化	87
6.13	メリディアン	88
6.14	ロンジチュード	89
6.15	ザイフェルト曲面	89
6.16	結び目群はどこまで結び目を区別するか	90
6.17	まとめ	90
第 7 章	単体的複体と多面体	93
7.1	この章で学ぶこと	93
7.2	なぜ単体的複体を考えるのか	93
7.3	単体	94
7.3.1	アフィン独立	94
7.3.2	n 単体	95
7.4	単体の面	96
7.5	単体的複体	96
7.6	単体的複体の例と非例	97
7.7	次元と骨格	98
7.8	多面体と幾何学的実現	98
7.9	抽象的単体複体	98
7.10	抽象的単体複体の幾何学的実現	100
7.11	単体写像	100
7.12	向き付き単体	101
7.13	境界の式への予告	102
7.14	単体分割とオイラー標数	102
7.15	細分	103
7.16	重心細分	104
7.17	発展：重心細分とヒーガード分解	104
7.18	まとめ	105
7.19	次章への橋渡し	106
第 8 章	単体的ホモロジー群の定義	108
8.1	この章で学ぶこと	108
8.2	ホモロジー群の考え方	108
8.3	単体と向き	109
8.4	鎖群	110
8.5	鎖群の具体例	111
8.6	境界作用素	111
8.7	境界作用素の基本例	112

8.8	境界計算の例	113
8.9	境界の境界はない	114
8.10	サイクルとバウンダリ	115
8.11	ホモロジー群の定義	116
8.12	三角形の周と三角形の内部	117
8.13	チェイン複体	118
8.14	係数について	118
8.15	例題	119
8.16	まとめ	120
	ここまでのミニ不変量表	121
第 9 章	ホモロジー群の計算 (1) 定義に基づく計算	122
9.1	この章で学ぶこと	122
9.2	ホモロジー群の計算手順	122
9.3	基底・境界行列・核・像：計算の全手順	123
9.3.1	第 0 段階：向きと基底の順序を固定する	123
9.3.2	第 1 段階：境界準同型を行列にする	124
9.3.3	第 2 段階： $D_{n-1}D_n = O$ を確認する	125
9.3.4	第 3 段階：核を整数連立一次方程式として求める	125
9.3.5	第 4 段階：像を列ベクトルの整数係数一次結合として求める	126
9.3.6	第 5 段階：核の基底の中で像を表し、商群を取る	127
9.3.7	第 6 段階： H_0 は係数の総和写像で仕上げる	128
9.4	線分のホモロジー	128
9.5	2 単体のホモロジー	129
9.6	2 単体の境界のホモロジー	129
9.7	行列による完全計算例：対角線で分割した正方形	130
9.8	3 単体のホモロジー	132
9.9	3 単体の境界のホモロジー	132
9.10	グラフのホモロジー	133
9.11	非連結な空間と H_0	134
9.12	オイラー・ポアンカレの公式	134
9.13	曲面の例	136
9.14	包含写像が誘導する準同型	137
9.15	まとめ	138
第 10 章	ホモロジー代数の基礎	140
10.1	この章で学ぶこと	140
10.2	ホモロジー代数とは何か	140
10.3	鎖複体の復習	141
10.4	完全系列	142
10.5	短完全系列とその読み方	143

10.6	鎖写像	144
10.7	誘導準同型	145
10.8	ホモロジーの関手性	146
10.9	短完全系列から長完全系列へ	147
10.10	ホモトピー不変性	148
10.11	マイヤー・ヴィートリス完全系列への予告	149
10.12	まとめ	150
第 11 章	マイヤー・ヴィートリス完全系列	152
11.1	この章で学ぶこと	152
11.2	マイヤー・ヴィートリス完全系列の考え方	152
11.3	鎖群の短完全系列	153
11.4	マイヤー・ヴィートリス完全系列	154
11.5	写像の意味	155
11.6	つなぎ準同型の構成	156
11.7	完全系列の読み方	157
11.8	例：円周 S^1	159
11.9	例：球面 S^2	160
11.10	例：高次元球面への応用	162
11.11	例：くさび和	165
11.12	ファン・カンペンの定理との違い	166
11.13	計算の型	167
11.14	よくある注意点	168
11.15	まとめ	168
第 12 章	ホモロジー群の計算 (2) 完全系列の利用	170
12.1	この章で学ぶこと	170
12.2	前章の要点	170
12.3	完全系列を用いた計算の基本手順	171
12.4	球面のホモロジーの復習	171
12.5	グラフに円板を貼る計算	172
12.6	トーラスのホモロジー	174
12.7	射影平面のホモロジー	175
12.8	クラインの壺のホモロジー	176
12.9	トーラス・射影平面・クラインの壺の比較	177
12.10	基本群の可換化と第一ホモロジー群	177
12.11	向き付け可能性と H_2	178
12.12	向き付け可能閉曲面の一般式	179
12.13	向き付け不可能閉曲面の一般式	179
12.14	結び目補空間の第一ホモロジー群	180
12.15	結び目群の可換化との対応	181

12.16	計算結果の比較	181
12.17	まとめ	181
第 13 章	ホモロジー群の応用	183
13.1	この章で学ぶこと	183
13.2	ホモロジー群の応用とは何か	183
13.3	係数体を用いたホモロジー	184
13.4	ベッチ数の例	185
13.5	オイラー標数とオイラー・ポアンカレの定理	186
13.6	オイラー・ポアンカレの定理の証明	186
13.7	例：閉曲面のオイラー標数	187
13.8	ホモロジー群による空間の識別	188
13.9	写像度	188
13.10	写像度の例	189
13.11	写像度の基本性質	190
13.12	代数学の基本定理への応用	191
13.13	写像度による応用	192
13.14	レトラクションとホモロジー	193
13.15	円板から境界球面へのレトラクションは存在しない	193
13.16	Brouwer の不動点定理	194
13.17	低次元の場合の直感	195
13.18	まとめ	196
付録：群論と線形代数の要点		198
付録：主要な空間の不変量一覧		201
付録：練習問題のヒント		202
付録：記号一覧表		204
付録：主要用語索引		205
付録：さらに学びたい読者へ		206
参考文献		207
第 II 部	模範解答編	208
はじめに		209
第 1 章	位相空間とホモトピー	210
1.1	練習問題（標準）	210

1.2	練習問題（発展）	213
第 2 章	基本群の定義	215
2.1	練習問題（標準）	215
2.2	練習問題（発展）	218
第 3 章	ファン・カンペンの定理（導入）	219
3.1	練習問題（標準）	219
3.2	練習問題（発展）	221
第 4 章	基本群の計算（1）グラフと自由群	223
4.1	練習問題（標準）	223
4.2	練習問題（発展）	225
第 5 章	基本群の計算（2）閉曲面の基本群	227
5.1	練習問題（標準）	227
5.2	練習問題（発展）	229
第 6 章	結び目群	231
6.1	練習問題（標準）	231
6.2	練習問題（発展）	233
第 7 章	単体的複体と多面体	235
7.1	小練習：単体の面	235
7.2	練習問題（標準）	236
7.3	練習問題（発展）	238
第 8 章	単体的ホモロジー群の定義	240
8.1	練習問題（標準）	240
8.2	練習問題（発展）	242
第 9 章	ホモロジー群の計算（1）定義に基づく計算	243
9.1	練習問題（標準）	243
9.2	練習問題（発展）	247
第 10 章	ホモロジー代数の基礎	249
10.1	練習問題（標準）	249
10.2	練習問題（発展）	251
第 11 章	マイヤー・ヴィートリス完全系列	252
11.1	練習問題（標準）	252
11.2	練習問題（発展）	255
第 12 章	ホモロジー群の計算（2）完全系列の利用	256

12.1	練習問題（標準）	256
12.2	練習問題（発展）	258
第 13 章	ホモロジー群の応用	260
13.1	練習問題（標準）	260
13.2	練習問題（発展）	263

第Ⅰ部

本文編

はじめに

本書は、基本群とホモロジー群の計算を中心に、位相幾何学を実際に手を動かして学ぶための入門書である。結び目群は、基本群の重要な応用例として第6章で扱うが、本書全体の主軸は、基本群からホモロジー群へ進む流れに置いている。2026年度早稲田大学「数学特論4」の講義ノートをもとに、本文、練習問題、模範解答を一冊にまとめた。前半ではホモトピーと基本群を扱い、ファン・カンペンの定理を用いて具体的な空間の基本群を計算する。後半では単体的ホモロジーの定義から出発し、完全系列やマイヤー・ヴィートリス完全系列を用いてホモロジー群を計算する。抽象的な定義の理解だけでなく、**実際に手を動かして計算できることを重視して**、各章末に練習問題を入れてある。

また、計算例では、式変形だけでなく、その背後にある幾何学的な意味をできるだけ言葉で説明する。特に、完全系列を用いる箇所では、「どの写像の核を見ているのか」「どのサイクルが境界として消えるのか」を明示し、計算の途中で読者が見失いやすい点を補足する。

本書の使い方

- 証明はすべてを厳密に展開するのではなく、計算に必要な部分を優先している。
- 「証明のスケッチ」は、証明の流れを示すための要約である。「証明の考え方（直感）」は、厳密な証明に入る前の幾何学的な見方を示す。
- 各章の終わりの練習問題は、復習や自習、レポートの準備に利用できる。
- 難易度の目安として、標準問題の前半は基本確認（★1）、標準問題の後半は計算を伴う応用（★2）、発展問題は証明や一般化を含む課題（★3）と考える。
- 群論と線形代数の基本事項（群、準同型、商群、ベクトル空間、基底、行列の階数）は適宜復習しておくといよい。
- 厳密な証明を詳しく追いたい場合は、巻末の Hatcher, Massey, 松本, 田村の文献を参照するとよい。

本文中の補足ボックスについて

本書では、学部3年生が独力で読み進められるように、本文の流れとは別に次の4種類の補足ボックスを配置している。

- 「学習の指針」（灰色）：各章の冒頭などで、その章の読み方、前提となる既習事項、初出の概念を整理する。
- 「復習」「補足」（青色）：まだ学んでいない可能性のある事項や、忘れがちな定義を、その場で使える形で短くまとめる。詳しくは巻末付録も参照するとよい。
- 「具体例」（緑色）：直前の定義や定理を、実際に手を動かして最後まで計算できる小さな例

で確かめる。

- 「直観」「注意」(灰色)：定義の背後にある幾何学的な見方や、つまづきやすい点を言葉で説明する。

これらのボックスは飛ばしても本文の論理はつながるが、初めて学ぶ読者は、定義や定理を読んだ直後に対応するボックスで手を動かして確認することを勧める。

第 1 章

位相空間とホモトピー

1.1 この章で学ぶこと

この章では、位相幾何学の基本となる言葉を整理する。特に、位相空間、同相、ホモトピー、ホモトピー同値、レトラクション、変形レトラクションを学ぶ。

今後扱う基本群やホモロジー群は、空間そのものではなく、空間のホモトピー型に依存する代数的不変量である。そのため、第 1 章では「どのような変形を許すのか」を正確に理解することが重要である。

- 位相空間、開集合、連続写像の定義を理解する。
- 同相写像と同相の意味を理解する。
- ホモトピーを、写像の連続的変形として理解する。
- ホモトピー同値の意味を理解し、同相より弱い概念であることを知る。
- レトラクションと変形レトラクションの違いを区別できるようにする。
- 変形レトラクションを用いて、複雑な空間をより単純な空間に置き換える考え方を身につける。

学習の指針

この章の前提は、集合と位相の基礎（位相空間・開集合・連続写像・コンパクト・連結・商位相の初歩）である。群論はこの章ではほとんど使わないが、第 2 章以降で必要になる。初出の概念は、ホモトピー、可縮、ホモトピー同値、レトラクション、変形レトラクションの 5 つで、いずれも今後すべての章で使う。読み方のコツは、定義を読んだら必ず具体的な空間で $H(x, t)$ などの式を自分の手で書き下してみることである。特に「レトラクション」と「変形レトラクション」の違い（ホモトピー H の有無）は、練習問題で確実に区別できるようにしておこう。

1.2 本書で扱う位相幾何学の考え方

位相幾何学では、図形を伸ばしたり曲げたりしても変わらない性質を調べる。ただし、切ったり貼ったりすることは許さない。

たとえば、円周と正方形の境界は、連続的に変形して互いに移り合う。したがって、位相幾何学ではこれらを同じ形とみなす。

一方、円周と円板は同じではない。円板には内部があるが、円周には内部がない。また、円周には中

心に穴があるように見えるが、円板ではその穴は内部で埋まっている。

このような違いを厳密に扱うために、まず位相空間と連続写像を定義する。

1.3 位相空間

定義 1.1 (位相空間). 集合 X とその部分集合族 $\mathcal{T} \subset 2^X$ が、次を満たすとする。

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ 。
2. $\mathcal{T}$ の任意個の和集合は $\mathcal{T}$ に属する。
3. $\mathcal{T}$ の有限個の共通部分は $\mathcal{T}$ に属する。

このとき、 $\mathcal{T}$ を X 上の位相といい、組 $(X, \mathcal{T})$ を位相空間という。 $\mathcal{T}$ に属する集合を開集合という。

距離空間に慣れている場合、位相は開集合の概念だけを取り出したものと考えとよい。

たとえば、 $\mathbb{R}^n$ の通常の開集合全体は位相をなす。この位相を通常位相という。

距離空間から位相を作る

距離空間 (X, d) では、点 $x \in X$ と正の数 $\varepsilon > 0$ に対して

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

を開球という。部分集合 $U \subset X$ が開であるとは、任意の $x \in U$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset U$ となることをいう。このようにして得られる開集合全体は位相をなす。

たとえば、実数直線では通常距離 $d(x, y) = |x - y|$ から通常位相が得られる。平面 $\mathbb{R}^2$ では、点のまわりの小さな円板を基本的な開集合として考えることで、通常位相が得られる。つまり、位相空間は距離空間の「開集合だけを残した一般化」である。

位相空間の例

1. 実数直線 $\mathbb{R}$ は、通常の開区間から作られる開集合全体により位相空間になる。
2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は、通常の開球から作られる開集合全体により位相空間になる。
3. 円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は、 $\mathbb{R}^2$ の部分空間として位相空間になる。
4. 区間 $[0, 1]$ も、 $\mathbb{R}$ の部分空間として位相空間になる。

1.4 部分空間

位相空間の部分集合にも自然に位相が入る。

定義 1.2 (部分空間の位相). 位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ に対し、 $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \text{ は } X \text{ の開集合}\}$ によって定まる位相を、 A の部分空間位相という。この位相を入れた A を X の部分空間という。

例えば、円周 S^1 は $\mathbb{R}^2$ の部分集合であり、 $\mathbb{R}^2$ から部分空間位相を受け継ぐ。したがって、 S^1 上

の開集合とは、 $\mathbb{R}^2$ の開集合と S^1 の共通部分として表される集合である。

部分空間として見ることの意味

位相幾何では、円周や球面を単独の集合としてではなく、 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ のように、ユークリッド空間の部分空間として考えることが多い。このとき、開集合や連続性は、周囲のユークリッド空間の位相から自然に決まる。

1.5 連続写像

定義 1.3 (連続写像). 位相空間 X, Y の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ が**連続**であるとは、 Y の任意の開集合 U に対して、逆像 $f^{-1}(U)$ が X で開であることをいう。

距離空間で学んだ連続性は、「近い点は近い点に写る」という直感で理解される。位相空間では、この性質を開集合の逆像によって表す。

なぜ逆像で定義するのか

連続性を開集合の逆像で定義する理由は、位相空間では距離が与えられていないことがあるからである。距離がなければ「近い点」という言葉を直接使えない。そこで、「開集合に入る程度に十分近い」という情報だけを用いる。

写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるとは、 Y の中で開いている領域 U を見ると、その中に写る点全体 $f^{-1}(U)$ が X の中でも開いている、ということである。これは、 Y 側で小さな観測窓を用意したとき、その条件を満たす X 側の点たちも自然な開集合として現れる、という意味である。

連続写像の例

1. 多項式関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続である。
2. 写像 $f: [0, 1] \rightarrow S^1$, $f(t) = e^{2\pi it}$ は連続である。これは区間を円周に巻き付ける写像である。
3. 包含写像 $i: A \hookrightarrow X$ は連続である。

復習：商位相と商空間

位相空間 X 上の同値関係 $\sim$ に対し、同値類全体の集合 $X/\sim$ と自然な全射 $p: X \rightarrow X/\sim$ を考える。 $X/\sim$ の部分集合 U を「 $p^{-1}(U)$ が X で開のとき開」と定めると位相が得られる。これを**商位相**といい、この位相を入れた $X/\sim$ を**商空間**という。群論で G の元を N の違いを無視して商群 G/N を作ったのと同じ「同一視して割る」構成の位相版である（商群については巻末付録参照）。

ミニ例として、区間 $[0, 1]$ の両端 0 と 1 だけを同一視した商空間 $[0, 1]/(0 \sim 1)$ は円周 S^1 と同相である。実際、 $f(t) = e^{2\pi it}$ は $f(0) = f(1)$ を満たすので、連続な全単射 $\bar{f}: [0, 1]/(0 \sim 1) \rightarrow S^1$ を誘導する。 $[0, 1]/(0 \sim 1)$ はコンパクト空間 $[0, 1]$ の連続像なのでコンパクトであり、 S^1 はハウスドルフなので、 $\bar{f}$ は同相写像である。商空間は今後、トーラスや射影平面など多くの空

間の構成で繰り返し使う。

1.6 同相

位相幾何では、連続的に変形して区別できない空間を同じものとみなす。その最も強い同一視が同相である。

定義 1.4 (同相写像). 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射で、逆写像 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ も連続であるとき、 f を**同相写像**という。このとき、 X と Y は**同相**であるといい、 $X \approx Y$ と書く。

同相とは、位相的に完全に同じ形であることを意味する。同相な空間は、開集合の構造が完全に一致している。

直観：逆写像の連続性はなぜ必要か

「連続な全単射」だけでは同相にならないことに注意する。たとえば $f: [0, 1) \rightarrow S^1$, $f(t) = e^{2\pi it}$ は連続な全単射だが、逆写像は点 $(1, 0) \in S^1$ で連続でない。実際、 $(1, 0)$ のすぐ近くには、 t が 0 に近い点と 1 に近い点の両方が写ってくるので、逆写像はこの点で値が飛んでしまう。 $([0, 1)$ はコンパクトでなく S^1 はコンパクトなので、そもそも両者は同相ではない。) したがって、同相を示すときは、逆写像を具体的に書いてその連続性まで確かめる必要がある。

同相の例

1. 开区間 $(0, 1)$ と実数直線 $\mathbb{R}$ は同相である。例えば $x \mapsto \tan \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$ により同相写像が得られる。
2. 円周 S^1 と正方形の境界は同相である。どちらも 1 周する閉じた曲線であり、角の有無は位相的には本質的でない。
3. 開円板 $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$ と $\mathbb{R}^2$ は同相である。例えば $f(x) = \frac{x}{1-\|x\|}$ により B^2 から $\mathbb{R}^2$ への同相写像が得られる。逆写像は $g(y) = \frac{y}{1+\|y\|}$ である。

同相でない例

1. 円周 S^1 と円板 D^2 は同相ではない。円板には内部があるが、円周には内部がない。
2. 閉区間 $[0, 1]$ と円周 S^1 は同相ではない。閉区間には端点があるが、円周には端点がない。
3. 1 点と円周 S^1 は同相ではない。点の個数が異なる。

直観：同相でないことの示し方

2 つの空間が同相であることは、同相写像を 1 つ作れば示せる。一方、同相でないことを示すには、「どんな写像を試してもだめ」を言う必要があり、写像を探すだけでは終わらない。基本的な方法は、同相で保たれる性質（次節の位相的不変量）を 1 つ見つけて、両方で値が異なることを確かめることである。たとえば、 $[0, 1]$ と $\mathbb{R}$ はコンパクト性が異なるので同相ではない。また、 $[0, 1]$ から内点 $1/2$ を除くと非連結になるが、 S^1 はどの 1 点を除いても連結のままなの

で、 $[0, 1]$ と S^1 は同相ではない。円周と円板のように、どちらも連結かつコンパクトな空間を区別するには、より強力な不変量（基本群・ホモロジー群）が必要になる。これが本書の主題である。

1.7 位相的不変量

同相な空間で変わらない性質を**位相的不変量**という。

例えば、次のような性質は位相的不変量である。

- 連結成分の個数。
- コンパクト性。
- 基本群。
- ホモロジー群。
- オイラー標数。

復習：コンパクト性と連結性

位相空間 X が**コンパクト**であるとは、任意の開被覆が有限部分被覆を持つことをいう。 $\mathbb{R}^n$ の部分空間では、コンパクトであることと有界閉集合であることは同値である（ハイネ・ボレルの定理）。たとえば $[0, 1]$ と S^1 はコンパクトだが、 $\mathbb{R}$ や $(0, 1)$ はコンパクトでない。また、 X が**連結**であるとは、空でない 2 つの開集合の非交和に分割できないことをいう。コンパクト性・連結性はいずれも連続な全射で保たれるので、同相写像で保たれる位相的不変量である。ミニ例： $(0, 1) \approx \mathbb{R}$ は前節の通り正しいが、 $[0, 1] \approx \mathbb{R}$ はコンパクト性が異なるので成り立たない。

本書では、後で基本群とホモロジー群を定義する。これらは、空間の穴を代数的に記録する位相的不変量である。

不変量の使い方

2 つの空間の不変量が異なれば、それらは同相ではない。例えば、基本群やホモロジー群が異なる空間は同相ではない。

一方、不変量が同じでも、同相であるとは限らない。不変量は空間を区別するための道具であるが、万能ではない。

1.8 ホモトピー

同相よりも柔らかい同一視として、ホモトピーを導入する。

定義 1.5 (ホモトピー). 連続写像 $f, g : X \rightarrow Y$ に対し、連続写像 $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ で $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ を満たすものが存在するとき、 f と g は**ホモトピック**であるといい、 $f \simeq g$ と書く。この H を f から g への**ホモトピー**という。

変数 $t \in [0, 1]$ を時間と考えると、 $H(x, t)$ は、写像 f を時間 t によって連続的に変形している様子

を表す。

$t = 0$ では f であり, $t = 1$ では g である。

具体例：直線ホモトピー

X を任意の位相空間とし, 2 つの連続写像 $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ を考える。

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

とおくと, H は連続で, $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ を満たす。したがって $\mathbb{R}^n$ への連続写像は, どの 2 つもホモトピックである。時刻 t を止めるごとに, 各点 $f(x)$ が $g(x)$ へ向かう線分上を割合 t だけ進んだ位置にいる, と読めばよい。行き先が凸集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ の場合も, 線分が C からはみ出さないのと同じ式が使える。ただし行き先に穴があると (たとえば $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$), 線分が穴を通ることがあり, この式はそのままでは使えない。

円板上の恒等写像と定値写像

円板 $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ を考える。恒等写像 $\text{id}_{D^2} : D^2 \rightarrow D^2$ は, 中心への定値写像 $c(x) = 0$ にホモトピックである。

実際, $H(x, t) = (1 - t)x$ とおけば, $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = 0$ である。したがって $\text{id}_{D^2} \simeq c$ 。

1.9 可縮空間

定義 1.6 (可縮). 位相空間 X が 1 点空間とホモトピー同値であるとき, X は**可縮**であるという。同値に, 恒等写像 $\text{id}_X : X \rightarrow X$ が定値写像にホモトピックであるとき, X は可縮である。

可縮な空間は, ホモトピーの観点からは 1 点と同じである。

直観：可縮の二つの言い換え

「ホモトピー同値」の正式な定義は次節で与えるので, この章の前半では, 後半の言い換え「 id_X が定値写像にホモトピック」の方を定義と思って読んでよい。二つが同値であることは, 次節の定義を知ってから次のように確かめられる。1 点空間を $\{*\}$ とし, $f : X \rightarrow \{*\}$ を唯一の写像, $g : \{*\} \rightarrow X$ を $g(*) = x_0$ とする。このとき $f \circ g = \text{id}_{\{*\}}$ は常に成り立ち, $g \circ f$ は定値写像 $x \mapsto x_0$ である。したがって「 $X \simeq \{*\}$ 」の条件は, ちょうど「 id_X が定値写像にホモトピック」に帰着する。

可縮な空間

1. 区間 $[0, 1]$ は可縮である。
2. 円板 D^2 は可縮である。
3. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は可縮である。
4. 一般に, 凸集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ は可縮である。

凸集合 C が可縮であることは, 次のホモトピーで分かる。点 $x_0 \in C$ を固定し, $H(x, t) =$

$(1-t)x + tx_0$ とおく。凸性により、この点は常に C に属する。したがって C は x_0 に縮む。

直観：可縮でない空間もある

円周 S^1 は可縮ではない。直観的には、円周を自分自身の中で 1 点に縮めようとする、どこかで円周を切らなければならないからである。ただし、この「縮められない」ことを定義から直接示すのは難しい。どんなホモトピーを試してもうまくいかない、ということ言う必要があるからである。これを厳密に証明する道具が第 2 章の基本群であり、 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ が 1 点の基本群（自明な群）と異なることから可縮でないことが従う。「可縮＝穴がない」という直観を持っておくと、以後の計算の見通しがよくなる。

1.10 ホモトピー同値

定義 1.7 (ホモトピー同値). 連続写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ が存在して $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ となるとき、 X と Y は**ホモトピー同値**であるという。このとき $X \simeq Y$ と書く。

具体例：定義の条件を確かめる（円柱と円周）

円柱 $X = S^1 \times [0, 1]$ と円周 $Y = S^1$ がホモトピー同値であることを、定義の条件を全部確かめて示そう。

$$f: X \rightarrow Y, f(z, s) = z, \quad g: Y \rightarrow X, g(z) = (z, 0)$$

とおく。まず $f \circ g(z) = f(z, 0) = z$ なので、 $f \circ g = \text{id}_Y$ である（ホモトピックどころか一致している）。次に $g \circ f(z, s) = (z, 0)$ であり、これは id_X と一致しないが、

$$H((z, s), t) = (z, (1-t)s)$$

とおくと H は連続で、 $H((z, s), 0) = (z, s)$, $H((z, s), 1) = (z, 0)$ となるので、 $\text{id}_X \simeq g \circ f$ である。よって $S^1 \times [0, 1] \simeq S^1$ が定義通りに確かめられた。このように、 $g \circ f$ と $f \circ g$ は恒等写像に「一致」しなくてよく、「ホモトピック」でありさえすればよい、というのがホモトピー同値の要点である。

同相ならばホモトピー同値である。実際、同相写像 $f: X \rightarrow Y$ があれば、逆写像 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ を取り、 $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$, $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ となる。

しかし、ホモトピー同値であっても同相とは限らない。

ホモトピー同値だが同相ではない例

円板 D^2 は一点空間 $\{*\}$ とホモトピー同値である。これは、円板の各点を中心に向かってまっすぐ縮めることができるからである。たとえば中心を $0 \in D^2$ とすれば、

$$H(x, t) = (1-t)x$$

により、恒等写像 id_{D^2} は定値写像へホモトピックである。したがって、円板はホモトピー論の立場では一点と同じ情報しか持たない。

一方、 D^2 は一点空間と同相ではない。同相であるためには、点の個数や近傍の構造が完全に対応しなければならない。円板には無限個の点があり、内部点と境界点も区別されるが、一点空間にはそのような構造はない。

この例は、同相とホモトピー同値の違いを示している。同相は「形をそのまま保つ」同一視であり、ホモトピー同値は「穴だけを保つ」より粗い同一視である。

同相とホモトピー同値

同相は、空間の形を完全に保つ強い同一視である。ホモトピー同値は、空間を縮めたり膨らませたりすることを許す、より弱い同一視である。

同相 $\implies$ ホモトピー同値

しかし、一般には逆は成り立たない。

直観：記号 $\simeq$ の二つの使い方

記号 $\simeq$ は、本書では二通りの意味で使われることに注意する。

- 写像に対して： $f \simeq g$ は「写像 f と g がホモトピック」。
- 空間に対して： $X \simeq Y$ は「空間 X と Y がホモトピー同値」。

両辺が写像か空間かで意味を読み分ければ混乱しない。また、同相は $X \approx Y$ と別の記号で書く。 $X \approx Y$ ならば $X \simeq Y$ だが、逆は成り立たない。たとえば前のボックスの円柱と円周はホモトピー同値だが、円周はどの 2 点を除いても非連結になるのに対し、円柱はどの 2 点を除いても連結のままなので、同相ではない。

1.11 レトラクション

次に、空間をその部分空間へ押し戻す写像を定義する。

定義 1.8 (レトラクション). 部分空間 $A \subset X$ に対して、連続写像 $r: X \rightarrow A$ が $r|_A = \text{id}_A$ を満たすとき、 r を X から A へのレトラクションという。このとき、 A を X のレトラクトという。

条件 $r|_A = \text{id}_A$ は、 A 上の点は動かさないことを意味する。

圏論から見るレトラクト

包含写像を

$$i: A \hookrightarrow X$$

と書くと、レトラクションの条件は

$$r \circ i = \text{id}_A$$

と表せる。これは、 A から X へ入れてから再び A に戻すと、 A 上では何も変わらない、という意味である。

圏論の言葉では、このような A を X のレトラクトという。さらに変形レトラクトの場合には、

$i \circ r$ が X 上の恒等写像とホモトピックになるため、 A と X はホモトピーの立場では同じ対象として扱える。

レトラクションの例

円板 D^2 から中心点 $\{0\}$ への写像 $r: D^2 \rightarrow \{0\}$, $r(x) = 0$ はレトラクションである。中心点上では恒等写像になっているからである。

1.12 変形レトラクション

レトラクションに加えて、空間全体を連続的に部分空間へ縮めるホモトピーがある場合、変形レトラクションという。

定義 1.9 (変形レトラクション). 部分空間 $A \subset X$ に対して、レトラクション $r: X \rightarrow A$ があり、さらに連続写像 $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ が存在して、任意の $x \in X$, $a \in A$, $t \in [0, 1]$ に対して $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = r(x)$, $H(a, t) = a$ が成り立つとき、 A は X の**変形レトラクト**であるという。

最後の条件 $H(a, t) = a$ は、変形の間ずっと A 上の点を固定していることを意味する。

レトラクションと変形レトラクションの違い

レトラクションは、単に X から A へ連続的に押し戻す写像である。変形レトラクションは、さらに X 全体を A へ連続的に変形する過程を持つ。
したがって、変形レトラクションはレトラクションより強い条件である。

具体例：レトラクトだが変形レトラクトでない例

円周 S^1 の 1 点 $A = \{p\}$ (たとえば $p = (1, 0)$) を考える。定値写像 $r: S^1 \rightarrow A$, $r(x) = p$ は連続で $r(p) = p$ を満たすので、 A は S^1 のレトラクトである。同様に、任意の空間の任意の 1 点は必ずレトラクトになる。

一方、 A は S^1 の変形レトラクトではない。もし変形レトラクトなら、後述のように $S^1 \simeq \{p\}$, すなわち S^1 が可縮になるが、前節で述べたように S^1 は可縮ではないからである (厳密な証明は第 2 章の $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ による)。つまり、レトラクション r の存在だけでは、空間全体を A へ「連続的に変形する過程」 H の存在までは保証されない。

1.13 変形レトラクションの例

区間から一点へ

区間 $[0, 1]$ は、点 $\{0\}$ に変形レトラクトする。レトラクションを $r(x) = 0$ とし、ホモトピーを $H(x, t) = (1 - t)x$ で定めればよい。このとき $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = 0$, かつ $H(0, t) = 0$ である。

円柱から円周へ

円柱 $S^1 \times [0, 1]$ は、底面の円周 $S^1 \times \{0\}$ に変形レトラクトする。レトラクションを $r(z, s) = (z, 0)$ とし、ホモトピーを $H((z, s), t) = (z, (1-t)s)$ で定める。

このとき $H((z, s), 0) = (z, s)$, $H((z, s), 1) = (z, 0)$, かつ $H((z, 0), t) = (z, 0)$ である。

したがって $S^1 \times [0, 1] \simeq S^1$ 。

穴のあいた平面から円周へ

穴のあいた平面 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は、単位円周 S^1 に変形レトラクトする。

レトラクションを $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ で定める。ホモトピーを $H(x, t) = \left((1-t) + \frac{t}{\|x\|}\right)x$ で定める。

$t = 0$ では $H(x, 0) = x$ であり, $t = 1$ では $H(x, 1) = \frac{x}{\|x\|}$ である。さらに, $x \in S^1$ なら $\|x\| = 1$ なので $H(x, t) = x$ である。

したがって $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は S^1 に変形レトラクトする。

直観：変形レトラクションの検算のしかた

変形レトラクションの式を書いたら、次の 4 点を機械的に確かめるとよい。

- $H(x, 0) = x$ (出発は恒等写像)。
- $H(x, 1) = r(x) \in A$ (到着はレトラクション)。
- $H(a, t) = a$ (A 上の点は変形中ずっと動かない)。
- $H(x, t)$ が常に X に属する (途中で空間からはみ出さない)。

最後の条件は見落としやすい。上の例では, $H(x, t) = \lambda(x, t)x$, $\lambda(x, t) = (1-t) + \frac{t}{\|x\|}$ と書けるが, $t < 1$ なら $1-t > 0$, $t = 1$ なら $\lambda = \frac{1}{\|x\|} > 0$ なので, つねに $\lambda(x, t) > 0$ である。したがって $H(x, t) \neq 0$, すなわち変形の途中で穴 (原点) を通らないことが確かめられる。

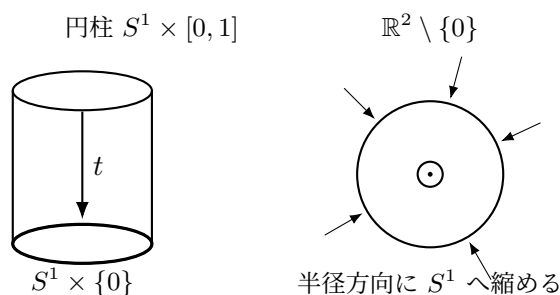


図 1.1 変形レトラクションの模式図。変形の途中で、縮め先の部分空間上の点は固定される。

穴のあいた平面

穴のあいた平面は、半径方向に縮めることで円周に変形レトラクトする。この事実により、後で $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ が分かる。

1.14 レトラクトではない例

円板 D^2 の境界 $S^1 = \partial D^2$ は、直感的には円板の中に含まれている。しかし、 S^1 は D^2 のレトラクトではない。

つまり、連続写像 $r : D^2 \rightarrow S^1$ で $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ を満たすものは存在しない。

この事実は後で、基本群やホモロジー群を用いて証明する。直感的には、円板全体を境界円周へ連続的に押し戻し、しかも境界円周上の点を固定することはできない。

後で証明する重要事実

もし D^2 から S^1 へのレトラクションが存在すれば、 S^1 の本質的なループが D^2 の中にも残ることになる。しかし、 D^2 の中ではすべてのループが縮められる。この矛盾を、第2章以降の基本群、または後半のホモロジー群で厳密に証明する。

1.15 ホモトピー同値と不変量

今後定義する基本群やホモロジー群は、ホモトピー同値な空間では同じになる。

つまり、 $X \simeq Y$ ならば、 $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ であり、また $H_n(X) \cong H_n(Y)$ が成り立つ。

したがって、変形レトラクトを見つけることは、基本群やホモロジー群を計算するうえで重要である。

計算の見通し

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ は S^1 に変形レトラクトする。したがって、基本群やホモロジー群を計算するときには、穴のあいた平面の代わりに円周を考えればよい。

後で $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ を示すので、 $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ が分かる。

1.16 同相，ホモトピー同値，変形レトラクトの関係

ここまでで、空間を比べるための概念がいくつか出てきた。それらの関係を整理する。

概念	意味
同相	空間として完全に同じ形である。連続な全単射で逆も連続。
ホモトピー同値	互いに連続写像があり、合成が恒等写像にホモトピック。空間を縮めたり膨らませたりすることを許す。
レトラクション	空間 X から部分空間 A へ押し戻す写像で、 A 上では恒等写像。
変形レトラクション	X 全体を A へ連続的に縮め、その間 A 上の点を固定する。

関係としては、次のように考えられる。

同相 $\implies$ ホモトピー同値

また、 A が X の変形レトラクトなら、 $A \simeq X$ である。

直観：変形レトラクトからホモトピー同値が出る理由

A が X の変形レトラクトのとき、 $A \simeq X$ となることは、定義から直接確かめられる。包含写像 $i: A \hookrightarrow X$ とレトラクション $r: X \rightarrow A$ の組が、ホモトピー同値の定義の f, g の役割を果たす。実際、 $r|_A = \text{id}_A$ より $r \circ i = \text{id}_A$ であり（ホモトピックどころか一致）、変形レトラクションのホモトピー $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ が $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = r(x) = (i \circ r)(x)$ を満たすので、 $\text{id}_X \simeq i \circ r$ である。円柱と円周の例で確かめた計算は、まさにこの一般論の特別な場合になっている。

ただし、ホモトピー同値であっても同相とは限らない。また、レトラクトであっても変形レトラクトとは限らない。

1.17 まとめ

この章では、位相幾何学で用いる基本的な言葉を整理した。

- 位相空間は、開集合を指定した集合である。
- 連続写像は、開集合の逆像が開集合になる写像である。
- 同相な空間は、位相的に同じ空間である。
- ホモトピーは、写像の連続的な変形である。
- ホモトピー同値な空間は、基本群やホモロジー群などの代数的不変量を共有する。
- レトラクションは、空間を部分空間へ押し戻す写像である。
- 変形レトラクションは、空間全体を部分空間へ連続的に縮める操作である。

以後の章では、空間をそのまま扱うのではなく、ホモトピー同値な簡単な空間に置き換えてから、基本群やホモロジー群を計算することが多くなる。そのため、変形レトラクトを見つけることが重要な技術になる。

練習問題（標準）

1. 区間 $[2, 5]$ が一点 $\{3\}$ とホモトピー同値であることを、具体的なホモトピーを用いて示せ。
2. 帯状領域

$$B = \mathbb{R} \times [0, 1]$$

が中央の直線

$$\mathbb{R} \times \{1/2\}$$

に変形レトラクトすることを、具体的な式で表せ。

3. 开区間 $(-1, 1)$ と $\mathbb{R}$ が同相であることを示せ。例えば、 $\tan(\pi x/2)$ を用いてよい。
4. 閉円板から中心を除いた空間

$$D^2 \setminus \{0\}$$

は、どのような空間と同じホモトピー型を持つか説明せよ。

5. 任意の n に対して, $\mathbb{R}^n$ が可縮であることを, ホモトピー

$$H(x, t) = (1 - t)x$$

を用いて説明せよ。

6. 連続写像 $r: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ で $r(0) = 0$, $r(1) = 1$ を満たすものが存在しない理由を説明せよ。これを用いて, $\{0, 1\}$ が $[0, 1]$ のレトラクトでないことを示せ。
7. 空間 X が部分空間 A に変形レトラクトし, さらに A が部分空間 B に変形レトラクトするとする。このとき, X と B がホモトピー同値であることを説明せよ。
8. 円環領域

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq \|x\| \leq 5\}$$

のホモトピー型を答えよ。

9. 円周 S^1 と開円環

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|x\| < 2\}$$

は同相ではないが, ホモトピー同値である。この違いを自分の言葉で説明せよ。

10. 変形レトラクトを用いて空間を簡単にしても, どのような位相的情報は保たれると考えられるか説明せよ。

練習問題 (発展)

1. 平面から互いに交わらない 2 つの閉円板の内部を取り除いた空間は, どのような 1 次元複体に変形レトラクトすると考えられるか説明せよ。
2. 2 つの円周を 1 点で貼り合わせた空間 $S^1 \vee S^1$ は一点に可縮でない。その理由を, ループが残るという観点から説明せよ。
3. 球面 S^2 から 2 点を除いた空間のホモトピー型を考えよ。どの空間に変形レトラクトすると予想されるか述べよ。
4. 変形レトラクトは同相より弱い概念である。このことを示す例を, 自分で 1 つ挙げて説明せよ。

第 2 章

基本群の定義

2.1 この章で学ぶこと

この章では、基本群の定義を学ぶ。基本群は、空間の中のループをホモトピーによって分類し、それらを群として扱うことで、空間の穴の情報を取り出す不変量である。

- 道とループの定義を理解する。
- 道の積と逆向きの道を定義する。
- ループを基点固定ホモトピーで同一視する理由を理解する。
- ループのホモトピー類全体が群になることを理解する。
- 基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の定義を理解する。
- 連続写像が基本群の準同型を誘導することを理解する。
- 基本群がホモトピー不変量であることを理解する。
- 円周の基本群が $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である理由を理解する。

学習の指針

この章の前提は、第 1 章のホモトピーとホモトピー同値、および既習の群論 (群・準同型・同型) である。初出の概念は、道・ループ・基点固定ホモトピー・基本群・誘導準同型、そして円周の計算で使う被覆写像と持ち上げである。読むときは、ホモトピー $H(s, t)$ の 2 つの変数のうち s がループ上の位置、 t が変形の時間を表すことを常に意識するとよい。本章の山場は円周の基本群 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の計算である。そこで使う「持ち上げ」の考え方は、第 4 章の被覆空間論で体系的に扱うので、ここでは直観をつかめば十分である。

2.2 基本群とは何を測るものか

位相空間の中には、ループを連続的に縮められる場合と、縮められない場合がある。

例えば、円板 D^2 の中のループは、円板の中で連続的に 1 点へ縮めることができる。一方、穴のあった平面 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で原点のまわりを一周するループは、原点を避けたままでは 1 点へ縮めることができない。

この違いを代数的に記録するのが基本群である。

基本群では、次の手順で空間を調べる。

基点を決める → 基点から出て基点に戻るループを考える → ホモトピーで同じループを同一視する → ループの

この群が $\pi_1(X, x_0)$ である。

直感

基本群は、空間の中のループがどのように巻き付いているかを記録する。円周では、ループが何回まわるかが整数で記録されるため、 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ となる。

2.3 道

まず、道を定義する。

定義 2.1 (道). 位相空間 X における**道**とは、連続写像 $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ のことである。

$\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$ のとき、 α は x から y への道であるという。

区間 $[0, 1]$ の点 t は時間を表していると考えよう。 $t = 0$ で出発し、 $t = 1$ で到着する。

道の例

1. $\mathbb{R}^2$ において、点 p, q を結ぶ線分 $\alpha(t) = (1-t)p + tq$ は、 p から q への道である。
2. 円周 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上で $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ と定めると、これは 1 から出発して円周を 1 周し、ふたたび 1 に戻る道である。

2.4 ループと基点

基本群を定義するためには、基点を固定する。

定義 2.2 (基点). 位相空間 X の点 $x_0 \in X$ を 1 つ固定するとき、 x_0 を**基点**という。

定義 2.3 (ループ). 基点 $x_0 \in X$ を固定する。道 $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ が $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ を満たすとき、 α を x_0 を基点とする**ループ**という。

つまり、ループとは、基点から出発して、空間の中を動き、最後に同じ基点に戻る道である。

ループを基点つきで考える理由

基本群では、ループの出発点と到着点を同じ基点に固定する。これにより、二つのループを「続けて進む」ことができる。もし終点と始点が合わなければ、道の積を定義できない。

基点は計算上の足場である。弧状連結な空間では、基点を変えても基本群は同型になるが、その同型は基点を結ぶ道の選び方に依存する。そのため、定義では基点を明示しておく。

定値ループ

基点 x_0 に対して,

$$c_{x_0}(t) = x_0 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

で定まるループを**定値ループ**という。これは、時刻が変わっても常に基点にとどまる、まったく動かないループである。

定値ループは、基本群における単位元になる。実際、任意のループ α の前後に定値ループをつないでも、ループのたどる本質的な道筋は変わらない。式で書けば,

$$[c_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha], \quad [\alpha] * [c_{x_0}] = [\alpha]$$

である。したがって、数の足し算における 0, 掛け算における 1 に対応する役割を、定値ループが果たす。

2.5 道の積

同じ基点をもつ 2 つのループは、続けて進むことで新しいループを作ることができる。

道の積の直感

積 $\alpha * \beta$ は、前半の時間で α をたどり、後半の時間で β をたどるループである。式の中で $2t$ や $2t - 1$ が出てくるのは、区間 $[0, 1]$ の前半を α 全体に、後半を β 全体に割り当てるためである。

この操作は数の掛け算のように交換可能とは限らない。空間によっては、 α の後に β を進むループと、 β の後に α を進むループが異なるホモトピー類を与える。基本群が一般には非可換になる理由はここにある。

定義 2.4 (道の積). x_0 を基点とする 2 つのループ α, β に対し,

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \beta(2t - 1) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

で定まるループを**道の積**という。

これは、まず α をたどり、その後 β をたどるループである。

$\alpha * \beta$ は、前半の時間で α を 2 倍速で進み、後半の時間で β を 2 倍速で進む。

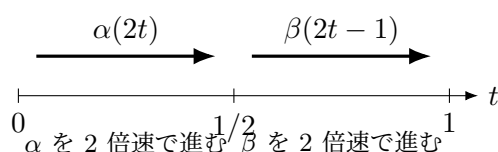


図 2.1 道の積 $\alpha * \beta$ のパラメータ。前半で α , 後半で β をたどる。

積の順序

本書では $\alpha * \beta$ を「まず α 、次に β 」と定める。基本群の計算では、積の順序が重要になるので、この規約を常に意識する。

直観: 結合律はそのままでは成り立たない

3つのループ α, β, γ に対して、定義どおりに書き下すと

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{4}\right), \\ \beta(4t - 1) & \left(\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \gamma(2t - 1) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right), \end{cases} \quad (\alpha * (\beta * \gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right), \\ \beta(4t - 2) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}\right), \\ \gamma(4t - 3) & \left(\frac{3}{4} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

となる。どちらも α, β, γ の順にたどるが、時間配分が異なるため、写像としては等しくない。しかし、時間配分をずらす再パラメータ化によって両者は基点固定ホモトピックになる。つまり、結合律は写像の等式としてではなく、ホモトピー類の等式として成り立つ。基本群をループそのものではなくホモトピー類で定義する理由の一つがここにある。

2.6 逆向きの道

道は逆向きにたどることもできる。

定義 2.5 (逆向きの道). 道 $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ に対して、 $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ で定まる道を α の**逆向きの道**という。

もし α が x から y への道なら、 $\bar{\alpha}$ は y から x への道である。

特に、 α が x_0 を基点とするループなら、 $\bar{\alpha}$ も x_0 を基点とするループである。

逆向きのループ

円周上のループ $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ は正の向きに 1 周する。その逆向きのループは $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t) = e^{2\pi i(1-t)}$ であり、これは逆向きに 1 周するループである。

2.7 ループのホモトピー

基本群では、ループをそのまま区別するのではなく、連続的に変形できるループを同じものとみなす。

定義 2.6 (基点固定ホモトピー). x_0 を基点とするループ α, β に対し、連続写像 $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ で $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$, $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ を満たすものがあるとき、 α と β は**基点を固定してホモトピック**であるという。

ここで、 s はループ上のパラメータ、 t は変形の時間を表す。

条件 $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ は、変形の間ずっと始点と終点が基点 x_0 に固定されていることを意味する。

なぜ基点を固定するのか

基本群では、基点を固定したループを考える。したがって、ループを変形するときにも、始点と終点は常に基点にとどまる必要がある。

基点を固定しないホモトピーを許すと、群演算との相性が悪くなる。

具体例: 基点固定ホモトピーを式で書く

$\mathbb{R}^2$ のように凸な空間では、基点固定ホモトピーを具体的に書き下せる。 x_0 を基点とする $\mathbb{R}^2$ のループ α に対し、

$$H(s, t) = (1 - t)\alpha(s) + tx_0$$

と定める。 $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = x_0$ であり, $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ より

$$H(0, t) = (1 - t)x_0 + tx_0 = x_0, \quad H(1, t) = x_0$$

となる。したがって、これは α と定値ループ c_{x_0} を結ぶ基点固定ホモトピーである。各時刻 t において、ループ上の各点が基点へ向かう線分上を割合 t だけ進んでいる、と読める。

2.8 ホモトピー類

基点固定ホモトピーで同じとみなしたループの同値類を考える。

復習: 同値関係と同値類

集合 S 上の関係 $\sim$ が同値関係であるとは、反射律 ($a \sim a$), 対称律 ($a \sim b$ ならば $b \sim a$), 推移律 ($a \sim b$ かつ $b \sim c$ ならば $a \sim c$) を満たすことをいう。このとき a と同値な元全体を同値類 $[a]$ という。基点固定ホモトピー $\simeq$ は同値関係である。実際, $H(s, t) = \alpha(s)$ により $\alpha \simeq \alpha$ であり, α から β へのホモトピー H があれば $H(s, 1 - t)$ は β から α へのホモトピーである。推移律は, $\alpha \simeq \beta$ のホモトピーを前半の時間 $0 \leq t \leq 1/2$ に 2 倍速で行い, 続けて $\beta \simeq \gamma$ のホモトピーを後半に 2 倍速で行えばよい。群論で商群 G/N を作ったときと同じく, 「同値類の集合の上で議論する」考え方である。

ループ α のホモトピー類を $[\alpha]$ と書く。

つまり, $[\alpha] = [\beta]$ とは, α と β が基点固定ホモトピーで変形できることを意味する。

このホモトピー類の集合に積を定義する。

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

この定義が意味を持つためには、代表元の取り方によらないことを確認する必要がある。

すなわち, $\alpha \simeq \alpha'$, $\beta \simeq \beta'$ ならば $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$ でなければならない。

これは、前半の時間で α を α' に変形し、後半の時間で β を β' に変形すればよいので成り立つ。

well-defined

ホモトピー類の集合で演算を定義するとき、代表元の取り方に依存しないことを確認しなければならない。たとえば $[\alpha] = [\alpha']$, $[\beta] = [\beta']$ であるとき、

$$[\alpha * \beta] = [\alpha' * \beta']$$

が成り立つ必要がある。この性質を、演算が **well-defined** であるという。

もし代表元を変えると結果が変わってしまうなら、それはホモトピー類上の演算ではなく、単に代表ループ上の演算にすぎない。基本群を定義するうえで、well-defined 性は最初に確認すべき重要な点である。

具体例: 積の well-defined 性のホモトピーを書き下す

F を α から α' への、 G を β から β' への基点固定ホモトピーとする。このとき

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \left(0 \leq s \leq \frac{1}{2}\right), \\ G(2s - 1, t) & \left(\frac{1}{2} \leq s \leq 1\right) \end{cases}$$

と定める。 $s = 1/2$ では $F(1, t) = x_0 = G(0, t)$ となるので H は連続である。さらに $H(s, 0) = (\alpha * \beta)(s)$, $H(s, 1) = (\alpha' * \beta')(s)$, $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ が成り立つ。したがって $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$ であり、積 $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ は代表元の取り方によらない。

2.9 基本群の定義

定理 2.7. 基点 $x_0 \in X$ に対し、 x_0 を基点とするループの基点固定ホモトピー類全体は、道の積によって群をなす。

証明のスケッチ. 群の公理を確認する。

1. 結合律

ループ α, β, γ に対して、 $(\alpha * \beta) * \gamma$ と $\alpha * (\beta * \gamma)$ は厳密には同じ写像ではない。なぜなら、それぞれのループをたどる速度が異なるからである。

しかし、どちらも α , β , γ の順にたどるループであり、再パラメータ化によって基点固定ホモトピックである。したがって、ホモトピー類の上では $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$ が成り立つ。

2. 単位元

定値ループ $c_{x_0}(t) = x_0$ のホモトピー類 $[c_{x_0}]$ が単位元である。実際、 $c_{x_0} * \alpha$ と α は、止まっている時間を縮めることでホモトピックである。同様に $\alpha * c_{x_0}$ も α にホモトピックである。

3. 逆元

ループ α に対して、逆向きのループ $\bar{\alpha}$ を考える。すると $\alpha * \bar{\alpha}$ は、 α を進んで同じ道に戻るループである。これは定値ループにホモトピックである。

同様に $\bar{\alpha} * \alpha$ も定値ループにホモトピックである。

したがって $[\bar{\alpha}]$ は $[\alpha]$ の逆元である。

以上より、ループのホモトピー類全体は群をなす。□

この証明の読み方: 三つの確認はすべてホモトピーの構成

この証明で示すべきことは、写像の等式ではなく、すべて「基点固定ホモトピーが存在する」という主張である。結合律では時間配分を付け替える再パラメータ化、単位元では基点にとどまる時間を縮める変形、逆元では「進んで戻る」動きを途中で引き返させる変形を構成する。初読では、正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ の下辺に変形前のループ、上辺に変形後のループを置き、その間を連続につなぐ図を主張ごとに描いてみるとよい。また、これらのホモトピーはどれもパラメータの付け替えの式だけで書けるので、空間 X の個別の性質は一切使っていないことにも注意する。だからこそ、任意の位相空間で基本群が定義できる。

具体例: 単位元のホモトピーを書き下す

$c_{x_0} * \alpha \simeq \alpha$ を示すホモトピーを具体的に書く。

$$H(s, t) = \begin{cases} x_0 & \left(0 \leq s \leq \frac{1-t}{2} \right), \\ \alpha\left(\frac{2s - (1-t)}{1+t}\right) & \left(\frac{1-t}{2} \leq s \leq 1 \right) \end{cases},$$

と定める。 $t = 0$ のとき $H(s, 0) = (c_{x_0} * \alpha)(s)$ であり、 $t = 1$ のとき $H(s, 1) = \alpha(s)$ である。境界 $s = \frac{1-t}{2}$ では α の引数が 0 になり、 $\alpha(0) = x_0$ なので両側の定義が一致して H は連続である。さらに $H(0, t) = x_0$, $H(1, t) = \alpha(1) = x_0$ も成り立つ。「基点にとどまる時間 $[0, \frac{1-t}{2}]$ を t とともに縮めていく」という証明の言葉が、この式に対応している。

定義 2.8 (基本群). 基点 $x_0 \in X$ に対し、 x_0 を基点とするループの基点固定ホモトピー類全体からなる群を、 X の**基本群**といい、 $\pi_1(X, x_0)$ と書く。

2.10 基本群の基本例

一点空間

一点空間 $\{*\}$ では、どの時刻においても写る先はただ一つの点 $*$ しかない。したがって、任意のループは必ず定値ループになる。

つまり、ループのホモトピー類は一つしかない。よって

$$\pi_1(\{*\}, *) \cong 1$$

である。ここで 1 は、自明群を表す。この例は、「穴がない空間では基本群が自明になる」という直感の最も単純な場合である。

円板

円板 D^2 は可縮である。すなわち、円板全体を中心点へ連続的に縮めることができる。

このことから、円板内の任意のループは、円板の内部を使って一点へ縮めることができる。円

周上をまわるように見えるループであっても、円板には内部があるため、その内部を通してだんだん小さくできる。したがって任意のループは定値ループにホモトピックであり、

$$\pi_1(D^2, x_0) \cong 1$$

となる。

円周 S^1 と円板 D^2 の違いはここにある。円周では中心の穴を通して縮めることができないが、円板ではその穴が内部で埋まっている。

円周

円周 S^1 では、ループが円周のまわりを何回まわるかという整数が現れる。反時計回りに 1 回まわるループを 1, 時計回りに 1 回まわるループを -1 と数える。2 回まわれば 2, まったくまわらなければ 0 である。

この整数は、ループを連続的に変形しても変わらない。なぜなら、円周上のループを変形しても、中心の穴を飛び越えて巻き数を変えることはできないからである。後で詳しく見るように、この巻き数が基本群を完全に記述し、

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$$

となる。

2.11 連続写像から誘導される準同型

基本群は、空間だけでなく、連続写像とも自然に対応する。

基点つき空間 $(X, x_0), (Y, y_0)$ の間の連続写像 $f : X \rightarrow Y$ が $f(x_0) = y_0$ を満たすとする。

このとき、 x_0 を基点とするループ α に対し、 $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow Y$ は y_0 を基点とするループである。

したがって $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して $[f \circ \alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$ を対応させることができる。

定義 2.9 (誘導準同型). $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ を基点を保つ連続写像とする。このとき $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ を、 f が基本群に誘導する準同型という。

この定義が意味を持つのは、 $\alpha \simeq \beta$ ならば $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ となるからである。実際、 H が α と β の基点固定ホモトピーなら、 $f \circ H$ は $f \circ \alpha$ と $f \circ \beta$ の基点固定ホモトピーを与える。

また、道の積に対して $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ が成り立つので、 $f_*([\alpha] \cdot [\beta]) = f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta])$ である。したがって、 f_* は群準同型である。

具体例: 誘導準同型を計算する

1. 定値写像 $f : X \rightarrow Y, f(x) = y_0$ に対しては、任意のループ α について $f \circ \alpha = c_{y_0}$ となる。したがって f_* は、すべての元を単位元へ送る自明な準同型である。
2. $f : S^1 \rightarrow S^1, f(z) = z^2$ を考える。 $f(1) = 1$ なので、基点 1 を保つ。円周を 1 周する

ループ $\alpha_1(t) = e^{2\pi it}$ に対し

$$(f \circ \alpha_1)(t) = (e^{2\pi it})^2 = e^{4\pi it}$$

となり、これは円周を 2 周するループである。本章の後半で示す $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ のもとで、 f_* は $\mathbb{Z}$ 上の 2 倍写像 $n \mapsto 2n$ に対応する。

包含写像の場合

$A \subset X$ とし、包含写像 $i: A \hookrightarrow X$ を考える。基点 $x_0 \in A$ を取ると、 i は基点を保つ連続写像なので $i_*: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ という誘導準同型が得られる。

次章のファン・カンペンの定理で現れる $\pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$, $\pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)$ は、まさに包含写像から誘導される準同型である。

2.12 関手性

誘導準同型は、恒等写像と合成に関して自然に振る舞う。

復習: 圏と関手の考え方

圏とは、「対象」の集まりと、対象の間の「射」の集まりであって、射の合成と恒等射が定まり、合成の結合律と恒等射に関する単位律を満たすものをいう。例えば、集合と写像、群と群準同型、位相空間と連続写像は、それぞれ圏をなす。圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 F とは、対象を対象に、射を射に対応させ、

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(\text{id}) = \text{id}$$

を満たす対応のことである。次の命題は、対応 $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$, $f \mapsto f_*$ がまさにこの 2 条件を満たすことを述べている。「空間と連続写像の話で、合成の仕方を保ったまま群と準同型の話へ翻訳する」というのが関手の直観である。

命題 2.10 (関手性). 基点を保つ連続写像 $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ に対して $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ が成り立つ。

また、恒等写像について $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ が成り立つ。

Proof. $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ に対して、

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_*([f \circ \alpha]) = (g_* \circ f_*)([\alpha]).$$

よって $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

恒等写像についても、 $(\text{id}_X)_*([\alpha]) = [\text{id}_X \circ \alpha] = [\alpha]$ であるから明らかである。 $\square$

基本群は関手である

基点つき位相空間を対象とし、基点を保つ連続写像を射とする圏を $\mathbf{Top}_*$ と書く。また、群を対象とし、群準同型を射とする圏を $\mathbf{Grp}$ と書く。

対応 $(X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0)$, $f \mapsto f_*$ は、恒等写像と合成を保つ。この意味で、基本群は $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ という関手である。

2.13 ホモトピーと基本群

基点を保つ連続写像がホモトピーで結ばれているとき、それらが基本群に誘導する準同型は一致する。

命題 2.11. $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ を基点を保つ連続写像とする。さらに、 f と g を結ぶホモトピー $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ が存在し、すべての $t \in [0, 1]$ に対して $H(x_0, t) = y_0$ が成り立つとする。このとき $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ である。

Proof. $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ を任意に取る。このとき $K(s, t) = H(\alpha(s), t)$ と定めると、 K は $f \circ \alpha$ と $g \circ \alpha$ を結ぶホモトピーである。

さらに、 $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ なので、 $K(0, t) = H(x_0, t) = y_0$, $K(1, t) = H(x_0, t) = y_0$ 。したがって、これは基点固定ホモトピーである。

よって $[f \circ \alpha] = [g \circ \alpha]$ であり、 $f_*([\alpha]) = g_*([\alpha])$ となる。したがって $f_* = g_*$ 。□

2.14 ホモトピー同値と基本群

定理 2.12. (X, x_0) と (Y, y_0) が基点つき空間としてホモトピー同値ならば、 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ である。

Proof. 基点を保つ連続写像 $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ が存在して $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ が基点を保つホモトピーとして成り立つとする。

前の命題と関手性より

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

である。同様に $f_* \circ g_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$ である。

したがって f_* と g_* は互いに逆写像であり、 f_* は群同型である。□

変形レトラクト

$A \subset X$ が X の変形レトラクトであるとき、 A と X はホモトピー同値である。したがって $\pi_1(A) \cong \pi_1(X)$ である。

例えば、 $S^1 \times [0, 1]$ は S^1 に変形レトラクトするので、 $\pi_1(S^1 \times [0, 1]) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 。

2.15 基点の役割

基本群は基点つきで定義される。しかし、弧状連結な空間では、基点を変えても基本群は同型になる。

命題 2.13. X を弧状連結空間とし、 $x_0, x_1 \in X$ を結ぶ道 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ を取る。このとき

$$\Phi_\gamma : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), [\alpha] \mapsto [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]$$

は群同型である。

ここで $\bar{\gamma}$ は、 x_1 から x_0 へ戻る道である。したがって $\bar{\gamma} * \alpha * \gamma$ は x_1 を基点とするループになる。ただし、 γ の取り方を変えると、同型は共役だけずれる。したがって、基本群が非可換な場合には、基点を意識しておく必要がある。

直観: 基点の取り替えとループの読み方

$\bar{\gamma} * \alpha * \gamma$ は、「 x_1 から道 $\bar{\gamma}$ で x_0 へ行き、そこでループ α をまわり、道 γ で x_1 へ帰る」という、 x_1 を基点とするループである。基点そのものを動かす代わりに、連絡路 γ を往復に使ってループを運んでいる、と考えるとよい。この形は群論の共役 $g \mapsto h^{-1}gh$ とよく似ている。実際、別の道 γ' を選ぶと、 $\Phi_{\gamma'}$ は Φ_γ とある元による共役の分だけずれる。基本群がアーベル群の場合は共役が恒等写像になるので、同型は道の選び方によらないが、非可換の場合にはこのずれが残る。

基点を省略する場合

X が弧状連結であり、基点の違いが問題にならない文脈では、 $\pi_1(X)$ と書くことが多い。ただし、厳密には基本群は基点に依存して定義される。

2.16 円周の基本群

円周 S^1 の基本群を考える。

直感的には、 S^1 上のループは、円周を何回まわるかで分類される。その整数を巻き数という。

結論は $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ である。

この事実を理解する最もよい方法は、被覆空間 $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ を用いることである。

2.17 円周の被覆写像

指数写像 $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$ を考える。

これは、実数直線を円周に巻き付ける写像である。整数だけ平行移動しても同じ点に写るので、 $p(t+n) = p(t)$ ($n \in \mathbb{Z}$) である。

円周上の十分小さな開弧を取ると、その逆像は $\mathbb{R}$ 上の互いに交わらない開区間の和になる。各開区間からその開弧への制限写像は同相になる。この意味で、 p は被覆写像である。

直観: らせん階段としての被覆写像

$p(t) = e^{2\pi it}$ は、実数直線を無限に続くらせん階段に見立て、それを真上から円周へ射影する写像だと思ふとよい。らせんの 1 段 (長さ 1 の区間) が円周の 1 周に対応し、円周上の 1 点の真上には $\dots, t-1, t, t+1, \dots$ と無限個の点が等間隔に並ぶ。円周上をループが動くとき、その動きをらせん階段の上でたどり直したものが「持ち上げ」である。円周上では出発点に戻ってきても、階段の上では何段か上または下にずれていることがある。このずれ (整数) が、次節で定義する巻き数にほかならない。

被覆空間についての注意

ここでは、被覆空間論の一般論までは扱わない。この段階では、 S^1 上の道は $\mathbb{R}$ 上に一意的に持ち上がるという事実を用いる。
厳密な道の持ち上げ定理やホモトピーの持ち上げ定理は、被覆空間論で体系的に扱う。

2.18 巻き数

基点を $1 \in S^1$ とし、その持ち上げとして $0 \in \mathbb{R}$ を選ぶ。

1 を基点とするループ $\alpha: [0, 1] \rightarrow S^1$ を考える。このループを、始点が 0 になるように $\mathbb{R}$ に持ち上げる。つまり、 $\tilde{\alpha}(0) = 0$, $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ を満たす道 $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を取る。

すると $\alpha(1) = 1$ であるから、 $p(\tilde{\alpha}(1)) = 1$. よって $\tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$ である。

この整数 $\tilde{\alpha}(1)$ を α の巻き数という。

標準的なループ

整数 n に対して $\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$ と定める。これは円周を n 回まわるループである。

この持ち上げは $\tilde{\alpha}_n(t) = nt$ であり、 $\tilde{\alpha}_n(1) = n$. したがって、 α_n の巻き数は n である。

具体例: 往復するループの巻き数

ループ

$$\alpha(t) = e^{\pi i \sin(\pi t)}$$

を考える。 $\tilde{\alpha}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{2}$ とおくと、 $p(\tilde{\alpha}(t)) = e^{2\pi i \cdot \sin(\pi t)/2} = \alpha(t)$ かつ $\tilde{\alpha}(0) = 0$ なので、これが α の持ち上げである。このループは、反時計回りに進んで $t = 1/2$ で半周先の -1 に達し、その後は同じ道を引き返して基点 1 に戻る。終点は $\tilde{\alpha}(1) = 0$ なので、巻き数は 0 である。つまりこのループは、たえず動いてはいるが、定値ループと同じホモトピー類に属する。巻き数は「どれだけ動いたか」ではなく、「正味で何周したか」を数えている。

2.19 円周の基本群の計算

定理 2.14. 写像 $\deg : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, $[\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}(1)$ は群同型である。したがって $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

証明のスケッチ. まず, この写像がホモトピー類に対して well-defined であることを確認する。すなわち, 基点固定ホモトピーで結ばれた二つのループを, ともに $0 \in \mathbb{R}$ を始点として持ち上げると, ホモトピーの持ち上げにより, その終点も一致する。したがって, $\tilde{\alpha}(1)$ は代表元 α の取り方によらず, ホモトピー類 $[\alpha]$ のみによって決まる。

次に, 道の積に対して巻き数は加法的に振る舞う。すなわち, $\deg([\alpha] \cdot [\beta]) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$ である。したがって $\deg$ は群準同型である。

次に, 任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ はループ $\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$ で実現される。したがって $\deg$ は全射である。

最後に, 巻き数が 0 のループを考える。その持ち上げは, 始点も終点も 0 であるような $\mathbb{R}$ 上のループである。しかし $\mathbb{R}$ は単連結であり, このループは定値ループに縮められる。それを S^1 に射影すれば, もとのループも基点固定ホモトピーで定値ループに縮む。したがって $\deg$ の核は自明である。

よって $\deg$ は同型である。 $\square$

具体例: 積の巻き数を持ち上げで確かめる

1 周するループ $\alpha_1(t) = e^{2\pi i t}$ に対し, 積 $\alpha_1 * \alpha_1$ の巻き数を計算する。前半 $0 \leq t \leq 1/2$ では, $\alpha_1(2t)$ の持ち上げとして $\tilde{\gamma}(t) = 2t$ を取る ($\tilde{\gamma}(1/2) = 1$)。後半 $1/2 \leq t \leq 1$ では, 始点が 1 になるように $\tilde{\gamma}(t) = 1 + (2t - 1)$ を取る。つなぎ合わせた $\tilde{\gamma}$ は連続で, $\tilde{\gamma}(0) = 0$ かつ $p \circ \tilde{\gamma} = \alpha_1 * \alpha_1$ を満たす。したがって $\deg([\alpha_1] \cdot [\alpha_1]) = \tilde{\gamma}(1) = 2 = 1 + 1$ である。一般の積 $\alpha * \beta$ でも同様に, β の持ち上げの始点を $\tilde{\alpha}(1)$ に平行移動してつなげばよい。これが, 証明中の加法性 $\deg([\alpha] \cdot [\beta]) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$ の理由である。

2.20 穴のあいた平面の基本群

円周の基本群を使うと, 穴のあいた平面の基本群も分かる。

$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を考える。

この空間は, 単位円周 S^1 に変形レトラクトする。実際, 点 $x \neq 0$ を $\frac{x}{\|x\|}$ へ動かせばよい。

したがって $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1$ であり, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

穴を検出する

$\mathbb{R}^2$ そのものは単連結である。しかし, 原点を取り除くと, 原点のまわりを一周するループが縮められなくなる。このため $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ となる。

2.21 単連結

定義 2.15 (単連結). 弧状連結空間 X が**単連結**であるとは、基本群が自明であることをいう。すなわち、ある基点 $x_0 \in X$ について $\pi_1(X, x_0) \cong 1$ であることをいう。

弧状連結空間では、基点を変えても基本群は同型なので、単連結性は基点の選び方によらない。

単連結な空間

1. 一点空間は単連結である。
2. 円板 D^2 は単連結である。
3. $\mathbb{R}^n$ は単連結である。
4. より一般に、凸集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ は単連結である。

凸集合 $U \subset \mathbb{R}^n$ が単連結である理由を確認する。任意のループ $\alpha : [0, 1] \rightarrow U$ に対して、基点を x_0 とすると、 $H(s, t) = (1-t)\alpha(s) + tx_0$ は、 α を定値ループへ縮めるホモトピーである。凸性により、この線分は常に U の中に含まれる。

2.22 まとめ

この章では、基本群を定義した。

基点 $x_0 \in X$ を固定し、 x_0 を基点とするループを考える。ループを基点固定ホモトピーで同一視し、道の積によって積を定めると、群が得られる。これを $\pi_1(X, x_0)$ と書き、 X の基本群という。

基本群は、空間の穴の情報を記録する。円板や $\mathbb{R}^n$ は単連結であり、基本群は自明である。一方、円周ではループの巻き数が整数として現れるため、 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である。

さらに、連続写像 $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ は誘導準同型 $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ を与える。この性質により、基本群は位相空間から群への関手として振る舞う。

次章では、空間を分解して基本群を計算するために用いるファン・カンペンの定理を学ぶ。

練習問題 (標準)

1. S^1 上のループ

$$\alpha_m(t) = e^{2\pi i m t}, \quad \alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$$

について、積 $\alpha_m * \alpha_n$ のホモトピー類が巻き数 $m+n$ に対応することを説明せよ。

2. ループ $\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$ の逆ループが、巻き数 $-n$ に対応することを説明せよ。

3. 写像

$$f : S^1 \rightarrow S^1, \quad f(z) = z^k$$

が誘導する準同型

$$f_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$$

は、 $\mathbb{Z}$ 上のどのような写像に対応するか答えよ。

4. 開円環

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \|x\| < 3\}$$

の基本群を，変形レトラクトを用いて求めよ。

5. ループ

$$\gamma(t) = (2 + \cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

を $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ のループと見る。このループの巻き数はいくつ，図形的に説明せよ。

6. ループ

$$\eta(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

を $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ のループと見る。 η^3 が表す基本群の元を答えよ。

7. X が弧状連結で，ある基点 x_0 で $\pi_1(X, x_0)$ が自明であるとする。任意の基点 x_1 に対しても $\pi_1(X, x_1)$ が自明である理由を説明せよ。

8. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ があるとき，誘導準同型が

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

を満たすことを，ループを追跡して説明せよ。

9. 凸集合内の任意のループが定値ループにホモトピックであることを，直線ホモトピーを用いて説明せよ。

10. 基本群が空間の「穴」をどのように検出するか， $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ を比較して説明せよ。

練習問題（発展）

- 複素平面から原点を除いた空間で，ループ $\gamma(t) = e^{6\pi it}$ が表す基本群の元を求めよ。
- 円周上の写像 $z \mapsto \bar{z}$ が誘導する $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 上の準同型を求めよ。
- 空間 X が可縮であるならば，任意の基点において $\pi_1(X)$ が自明であることを説明せよ。
- 逆に， $\pi_1(X)$ が自明であっても X が可縮とは限らない。このことが起こり得る理由を，球面を例に説明せよ。

第 3 章

ファン・カンペンの定理（導入）

3.1 この章で学ぶこと

この章では、基本群を具体的に計算するための重要な道具である**ファン・カンペンの定理**を学ぶ。

基本群は定義から直接計算するのが難しい場合が多い。そこで、空間を扱いやすい部分空間に分け、それぞれの基本群と重なるの情報から、全体の基本群を求める。この方法を与えるのがファン・カンペンの定理である。

- 群の自由積の意味を理解する。
- 融合積の意味を理解する。
- 正規閉包と「関係式を加える」操作の意味を理解する。
- ファン・カンペンの定理の主張を、使える形で把握する。
- 空間を開集合に分解して基本群を計算する方針を身につける。
- 8 の字空間、トーラス、射影平面などの基本群計算への応用を理解する。

学習の指針

この章の前半に現れる「群の表示」「自由群」「自由積」「正規閉包」「融合積」は、多くの読者にとって初めて出会う群論の話題である。前提となるのは既習の「群・正規部分群・商群・準同型」であり、不安があれば巻末付録「群論と線形代数の要点」を先に見直すとよい。新しい概念はどれも「語を書いて計算する」ことで身につくので、各定義の直後にある具体例を、必ず紙の上で自分の手で再現してから先へ進んでほしい。後半の例（8 の字空間・トーラス・射影平面）では、第 2 章で示した $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ を繰り返し使う。

3.2 この章の位置づけ

第 1 章と第 2 章では、基本群の定義と基本的な例を学んだ。特に $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ であることを確認した。

しかし、より複雑な空間の基本群を、ループの定義だけから直接求めるのは難しい。例えば、8 の字空間 $S^1 \vee S^1$ やトーラス T^2 の基本群を定義から直接求めるのは容易ではない。

そこで、空間を二つの部分に分けて考える。

$$X = U \cup V$$

このとき、全体の基本群 $\pi_1(X)$ を $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$, $\pi_1(U \cap V)$ から求める定理がファン・カンペンの定理である。

直感的には、 X のループは、 U 中のループと V 中のループをつなぎ合わせて作られる。ただし、 $U \cap V$ 中にあるループは、 U 中で見ても V 中で見ても同じループである。そのため、重なりから来る関係式を加える必要がある。

3.3 群の表示の復習

なぜ群の表示を使うのか

基本群はループ全体から作られるため、定義のままでは大きく見える。しかし実際の計算では、いくつかの代表的なループを生成元として選び、それらの間に成り立つ関係式を記録すれば十分なことが多い。

群の表示

$$\langle \text{生成元} \mid \text{関係式} \rangle$$

は、「どのループで基本群を作り、どのループを同じとみなすか」を簡潔に書くための記法である。ファン・カンペンの定理は、空間を貼り合わせる操作を、この生成元と関係式の言葉に翻訳する定理である。

ファン・カンペンの定理では、基本群を**群の表示**として記述することが多い。

定義 3.1 (群の表示). 群 G が生成元 S と関係式 R によって $G = \langle S \mid R \rangle$ と書けるとき、これを G の**表示**という。

復習: 語と簡約

生成元 a, b に対して、文字 a, a^{-1}, b, b^{-1} を有限個並べたもの（例えば $aba^{-1}bb$ ）を**語**という。何も並べない空の語は単位元 1 を表す。語の中に aa^{-1} , $a^{-1}a$, bb^{-1} , $b^{-1}b$ が現れたら、それを消す操作を**簡約**という。例えば

$$abb^{-1}a \longrightarrow aa = a^2$$

である。群の表示 $\langle S \mid R \rangle$ の元は S の文字からなる語で表され、簡約と関係式 R による書き換えで移り合う語どうしを同じ元とみなす。

例えば $\mathbb{Z} \cong \langle a \mid \rangle$ である。これは、 a を生成元とし、特に関係式を入れない群である。

また $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ である。これは、生成元 a に対して $a^n = 1$ という関係式を入れた群である。

具体例: 巡回群 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の表示と元の列挙

関係式 $a^3 = 1$ の下では、 a の冪はすべて $1, a, a^2$ のいずれかに書き直せる。実際

$$a^3 = 1, \quad a^4 = a^3 \cdot a = a, \quad a^{-1} = a^{-1} \cdot a^3 = a^2$$

である。したがって元は $\{1, a, a^2\}$ の 3 個であり、積も $a^2 \cdot a^2 = a^4 = a$ のように関係式だけで計算できる。これは位数 3 の巡回群 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。

具体例: 二面体群 D_3 の表示

正三角形の対称群 D_3 (位数 6) は

$$D_3 \cong \langle r, s \mid r^3 = 1, s^2 = 1, sr s^{-1} = r^{-1} \rangle$$

と表示される。第三の関係式は $sr = r^{-1}s = r^2s$ と書き直せるので、どの語も s を右端に寄せて

$$1, \quad r, \quad r^2, \quad s, \quad rs, \quad r^2s$$

の 6 個のいずれかに整理できる。積の計算も関係式だけで実行できる。例えば

$$(rs)(rs) = r(sr)s = r(r^{-1}s)s = s^2 = 1$$

となり、 rs は位数 2 の元である。

自由群

生成元 a, b の間に何も関係式を入れない群 $\langle a, b \mid \rangle$ を、 a, b で生成される自由群といい、 $F(a, b)$ または F_2 と書く。

この群では、一般に $ab \neq ba$ である。

具体例: 自由群 F_2 の元と積の計算

$F(a, b)$ の元は、簡約された語で表される。長さの小さい順に列挙すると

$$1; \quad a, a^{-1}, b, b^{-1}; \quad a^2, ab, ab^{-1}, a^{-1}b, ba, b^2, \dots$$

となる。積は、語をつないでから簡約すればよい。例えば

$$(ab^{-1}a)(a^{-1}ba^2) = ab^{-1}(aa^{-1})ba^2 = a(b^{-1}b)a^2 = a \cdot a^2 = a^3$$

である。一方、 ab と ba はどちらもこれ以上簡約できない相異なる語なので、 $F(a, b)$ の中で $ab \neq ba$ である。

3.4 自由積

自由積の直感

自由積 $G * H$ は、 G の元と H の元を交互につなげてできる語全体からなる群である。 G の中でもともと成り立っていた関係式と、 H の中でもともと成り立っていた関係式は保つが、 G の元と H の元の間には余分な関係式を課さない。

空間の言葉では、二つの部分空間が一点でつながっているだけなら、一方をまわるループと他

方をまわるループの間に新しい関係は生じない。そのため、くさび和の基本群では自由積が自然に現れる。

二つの群 G, H が与えられたとき、それぞれの群の中の関係式は保ちながら、 G の元と H の元の間には新しい関係を入れずに作る群を**自由積**という。

定義 3.2 (自由積). 群 G, H の**自由積**とは、群 $G * H$ と準同型 $\iota_G : G \rightarrow G * H$, $\iota_H : H \rightarrow G * H$ の組であって、任意の群 L と任意の準同型 $f : G \rightarrow L$, $g : H \rightarrow L$ に対して、ただ一つの準同型 $\Phi : G * H \rightarrow L$ が存在して $\Phi \circ \iota_G = f$, $\Phi \circ \iota_H = g$ を満たすものをいう。

この普遍性を満たす群は、同型を除いて一意である。通常、 G と H は $G * H$ の中に自然に入っていると考えられる。

圏論における普遍性

上の定義は、単に自由積の具体的な作り方を述べているだけではなく、「自由積が何によって特徴づけられるか」を述べている。すなわち、 G から L への準同型と H から L への準同型が与えられると、それらは必ず一意的に $G * H$ から L への準同型にまとめられる：

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{\iota_G} & G * H & \xleftarrow{\iota_H} & H \\ & \searrow f & \downarrow \Phi & \swarrow g & \\ & & L & & \end{array}$$

この性質を、 $G * H$ の**普遍性**という。圏論の言葉では、群の圏において、自由積 $G * H$ は G と H の**余積**である。ここで重要なのは、圏論の用語そのものではなく、「二つの群から出る準同型を、一つの群から出る準同型として一意的にまとめる」という性質である。

直感的には、 $G * H$ の元は、 G の元と H の元を交互に並べた言葉で表される。ただし、 G の中で成り立つ計算、また H の中で成り立つ計算は、自由積の中でもそのまま成り立つ。

3.5 自由積の元

自由積 $G * H$ の元は、次の形の**簡約語**で表される。

$$x_1 x_2 \cdots x_r$$

ここで、各 x_i は $G \setminus \{1\}$ または $H \setminus \{1\}$ の元であり、隣り合う x_i, x_{i+1} は同じ群には属さない。

同じ群に属する項が隣り合った場合は、その群の中で掛け合わせて簡約する。また、単位元が出てきた場合は取り除く。

例えば、 $g_1, g_2 \in G$ なら、自由積の中でも $g_1 g_2$ は G の中の積として計算する。同様に、 $h_1, h_2 \in H$ なら、 $h_1 h_2$ は H の中の積として計算する。

しかし、 $g \in G, h \in H$ に対しては、一般には $gh = hg$ とは限らない。

自由積 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

$G = \langle a \mid \rangle, H = \langle b \mid \rangle$ とする。これはどちらも無限巡回群であり, $G \cong \mathbb{Z}, H \cong \mathbb{Z}$ である。

このとき $G * H \cong \langle a, b \mid \rangle$ である。右辺は a, b を生成元とする自由群 F_2 である。

例えば $ab, a^2b^{-1}ab, ba^{-1}b^2$ などは, いずれも自由積の元を表す。ここでは a と b の間に可換性の関係はないので, 一般に $ab \neq ba$ である。

具体例: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ での簡約の計算

$G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle, H = \langle h \mid h^3 = 1 \rangle$ とする。自由積 $G * H$ の中で

$$(gh)(h^2g) = g(h \cdot h^2)g = gh^3g = g \cdot 1 \cdot g = g^2 = 1$$

となる。ここで $h \cdot h^2$ は H 中の積として, $g \cdot g$ は G 中の積として計算した。したがって h^2g は gh の逆元である。一方,

$$(gh)^n = ghgh \cdots gh$$

は, G の元と H の元が交互に並んだ長さ $2n$ の簡約語であり, 空の語にはならない。したがって gh の位数は無限である。位数 2 と位数 3 の有限群の自由積が, 無限群になることが分かる。

自由積の意味

自由積 $G * H$ は, G と H をできるだけ自由に貼り合わせた群である。

ファン・カンペンの定理では, 空間 U と V を貼り合わせるとき, まず $\pi_1(U) * \pi_1(V)$ を考える。その後, 共通部分 $U \cap V$ から来る関係式を追加する。この「関係式を追加する」操作が, 次に述べる融合積である。

3.6 正規閉包

融合積を定義するために, まず正規閉包を復習する。

定義 3.3 (正規閉包). 群 K の部分集合 $S \subset K$ に対して, S を含む最小の正規部分群を S の**正規閉包**といい, $\langle\langle S \rangle\rangle_K$ と書く。すなわち

$$\langle\langle S \rangle\rangle_K = \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq K \\ S \subset N}} N$$

である。

同値に, 正規閉包は S の元とそのすべての共役を含めて生成される部分群である。

$$\langle\langle S \rangle\rangle_K = \langle ksk^{-1} \mid k \in K, s \in S \rangle.$$

群の商を作るには, 正規部分群で割る必要がある。したがって, 群に関係式を追加したいときには, 対応する元を含む正規閉包で割る。

具体例: 自由群における正規閉包の計算

自由群 $K = F(a, b)$ で $S = \{b\}$ とする。 b が生成する部分群 $\langle b \rangle = \{b^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は正規部分群ではない。実際、共役 aba^{-1} は簡約語であり、 b の冪ではない。正規閉包 $\langle\langle b \rangle\rangle_K$ は、 aba^{-1} や $a^{-1}b^{-1}a$ など、 $b^{\pm 1}$ のすべての共役（とそれらの積）を含む。商群は

$$K/\langle\langle b \rangle\rangle_K \cong \langle a, b \mid b = 1 \rangle \cong \langle a \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$$

であり、語から $b^{\pm 1}$ をすべて消したものが残る。例えば $abab^{-1}a$ の類は a^3 の類に等しい。

関係式を加えるとは何か

群 K の元 w に対して、関係式 $w = 1$ を加えるとは、商群 $K/\langle\langle w \rangle\rangle$ を作ることである。

この商群の中では w は単位元になる。また、群として矛盾なく商を作るために、 w のすべての共役も同時に単位元になる。

具体例: 交換子を関係式として加える

自由群 $F(a, b)$ に関係式 $aba^{-1}b^{-1} = 1$ 、すなわち $ab = ba$ を加えると

$$F(a, b)/\langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$$

となる。この商群では a と b が可換なので、どの語も文字を並べ替えて $a^m b^n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) の形に整理できる。例えば

$$ba^{-1}ba^2 = a^{-1}bba^2 = a^{-1}a^2b^2 = ab^2$$

である。対応 $a^m b^n \mapsto (m, n)$ により、この群は $\mathbb{Z}^2$ と同型である。この計算は、あとでトーラスの基本群の計算（例 3）に再登場する。

3.7 融合積

自由積 $G * H$ では、 G と H の間に余分な関係は入れない。しかし、空間を貼り合わせる場面では、共通部分に由来するループは、 U の中で見ても V の中で見ても同じループとして扱う必要がある。

このように、ある群 A が G と H の両方に写っているとき、その像を同一視して得られる群を**融合積**という。

定義 3.4 (融合積). 群準同型 $\varphi: A \rightarrow G$, $\psi: A \rightarrow H$ が与えられているとする。

このとき、自由積 $G * H$ の中で、すべての $a \in A$ に対して $\varphi(a) = \psi(a)$ という関係を課して得られる商群を、 G と H の A による**融合積**といい、 $G *_A H$ と書く。

すなわち $G *_A H = (G * H)/\langle\langle \varphi(a)\psi(a)^{-1} \mid a \in A \rangle\rangle$ である。

ここで、 $\varphi(a)$ は G の元であり、 $\psi(a)$ は H の元である。しかし、 G と H は自然に自由積 $G * H$ の中に入っているため、自由積の元として比較できる。

融合積の意味

融合積 $G *_A H$ は, G と H を自由に貼り合わせた後, A から来る元を同一視した群である。空間の貼り合わせでは, $A = \pi_1(U \cap V)$, $G = \pi_1(U)$, $H = \pi_1(V)$ に対応する。

圏論から見る融合積

自由積が「二つの群を余分な関係なしに合わせる」普遍的な群であったのに対し, 融合積は, 共通部分 A から来る元を同一視しながら合わせる普遍的な群である。

より正確には, 群 L と準同型 $p: G \rightarrow L$, $q: H \rightarrow L$ があり, すべての $a \in A$ について

$$p(\varphi(a)) = q(\psi(a))$$

が成り立つとする。このとき, ただ一つの準同型

$$\Phi: G *_A H \rightarrow L$$

が存在して, G と H からの写像を同時に延長する。図式で書くと次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \psi \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & G *_A H \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow p \\ \downarrow \Phi \\ \searrow q \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ L \end{array}$$

この意味で, 融合積は群の圏における押し出しである。ファン・カンペンの定理では, この押し出しが基本群の計算に現れる。

例：一つの関係式を加える融合積

$G = \langle x \mid \rangle$, $H = \langle y \mid \rangle$, $A = \langle t \mid \rangle$ とし, 準同型を $\varphi(t) = x^m$, $\psi(t) = y^n$ で定める。

このとき $G *_A H \cong \langle x, y \mid x^m = y^n \rangle$. つまり, 自由群 $\langle x, y \mid \rangle$ に対して, x^m と y^n を同一視する関係式を加えた群である。

具体例: 生成元が消去できる融合積

前の例で $m = 1$, $n = 2$ とすると

$$G *_A H \cong \langle x, y \mid x = y^2 \rangle$$

である。関係式 $x = y^2$ を使うと, 語に現れる $x^{\pm 1}$ をすべて $y^{\pm 2}$ に置き換えられるので, この群は y だけで生成される。しかも y には関係式が残らないから

$$\langle x, y \mid x = y^2 \rangle \cong \langle y \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$$

である。自由積 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ は非可換な自由群 F_2 であったのに対し, 融合積では関係式によって群がここまで小さくなることもある。

共通部分の基本群が自明な場合

A が自明群であるとする。このとき、 A から来る関係式は何もない。したがって $G *_A H \cong G * H$ 。
ファン・カンペンの定理では、 $\pi_1(U \cap V) = 1$ の場合、全体の基本群は $\pi_1(U) * \pi_1(V)$ になる。

3.8 ファン・カンペンの定理

ファン・カンペンの定理は、空間を二つの部分空間に分けたとき、全体の基本群を、各部分空間の基本群と重なりの基本群から計算する定理である。

定理 3.5 (ファン・カンペンの定理). $X = U \cup V$ を位相空間の開被覆とし、 $U, V, U \cap V$ が弧状連結であるとする。また、基点 $x_0 \in U \cap V$ をとる。

包含写像 $i_U : U \cap V \hookrightarrow U$, $i_V : U \cap V \hookrightarrow V$ は、基本群の準同型 $(i_U)_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$, $(i_V)_* : \pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)$ を定める。

このとき $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$ が成り立つ。

定理の読み方: 入力と出力

ファン・カンペンの定理を使うのに必要な入力は、次の五つである。

- 三つの群 $\pi_1(U, x_0)$, $\pi_1(V, x_0)$, $\pi_1(U \cap V, x_0)$
- 二つの準同型 $(i_U)_*$, $(i_V)_*$ (重なりループを U 側, V 側でそれぞれどう読むか)

出力は、全体の基本群 $\pi_1(X, x_0)$ である。したがって実際の計算は、「三つの基本群を求める」段階と「重なりループの生成元の行き先を求める」段階の二段構えになる。使う前に、仮定 (U, V が開集合で、 $U, V, U \cap V$ が弧状連結, $x_0 \in U \cap V$) を必ず確認すること。

包含写像から誘導される準同型

ファン・カンペンの定理で用いる融合積は、次の包含写像から誘導される準同型によって決まる。

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{i_U} & U \\ i_V \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X = U \cup V \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{(i_U)_*} & \pi_1(U, x_0) \\ (i_V)_* \downarrow & & \\ \pi_1(V, x_0) & & \end{array}$$

ここで $(i_U)_*$ は、 $U \cap V$ の中のループを U の中のループとして見る写像であり、 $(i_V)_*$ は同じループを V の中で見る写像である。融合積では、この二つの見方が同じ全体空間 X のループを表すように同一視する。

より詳しく書くと、

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)) / \langle\langle (i_U)_*(\alpha)(i_V)_*(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(U \cap V, x_0) \rangle\rangle.$$

つまり、ファン・カンペンの定理は次の操作を行っている。

1. まず $\pi_1(U)$ と $\pi_1(V)$ の自由積を作る。
2. 次に、重なり $U \cap V$ のループについて、 U 側で見たものと V 側で見たものを同一視する。
3. その結果として、全体空間 X の基本群が得られる。

ファン・カンペンの定理の圏論的な見方

ファン・カンペンの定理は、空間の貼り合わせ

$$X = U \cup V$$

を、基本群の世界では押し出しの形

$$\pi_1(U, x_0) *_{\pi_1(U \cap V, x_0)} \pi_1(V, x_0)$$

として読む定理である。つまり、位相空間を貼り合わせる操作が、基本群を取ると、群を共通部分に沿って貼り合わせる操作に対応する。

この視点を持つと、自由積と融合積は単なる群論の計算道具ではなく、「貼り合わせを代数的に表すための普遍的な構成」だと理解できる。

3.9 表示を用いたファン・カンペンの使い方

実際の計算では、群の表示を使うと分かりやすい。

例えば $\pi_1(U, x_0) = \langle S_U \mid R_U \rangle$, $\pi_1(V, x_0) = \langle S_V \mid R_V \rangle$ とする。

また、 $\pi_1(U \cap V, x_0)$ の生成元 α が、 U 側では語 $w_U(\alpha)$ に写り、 V 側では語 $w_V(\alpha)$ に写るとする。

このとき、ファン・カンペンの定理は $\pi_1(X, x_0) \cong \langle S_U, S_V \mid R_U, R_V, w_U(\alpha) = w_V(\alpha) \rangle$ という形で使える。

具体例: 表示の形で定理を使う

$\pi_1(U) = \langle a \mid \rangle$, $\pi_1(V) = \langle b \mid \rangle$, $\pi_1(U \cap V) = \langle \alpha \mid \rangle$ とし、重なり生成元 α が

$$w_U(\alpha) = a^2, \quad w_V(\alpha) = b^3$$

に写るとする。このとき

$$\pi_1(X) \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$$

である。 U 側にも V 側にも関係式はなく、加わる関係式は重なりから来る $a^2 = b^3$ の一つだけである。これは融合積の節の具体例と同じ群である。

計算手順

ファン・カンペンの定理を使うときは、次の流れを意識するとよい。

1. X を扱いやすい開集合 U, V に分ける。
2. $U, V, U \cap V$ が弧状連結であることを確認する。
3. $U, V, U \cap V$ が何に変形レトラクトするかを見る。

4. それぞれの基本群を求める。
5. $U \cap V$ のループが, U 側と V 側でどの語に対応するか調べる。
6. それらを同一視する関係式を加える。

3.10 例 1 : 8 の字空間

8 の字空間 $X = S^1 \vee S^1$ を考える。

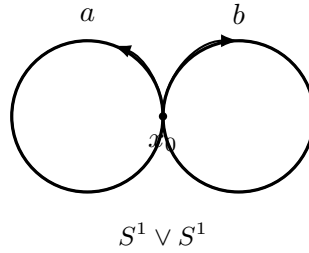


図 3.1 8 の字空間。共通点を基点とし, 左右の円周を一周するループをそれぞれ a, b とする。

左の円周を少し太らせた開近傍を U , 右の円周を少し太らせた開近傍を V とする。このとき $X = U \cup V$ であり, $U \simeq S^1$, $V \simeq S^1$, $U \cap V \simeq \{\text{点}\}$ である。

したがって $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(U \cap V) \cong 1$.

重なりの基本群は自明なので, 追加される関係式はない。よって, ファン・カンペンの定理より $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

左の円周を一周するループを a , 右の円周を一周するループを b と書けば, $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \langle a, b \mid \rangle$. これは a, b を生成元とする自由群 F_2 である。

自由群が現れる理由

8 の字空間では, 左の円周をまわるループと右の円周をまわるループを, 好きな順番でつなぐことができる。たとえば

$$ab, \quad a^{-1}b, \quad aba^{-1}b^2$$

のような語は, それぞれ異なる道筋を表す。

ここで重要なのは, 左の円周を一周する操作 a と右の円周を一周する操作 b の間に,

$$ab = ba$$

のような交換関係が存在しないことである。つまり, 左をまわってから右をまわるループと, 右をまわってから左をまわるループは, 一般には同じホモトピー類ではない。

このように, 生成元の間に余分な関係式がない群が自由群である。したがって, 8 の字空間の基本群は a, b を生成元とする自由群 F_2 になる。

具体例:8 の字空間のループを語として計算する

左の円を一周し、右の円を一周し、続けて右の円を逆向きに一周するループは、語として

$$abb^{-1} = a$$

に簡約されるので、左の円を一周するループとホモトープである。また、語 aba^{-1} の表すループの逆は $\overline{a * b * a}$, すなわち語 $ab^{-1}a^{-1}$ であり、実際に積をとると

$$(aba^{-1})(ab^{-1}a^{-1}) = ab(a^{-1}a)b^{-1}a^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1$$

と簡約される。基本群の中の計算が、語の簡約という組合せ的な計算に置き換わっている。

3.11 例 2：円周の開被覆の注意

円周 S^1 を二つの開弧で覆うことを考える。このとき U, V はどちらも可縮である。

一見すると $\pi_1(U) = 1$, $\pi_1(V) = 1$ なので、ファン・カンペンの定理から $\pi_1(S^1) = 1$ となりそうに見える。しかし、これは誤りである。実際には $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である。

問題は、 $U \cap V$ が弧状連結でないことである。二つの開弧で円周を覆うと、その共通部分は通常 2 つの連結成分を持つ。したがって、一基点版のファン・カンペンの定理の仮定を満たしていない。

仮定の重要性

ファン・カンペンの定理を使うときは、 U , V , $U \cap V$ が弧状連結であることを確認する必要がある。

特に、 $U \cap V$ が弧状連結でない場合、一つの基点だけでは重なり of 全情報を記録できない。

この例から、次のことが分かる。

- U と V がそれぞれ可縮でも、 $U \cup V$ が可縮とは限らない。
- $U \cap V$ が弧状連結でない場合、通常の一基点版のファン・カンペンの定理は直接使えない。
- 定理を使う前に、仮定を確認することが重要である。

後半へのつながり

このように交わりが非連結になる場合は、後半で学ぶホモロジー群のマイヤー・ヴィートリス完全系列が自然に働く。たとえば円周を二つの弧に分けると、交わりの二つの連結成分の差が $H_1(S^1)$ を生む。

3.12 2 セルを貼ると関係式が加わる

2 セルが関係式を生む理由

1 次元部分だけを見ると、ループは自由にまわることができる。しかし、そのループを境界とする 2 次元の円板を貼り付けると、そのループは円板の中で縮められるようになる。つまり、貼り付け写像が表すループは、基本群の中で単位元と同一視される。これが「2 セルを貼ると関係式が加わる」という意味である。曲面の基本群の表示では、多角形の境界語がまさにこの関係式になる。

ファン・カンペンの定理は、多角形の辺を貼り合わせて作る空間の基本群を計算するために用いられる。

基本的な考え方は、次の通りである。

1 骨格の基本群を求める 2 セルを貼る 境界語を関係式として加える

2 セル貼り付けの原理

空間 Y に 2 セルを貼り付けて $X = Y \cup_f D^2$ を作るとする。貼り付け写像 $f : S^1 \rightarrow Y$ が、 $\pi_1(Y)$ の中で語 w を表しているとする。

このとき、2 セルを貼ることにより、境界ループ w は円板で埋められる。したがって、基本群では $w = 1$ という関係式が追加される。

つまり $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y) / \langle\langle w \rangle\rangle$ 。

3.13 例 3：トーラスの基本群

トーラス T^2 は、正方形の向かい合う辺を貼り合わせて得られる。辺の向きを a , b , a^{-1} , b^{-1} とする。

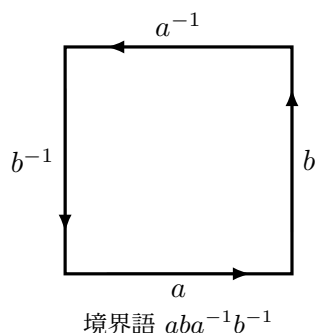


図 3.2 トーラスの多角形表示。境界を一周すると語 $aba^{-1}b^{-1}$ が得られる。

まず、正方形の境界だけを考える。貼り合わせ後、四つの頂点は一つの点に同一視され、二種類の辺 a, b が残る。したがって、1 骨格は $S^1 \vee S^1$ である。

よって、1 骨格の基本群は $F(a, b) = \langle a, b \mid \rangle$ である。

次に、正方形の内部を 2 セルとして貼り付ける。正方形の境界を指定された向きに沿って一周すると、 $aba^{-1}b^{-1}$ という語が得られる。

したがって、2 セルを貼ることにより $aba^{-1}b^{-1} = 1$ という関係式が加わる。

よって $\pi_1(T^2) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ 。

この関係式は $ab = ba$ と同値である。したがって $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ 。

具体例: トーラス上のループと $\mathbb{Z}^2$

正規閉包の節の具体例で見たように、 $\langle a, b \mid ab = ba \rangle$ の元は $a^m b^n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) の形に整理でき、対応 $a^m b^n \mapsto (m, n)$ が同型 $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ を与える。幾何的には、 m はループが a 方向（正方形の横方向）に巻き付く回数、 n は b 方向（縦方向）に巻き付く回数である。例えば

$$abab^{-1} = a(ba)b^{-1} = a \cdot ab \cdot b^{-1} = a^2$$

なので、ループ $abab^{-1}$ は a 方向に 2 回巻くループとホモトープである。順序を入れ替えても類が変わらない点が、8 の字空間の F_2 との決定的な違いである。

3.14 例 4：実射影平面の基本群

実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ は、円板 D^2 の境界円周上の反対点を同一視して得られる。

CW 複体としては、1 つの 0 セル、1 つの 1 セル a 、1 つの 2 セルからなる。1 骨格は円周 S^1 であり、 $\pi_1(S^1) \cong \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ である。

円板の境界を一周すると、1 セル a を 2 回同じ向きに通る。したがって、2 セルの境界語は a^2 である。

よって $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \langle a \mid a^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。

具体例: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元と幾何的な意味

関係式 $a^2 = 1$ から $a^{-1} = a$ であり、元は $\{1, a\}$ の 2 個だけである。冪はすべてこの 2 個に簡約される：

$$a^3 = a^2 \cdot a = a, \quad a^4 = (a^2)^2 = 1.$$

幾何的には、 $\mathbb{RP}^2$ 上のループ a は 1 回まわっただけでは一点に縮まない ($a \neq 1$)。しかし、同じループを 2 回続けてまわると、そのループは 2 セルの境界語 a^2 をなぞるので、貼り付けた円板の内部を通して一点に縮められる ($a^2 = 1$)。

射影平面とトーラスの違い

トーラスでは 2 セルの境界語が交換子 $aba^{-1}b^{-1}$ であった。一方、射影平面では境界語が a^2 である。

この違いが、基本群 $\mathbb{Z}^2$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の違いとして現れる。

3.15 例 5：球面の基本群

球面 S^2 は単連結であり、 $\pi_1(S^2) = 1$ である。

ここでは、ファン・カンペンの定理を用いた見方を述べる。 S^2 を北半球を少し広げた開集合 U と、南半球を少し広げた開集合 V の和として書く。

このとき $U \simeq D^2$, $V \simeq D^2$, であり、どちらも可縮である。また、 $U \cap V \simeq S^1$ である。

したがって $\pi_1(U) = 1$, $\pi_1(V) = 1$. 重なり $U \cap V$ のループは、 U の中でも V の中でも円板の中で縮む。そのため、全体の基本群も自明になる。

よって $\pi_1(S^2) = 1$.

球面の場合

球面には見た目には閉じた面としての「内部と外部の分離」があるが、基本群が測るのは 1 次元の穴である。球面上に描かれた任意のループは、球面上を動かしながら一点へ縮めることができる。

直感的には、輪ゴムを球面の表面に置くと、球面上を滑らせて小さく縮められる。トーラスのように輪ゴムが引っかかる穴がないためである。したがって、

$$\pi_1(S^2) = 1$$

となる。

3.16 まとめ

ファン・カンペンの定理は、空間の分解を群の貼り合わせに翻訳する定理である。基本群を直接定義から計算するのは難しいが、分解と変形レトラクトを組み合わせると、多くの例を体系的に扱える。この章で学んだ流れは次の通りである。

空間の分解 $\longrightarrow$ 各部分の基本群 $\longrightarrow$ 自由積 $\longrightarrow$ 重なりから来る関係式 $\longrightarrow$ 全体の基本群

特に、 $X = U \cup V$ と分解したとき、 $\pi_1(X)$ は $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$, $\pi_1(U \cap V)$ から計算できる。

また、多角形表示では、1 骨格の基本群を求め、2 セルの境界語を関係式として加えることで、全体の基本群を得る。

練習問題（標準）

- 2 つの円周を 1 点で貼り合わせた空間に、さらに 1 本の弧を同じ一点に付け加えた空間の基本群を求めよ。
- 4 個の円周のブーケ

$$\bigvee_{i=1}^4 S^1$$

の基本群を求めよ。

3. 群表示

$$\langle a, b \mid ab = 1 \rangle$$

で表される群が $\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ。

4. 群表示

$$\langle a, b \mid a = b^2, b^3 = 1 \rangle$$

を, 生成元を減らして簡単にせよ。

5. 2 つの単連結な開集合 U, V で空間 $X = U \cup V$ を覆い, $U \cap V$ が弧状連結であるとする。ファン・カンペンの定理から $\pi_1(X)$ について何がいえるか。
6. 1 つの円周に 2 セルを 3 回巻き付けて貼った空間の基本群を求めよ。
7. 2 つの円周のブーケに, 境界語 ab に沿って 2 セルを貼る。得られる空間の基本群を求めよ。
8. 融合積 $G *_A H$ において, A から来る元を G 側と H 側で同一視するとはどういう意味か説明せよ。
9. ファン・カンペンの定理を用いる際, 開被覆の交わりが空であると何が困るか説明せよ。
10. 2 セルの貼り付けが基本群に「関係式を加える」操作として現れる理由を説明せよ。

練習問題 (発展)

1. 2 つの円周のブーケに, 境界語 a^2b^{-3} に沿って 2 セルを貼った空間の基本群の表示を書け。
2. 群

$$\langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

の可換化を計算せよ。

3. 2 つの空間 X, Y が 1 点で交わり, その交わりが基点だけであるとき, $\pi_1(X \vee Y)$ が自由積になることを, ファン・カンペンの定理の言葉で説明せよ。

第 4 章

基本群の計算 (1) グラフと自由群

4.1 この章で学ぶこと

この章では、基本群の重要な計算例として、グラフの基本群を扱う。グラフは頂点と辺からなる基本的な 1 次元空間であり、基本群を具体的に計算できる。結論として、連結グラフの基本群は自由群になる。

- CW 複体の基本的な考え方を理解する。
- グラフを 1 次元 CW 複体として理解する。
- ブーケの基本群が自由群になることを理解する。
- 木が可縮であることを理解する。
- 連結グラフの基本群が $\pi_1(G) \cong F_{E-V+1}$ で与えられることを理解する。
- 極大木を用いて、具体的なグラフの基本群を計算できるようにする。
- 被覆空間と普遍被覆の考え方を通して、自由群の幾何的な意味を理解する。

学習の指針

本章の前提は、第 2 章の基本群、第 3 章のファン・カンペンの定理と自由積、および商位相の初歩である。初出の概念は、CW 複体、グラフ、木、極大木、自由群、被覆空間である。まず「極大木を一点に潰すと、残った辺がループになる」という一つの図式を目標にして読み進め、公式 $\pi_1(G) \cong F_{E-V+1}$ を具体例で手を動かして確かめてほしい。被覆空間以降の節は発展的な内容なので、初読では直観をつかめば十分である。

4.2 この章の位置づけ

前章までに、基本群の定義とファン・カンペンの定理を学んだ。基本群は、空間の中のループをホモトピーで分類する不変量である。

本章で扱うグラフは、基本群を具体的に計算できる最初の重要な例である。グラフの基本群は自由群になり、その階数は $E - V + 1$ で計算できる。ここで $V =$ 頂点数、 $E =$ 辺数 である。

この公式は、後に学ぶホモロジー群の公式 $H_1(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$ とも対応している。

本章の流れは次の通りである。

CW 複体 $\longrightarrow$ グラフ $\longrightarrow$ 木 $\longrightarrow$ 極大木 $\longrightarrow$ ブーケ $\longrightarrow$ 自由群

4.3 準備：CW 複体とは何か

CW 複体を使う理由

CW 複体では、空間を点、線分、円板、高次元の円板を順に貼り合わせて作る。この作り方は、基本群やホモロジー群の計算と相性がよい。

0 セルは頂点、1 セルは辺、2 セルは面に対応する。1 セルまでの情報はループを作り、2 セルはそのループに関係式を与える。したがって、CW 複体の構造を持つ空間では、「生成元」と「関係式」が図から読み取りやすくなる。

基本群を計算する空間は、しばしば点、線分、円板などを貼り合わせて作られる。そのような空間を体系的に扱うための枠組みが **CW 複体** である。

定義 4.1 (CW 複体). CW 複体とは、次元の低い部品から順に作られる位相空間である。

まず、点を集めた空間を **0 骨格** と呼び、これを X^0 と書く。

次に、 $n \geq 1$ に対して、いくつかの閉 n 次元球 D^n を、それぞれの境界 $S^{n-1} = \partial D^n$ 上の写像 $\varphi: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ に沿って貼り付けることにより、 n 骨格 X^n を作る。貼り付けられた D^n の内部に対応する部分を n セルという。

この操作を次元の低い方から順に行って得られる空間を CW 複体という。

本書では有限個のセルからなる場合だけを扱うので、点、線分、円板などを順に貼り合わせた空間と考えれば十分である。

低次元のセル

- 0 セルは点である。
- 1 セルは开区間であり、閉じた線分 D^1 の内部に対応する。
- 2 セルは開円板であり、閉円板 D^2 の内部に対応する。

具体例: 最小の CW 複体を作ってみる

- 1 点 $X^0 = \{v\}$ に、 $D^1 = [-1, 1]$ を両端 ± 1 ともに v へ貼り付けると、円周 S^1 ができる。頂点 1 個と辺 1 本からなる CW 複体である。
- 2 点 $\{v, w\}$ に D^1 を、 $-1 \mapsto v$ 、 $1 \mapsto w$ と貼ると、線分ができる。
- 1 点に D^2 を、境界 ∂D^2 全体をその点へ潰す写像で貼ると、 $D^2/\partial D^2$ 、すなわち球面 S^2 ができる。

同じ空間でも、貼り方によってセルの個数は変わる。基本群の計算では、セルの少ない CW 構造を選ぶほど計算が楽になる。

4.4 1 次元 CW 複体としてのグラフ

本章で主に扱うのは、1 次元 CW 複体である。

1 次元 CW 複体は、0 セルである頂点と、1 セルである辺から作られる。各辺は区間 $D^1 = [-1, 1]$ の内部に対応し、その両端 $S^0 = \{-1, 1\}$ が頂点に貼り付けられる。

したがって、1 次元 CW 複体は、直感的には「頂点と辺からなるグラフ」と考えてよい。

定義 4.2 (グラフ). 本書でグラフとは、有限個の頂点と有限個の辺からなる連結な 1 次元 CW 複体をいう。ループ辺や多重辺も許す。

ここで、

- **ループ辺**とは、始点と終点と同じ頂点である辺である。
- **多重辺**とは、同じ 2 つの頂点を結ぶ複数の辺である。

グラフの例

1. 円周 S^1 は、1 つの頂点と 1 本のループ辺からなるグラフと見なせる。
2. 8 の字グラフは、1 つの頂点と 2 本のループ辺からなるグラフである。
3. θ グラフは、2 つの頂点を 3 本の辺で結んだグラフである。

4.5 ブーケと自由群

定義 4.3 (ブーケ). n 個の円周を 1 点で貼り合わせた空間 $\bigvee_{i=1}^n S^1$ を n 個の円周の**ブーケ**という。

$n = 1$ のブーケは円周 S^1 である。 $n = 2$ のブーケは 8 の字グラフである。

復習: 自由群 F_n

集合 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 上の**自由群** $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ とは、文字 x_i と x_i^{-1} を有限個並べた語の全体を、隣り合う $x_i x_i^{-1}$ や $x_i^{-1} x_i$ を消す操作だけで同一視して得られる群である。積は語の連結、単位元は空語である。ミニ例として、 $F_2 = \langle a, b \rangle$ では $ab a^{-1} a b = ab^2$ のような簡約はできるが、 ab と ba はこの操作では移り合わないので異なる元である。つまり F_2 は可換ではない。

定理 4.4. n 個の円周のブーケの基本群は、階数 n の自由群である。すなわち、 $\pi_1(\bigvee_{i=1}^n S^1) \cong F_n$ 。

Proof. まず $n = 2$ の場合を考える。基点を 2 つの円周の共通点に取る。

左の円周を含む小さな開近傍を U 、右の円周を含む小さな開近傍を V とする。これらは $U \simeq S^1$ 、 $V \simeq S^1$ 、 $U \cap V \simeq \{\text{点}\}$ を満たすように取れる。

したがって $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$ 、 $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$ 、 $\pi_1(U \cap V) \cong 1$ である。

ファン・カンペンの定理より、 $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F_2$ を得る。

一般の n についても、同じ議論を繰り返せば、

$$\pi_1 \left(\bigvee_{i=1}^n S^1 \right) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ 個}} \cong F_n$$

である。 □

自由群の意味

自由群 $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ とは、生成元 $x_1, \dots, x_n$ の間に、群の公理から従うもの以外の関係式がない群である。

ブーケでは、各円周を一周するループが自由生成元になる。異なる円周をまわるループの間に特別な関係式はないため、基本群は自由群になる。(正確には、くさび点で各円周の中で良い点、すなわち可縮な近傍への変形レトラクトをもつ点であることを用いている。円周の標準的な CW 構造では、この条件は自動的に満たされる。)

4.6 木は可縮である

木を一点に縮める操作

木には閉路がないので、端の頂点から順に枝を折りたたんでいくことができる。葉にあたる頂点と、そこから出ている辺を隣の頂点へ縮めても、穴は生じない。この操作を繰り返すと、最後には一点だけが残る。

したがって木は可縮であり、基本群は自明である。グラフの基本群で本質的なのは、木ではなく、木に付け加えられた閉路である。

グラフの基本群を計算するためには、木が可縮であることが重要である。

定義 4.5 (木). 連結グラフ T が**木**であるとは、閉路を持たないことをいう。

木は、枝分かればしても、ぐるっと一周する道を持たないグラフである。

具体例: 木であるもの・木でないもの

- 1 本の線分や、線分を枝状につないだ Y 字形・H 字形のグラフは木である。
- 3 つの頂点を 3 本の辺で結んだ三角形グラフは、一周する閉路を持つので木ではない。
- ループ辺 1 本からなる円周も、そのループ辺自身が閉路なので木ではない。

命題 4.6. 有限木は可縮である。したがって $\pi_1(T) \cong 1$ である。

Proof. 辺の本数に関する帰納法で示す。辺を持たない有限木は 1 点なので可縮である。次に、 T が少なくとも 1 本の辺を持つ有限木であるとする。有限木は閉路を持たないので、次数 1 の頂点、すなわち葉 v を持つ。 v に接続する唯一の辺を e とし、 e のもう一方の端点を w とする。

部分グラフ $e \cup \{v, w\}$ は、 w を固定したまま e 全体を w へ縮める変形レトラクトを持つ。したがって、 T は、葉 v と辺 e を取り除いた部分木 T' に変形レトラクトする。 T' は T より辺の本数が 1 本少ない有限木である。帰納法の仮定より T' は可縮であるから、 T も可縮である。 □

復習: 変形レトラクト

部分空間 $A \subset X$ が X の**変形レトラクト**であるとは、連続写像 $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ で、すべての $x \in X$, $a \in A$, $t \in [0, 1]$ に対して $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) \in A$, $H(a, t) = a$ を満たすものが存在することをいう (第 1 章)。このとき包含写像 $A \hookrightarrow X$ はホモトピー同値であり、 $\pi_1(A) \cong \pi_1(X)$ となる。ミニ例として、線分 $[0, 1]$ は $H(x, t) = (1 - t)x$ により 1 点 $\{0\}$ に変形レトラクトする。上の証明では、これを葉の辺 e ごとに繰り返している。

木が可縮である直感

木には閉路がない。したがって、どの枝も端から順に縮めていくことができる。最終的に 1 点に縮むので、木は穴を持たない空間である。

4.7 極大木

極大木をつぶす意味

極大木 T は可縮なので、基本群を計算するときには一点につぶしてよい。すると、 T に含まれない各辺が一点に両端をもつループになる。

したがって、連結グラフの基本群の生成元は、「極大木に入らなかった辺」に対応する。辺の総数を e 、頂点の総数を v とすると、極大木には $v - 1$ 本の辺があるので、残る辺の数は

$$e - (v - 1) = e - v + 1$$

である。これが自由群のランクになる。

一般の連結グラフは、木に余分な辺を加えたものと考えられる。このとき基準になる木が**極大木**である。

定義 4.7 (極大木). 連結グラフ G の部分グラフ T が**極大木**であるとは、

- T は木である。
- T は G のすべての頂点を含む。

を満たすことをいう。

極大木は、グラフのすべての頂点をつなぐが、閉路を含まない部分グラフである。

具体例: 三角形グラフの極大木

頂点 v_1, v_2, v_3 を、辺 $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_1$ で結んだ三角形グラフを考える。2 本の辺 $T = \{e_1, e_2\}$ (に 3 つの頂点を合わせた部分グラフ) は、すべての頂点を含み、閉路を持たないので極大木である。 $\{e_2, e_3\}$ や $\{e_3, e_1\}$ を選んでもよく、極大木の選び方は一意ではない。しかし、どの選び方でも極大木の辺数は $V - 1 = 2$ 本であり、残る辺はちょうど $E - V + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$ 本である。

頂点数が V の連結グラフでは、極大木は $V - 1$ 本の辺を持つ。

したがって、もとのグラフ G の辺数が E であれば、極大木に含まれない辺の数は $E - (V - 1) = E - V + 1$ である。

この数が、基本群の自由生成元の数になる。

4.8 一般の連結グラフの基本群

定理 4.8. G を有限連結グラフとする。頂点数を V 、辺数を E とすると、 $\pi_1(G) \cong F_{E-V+1}$ 。

Proof. G の極大木 T を取る。 T は木であるから可縮である。

したがって、 T を 1 点に潰す商写像 $G \rightarrow G/T$ はホモトピー同値を与える。

商空間 G/T では、極大木 T のすべての頂点と辺が 1 点に縮約される。一方、 T に含まれない辺は、それぞれその 1 点を基点とする円周になる。

その本数は $E - (V - 1) = E - V + 1$ である。したがって $G/T \cong \bigvee_{i=1}^{E-V+1} S^1$ である。

よって

$$\pi_1(G) \cong \pi_1(G/T) \cong \pi_1\left(\bigvee_{i=1}^{E-V+1} S^1\right) \cong F_{E-V+1}.$$

□

復習: 商空間 X/A

部分空間 $A \subset X$ に対して、 A の点をすべて 1 点に同一視して得られる空間を X/A と書き、商位相を入れる。ミニ例として、線分の両端を同一視すると $[0, 1]/\{0, 1\}$ は円周 S^1 と同相になる。上の証明に現れる G/T は、極大木 T 全体を 1 点にした商空間である。一般に、CW 複体の可縮な部分複体を 1 点に潰す商写像はホモトピー同値になることが知られており、証明ではこの事実を用いている。

計算の手順

連結グラフ G の基本群を求めるには、次の手順を用いればよい。

1. 頂点数 V と辺数 E を数える。
2. 極大木を 1 つ選ぶ。
3. 極大木に含まれない辺の本数を数える。
4. その本数を階数とする自由群を答える。

$$\pi_1(G) \cong F_{E-V+1}.$$

具体例: θ グラフで手順を最後まで実行する

頂点 v, w と、 v から w へ向かう 3 本の辺 a, b, c からなる θ グラフで、生成元まで込めて手順を実行してみる。

1. 頂点数と辺数は $V = 2$, $E = 3$ である。

2. 極大木として $T = \{a\}$ (と両頂点) を選ぶ。
3. T に含まれない辺は b, c の 2 本である。
4. よって $\pi_1(\theta, v) \cong F_2$ である。

自由生成元は、木 T の辺を使って基点 v へ戻るループとして書ける。すなわち、 b を通ってから a を逆向きにたどるループ $x = [b * \bar{a}]$ と、同様の $y = [c * \bar{a}]$ の 2 つである。商空間 θ/T は 8 の字グラフであり、 x, y はその 2 つの円周に対応している。

4.9 具体例

例 1：円周

円周を 1 つの頂点と 1 本のループ辺からなるグラフと見る。このとき $V = 1, E = 1$ 。したがって $E - V + 1 = 1$ 。よって $\pi_1(S^1) \cong F_1 \cong \mathbb{Z}$ 。

例 2：8 の字グラフ

8 の字グラフは、1 つの頂点と 2 本のループ辺からなる。したがって $V = 1, E = 2$ 。よって $E - V + 1 = 2$ 。したがって $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F_2$ 。

例 3： θ グラフ

θ グラフは、2 つの頂点を 3 本の辺で結んだグラフである。したがって $V = 2, E = 3$ 。よって $E - V + 1 = 2$ 。したがって $\pi_1(\theta) \cong F_2$ 。

実際、3 本の辺のうち 1 本を極大木として選ぶと、残る 2 本の辺が 2 つの自由生成元を与える。

例 4：正方形の 1 骨格

正方形の 1 骨格は、4 つの頂点と 4 本の辺からなる連結グラフである。したがって $V = 4, E = 4$ 。よって $E - V + 1 = 1$ 。したがって $\pi_1(\text{正方形の 1 骨格}) \cong F_1 \cong \mathbb{Z}$ 。これは正方形の 1 骨格が円周と同じホモトピー型を持つことに対応している。

例 5：立方体の 1 骨格

立方体の 1 骨格を考える。立方体は $V = 8$ 個の頂点と $E = 12$ 本の辺を持つ。したがって $E - V + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$ 。よって $\pi_1(\text{立方体の 1 骨格}) \cong F_5$ 。

4.10 オイラー標数との関係

1 次元複体では、オイラー標数は $\chi(G) = V - E$ である。

連結グラフの基本群は自由群なので、その自由群としての階数は $\text{rank } \pi_1(G) = E - V + 1$ 。したがって $\text{rank } \pi_1(G) = 1 - \chi(G)$ と書ける。

この関係は、後半で学ぶホモロジー群にもつながる。実際、連結グラフでは $H_1(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$

であり、これは基本群の可換化 $\pi_1(G)^{\text{ab}}$ と一致する。

具体例: 階数とオイラー標数の関係の検算

- 8 の字グラフでは $V = 1$, $E = 2$ なので $\chi = 1 - 2 = -1$ であり, $1 - \chi = 2$ は $\pi_1 \cong F_2$ の階数と一致する。
- θ グラフでは $\chi = 2 - 3 = -1$ であり, $1 - \chi = 2$ は F_2 の階数と一致する。
- 立方体の 1 骨格では $\chi = 8 - 12 = -4$ であり, $1 - \chi = 5$ は F_5 の階数と一致する。

オイラー標数 $\chi = V - E$ は極大木の選び方によらずに数えられるので、この検算はどの極大木を選んで計算した場合でも同じ答えを与える。

4.11 次章への橋渡し：2 セルの貼り付け

本章の計算では、グラフ、すなわち 1 次元 CW 複体の基本群を求めた。次章で扱う閉曲面は、このグラフに 2 セルを貼り付けて作られる。

1 骨格の基本群は自由群であり、2 セルの境界がその自由群の中の語を与える。ファン・カンペンの定理により、2 セルを貼ることは、その境界語を 1 とする関係式を加えることに対応する。したがって、閉曲面の基本群は

$$\text{自由群} + \text{境界語から来る関係式}$$

として計算される。この見方が、第 5 章の多角形表示の計算の基本である。

基本群とホモロジーの対応

グラフの基本群は自由群 F_{E-V+1} である。その可換化は $F_{E-V+1}^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$ である。これは後で学ぶ第一ホモロジー群 $H_1(G; \mathbb{Z})$ と一致する。

4.12 被覆空間への入口

以下は発展的な内容であるが、基本群を幾何的に理解するうえで有用である。

定義 4.9 (被覆写像). 連続写像 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が被覆写像であるとは、任意の点 $x \in X$ に対して、 x の開近傍 U が存在し、 $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ と互いに交わらない開集合の和に分解され、各制限写像 $p|_{U_\lambda}: U_\lambda \rightarrow U$ が同相写像になることをいう。このとき $\tilde{X}$ を X の被覆空間という。

局所的には、 X の近くの形が $\tilde{X}$ の中に何枚も重なって見えていると考えればよい。被覆空間では、大域的なループの巻き付きがほどかれて見える。

直観: 被覆写像はらせん階段

典型例は $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ である。 $\mathbb{R}$ をらせん階段のように巻いて、真上から円周へ射影していると思えばよい。円周の小さな弧 U の真上には、階段の各段に 1 枚ずつ、 U のコピー（シート）が積み重なっている。これが定義の分解 $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda} U_\lambda$ の意味である。つま

り被覆空間は、局所的には X と同じ形をしているが、大域的な巻き付き方だけが異なる空間である。

4.13 円周の普遍被覆

円周の普遍被覆

写像 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$ を考える。

十分小さい弧 $U \subset S^1$ を取れば, $p^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}$ 中の互いに離れた開区間の和に分かれ, 各開区間から U への制限は同相写像になる。したがって, p は被覆写像である。

基点 $1 \in S^1$ と $0 \in \mathbb{R}$ を取る。円周上のループ $\gamma_n(s) = e^{2\pi i ns}$ ($0 \leq s \leq 1$) を考えると, これは $\tilde{\gamma}_n(s) = ns$ によって $\mathbb{R}$ に持ち上がる。

この持ち上げは $\tilde{\gamma}_n(0) = 0$ を満たし, 終点は $\tilde{\gamma}_n(1) = n$ である。

つまり, ループが円周を何回まわったかという情報は, 持ち上げた道の終点の整数 n として読み取れる。このことが $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の背景にある。

4.14 道の持ち上げ

道の持ち上げ

被覆写像 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ と点 $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ を取り, $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ とする。

基点付きの道 $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, $\gamma(0) = x_0$ に対して, 始点を $\tilde{x}_0$ にもつ道 $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ で $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ を満たすものがただ 1 つ存在する。これを γ の持ち上げという。

特に γ がループであれば, 持ち上げの終点 $\tilde{\gamma}(1)$ は $p^{-1}(x_0)$ の点になる。普遍被覆では, この終点がループの巻き付き方を記録する。

具体例: 持ち上げで $\pi_1(S^1)$ の群構造を見る

$p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$ と, 始点 $0 \in \mathbb{R}$ を取る。 m 周するループ $\gamma_m(s) = e^{2\pi i ms}$ の持ち上げは $\tilde{\gamma}_m(s) = ms$ で, 終点は m である。次に, 積 $\gamma_m * \gamma_n$ を 0 を始点として持ち上げる。前半では $\tilde{\gamma}_m$ に沿って 0 から m まで進む。後半では, γ_n の持ち上げのうち始点が m のもの, すなわち $m + ns$ をたどる。したがって終点は $m + n$ である。つまり, ループの積が持ち上げの終点の足し算に対応しており, これが同型 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ の群構造の正体である。

4.15 トーラスとクラインの壺の普遍被覆

トーラスの普遍被覆

トーラスは $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と表せる。具体的には, $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$, $p(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ を考える。

これは被覆写像であり, $\mathbb{R}^2$ は単連結なので, p はトーラスの普遍被覆である。

トーラス上のループを $\mathbb{R}^2$ に持ち上げると, 終点は $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ になる。この整数対 (m, n) は, 第一の円周方向に m 回, 第二の円周方向に n 回巻いたことを表す。

したがって $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ 。

この見方では, デッキ変換は平面の平行移動 $(x, y) \mapsto (x + m, y + n)$ ($(m, n) \in \mathbb{Z}^2$) で与えられる。

クラインの壺の普遍被覆

クラインの壺 $\mathcal{K}$ も平面 $\mathbb{R}^2$ を普遍被覆として持つ。ただし, トーラスとは異なり, デッキ変換には向きを反転するものが含まれる。

例えば $A(x, y) = (-x, y + 1)$, $B(x, y) = (x + 1, y)$ で生成される $\mathbb{R}^2$ 上の変換群 Γ を考えると, $\mathcal{K} \cong \mathbb{R}^2/\Gamma$ である。

ここで $ABA^{-1} = B^{-1}$ が成り立つ。したがって $\Gamma \cong \langle A, B \mid ABA^{-1} = B^{-1} \rangle$ 。これはクラインの壺の基本群の標準的な表示 $\pi_1(\mathcal{K}) \cong \langle a, b \mid aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ に対応している。

トーラスでは 2 つの巻き付き方向が可換であったが, クラインの壺では一方の方向に一周すると他方の方向が反転する。この違いが基本群の違いとして現れる。

4.16 グラフの普遍被覆

連結グラフ G の普遍被覆は木になる。これは, グラフの中にある閉路が, 普遍被覆の中ではほどけることを意味する。

グラフの普遍被覆

連結グラフ G の普遍被覆 $p: T \rightarrow G$ では, T は木である。木には閉路がないので, $\pi_1(T) = 1$ である。

したがって, G のループは, T の中では始点と終点異なる道として現れる。

たとえば, 8 の字グラフ $S^1 \vee S^1$ の普遍被覆は無限木になる。

2 つの円に対応する生成元を a, b と書くと, 自由群の元は a, b, a^{-1}, b^{-1} を使った簡約語として表される。簡約語は, 普遍被覆である木の中の異なる頂点へ進む道として理解できる。

このため $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong F(a, b)$ が幾何的に理解できる。

具体例:8 の字グラフの普遍被覆は 4 価の木

8 の字グラフの普遍被覆 T は、各頂点からちょうど 4 本の辺 (a 方向, a^{-1} 方向, b 方向, b^{-1} 方向) が出る無限木である。基点の持ち上げ $\tilde{x}_0$ から出発すると、 T の頂点は a, b の簡約語と 1 対 1 に対応する。たとえば語 aba^{-1} には、 $\tilde{x}_0$ から「 a の辺, b の辺, a の辺の逆向き」とたどった道の終点に対応する。語を簡約する操作 (aa^{-1} などを消す操作) は、木の中で「進んですぐ戻る」無駄な往復を消すことに対応する。異なる簡約語が木の異なる頂点に到達することが、 F_2 の異なる簡約語が異なる元を定めることの幾何的な理由である。

4.17 デッキ変換群への予告

被覆写像 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ に対しては、被覆空間の上でシートを入れ替える同相写像を考えることができる。これをデッキ変換という。

一般の被覆では、デッキ変換群は基本群全体ではなく、被覆空間の対称性を表す部分的な情報である。一方、普遍被覆では、適切な仮定の下で、基本群はデッキ変換群と同一視できる。直感的には、基本群の元は、普遍被覆の上で基点の持ち上げをどこへ移すかによって記録される。

この見方は、次章で扱う閉曲面の基本群や被覆空間の理解に役立つ。

直観: デッキ変換の最小の例

普遍被覆 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ では、平行移動 $t \mapsto t + n$ ($n \in \mathbb{Z}$) が $p(t + n) = p(t)$ を満たす同相写像であり、これがデッキ変換である。デッキ変換群は $\mathbb{Z}$ であり、 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ と一致している。実際、 n 周するループの持ち上げは基点の持ち上げ 0 を終点 n へ運ぶが、これはデッキ変換 $t \mapsto t + n$ で 0 を移した点にほかならない。トーラスの例で見た平行移動群 $\mathbb{Z}^2$ も同様であり、いずれも「基本群はデッキ変換群と同一視できる」こと具体例である。

4.18 まとめ

連結グラフの基本群は必ず自由群になる。計算の要点は次の三点である。

- 極大木を見つけること。
- 木は可縮であること。
- 極大木に含まれない辺の本数が、自由群の生成元の数になること。

頂点数を V 、辺数を E とする有限連結グラフ G については、 $\pi_1(G) \cong F_{E-V+1}$ である。

この公式は、後半で扱うホモロジー群の計算 $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$ とも対応している。

また、被覆空間の考え方を使うと、自由群は無限木のデッキ変換や、簡約語に対応する道として幾何的に理解できる。

練習問題 (標準)

1. 完全グラフ K_4 の頂点数と辺数を数え、その基本群を自由群として求めよ。
2. 2 つの三角形が 1 つの頂点だけを共有するグラフを考える。このグラフの基本群の階数を求めよ。
3. 連結グラフ G が頂点数 $V = 8$, 辺数 $E = 11$ を持つとする。 $\pi_1(G)$ を自由群として表せ。
4. 木に新しく 3 本の辺を付け加えて連結グラフを作った。このグラフの基本群の階数を求めよ。
5. 正方形に 1 本の対角線を加えたグラフを考える。極大木を 1 つ選び、残った辺に対応する自由生成元の個数を求めよ。
6. 2 つの円周を 1 本の線分でつないだグラフの基本群を求めよ。
7. 連結グラフでない場合、基点の属する連結成分だけが基本群に関係する。このことを例を挙げて説明せよ。
8. 連結グラフ G において、 $E - V + 1 = 0$ であることと G が木であることの関係を説明せよ。
9. 極大木を潰しても基本群が変わらない理由を、変形レトラクトの観点から説明せよ。
10. 自由群の階数が、グラフの「独立な閉路の数」を表していることを説明せよ。

練習問題 (発展)

1. 連結グラフ G の各頂点の次数がすべて 3 で、頂点数が 10 であるとする。基本群の階数を求めよ。
2. 2 つのグラフを 1 点で貼り合わせたとき、基本群の自由群としての階数が足し算になる理由を説明せよ。
3. 連結グラフ G の第一ホモロジー群が

$$H_1(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$$

になることを、基本群の可換化という観点から説明せよ。

第 5 章

基本群の計算 (2) 閉曲面の基本群

5.1 この章で学ぶこと

本章の主題は、閉曲面の基本群を、多角形表示とファン・カンペンの定理を用いて計算することである。あわせて、普遍被覆空間とデッキ変換群の関係、基本群の可換化、および基本的な 3 次元多様体の基本群も整理する。

- 普遍被覆空間とデッキ変換群の関係を理解する。
- 多角形の辺の貼り合わせから、閉曲面を CW 複体として理解する。
- 2 セルを貼ると、境界語が基本群の関係式になることを理解する。
- トーラス、射影平面、クラインの壺、向き付け可能閉曲面、向き付け不可能閉曲面の基本群を計算する。
- 基本群の可換化が第一ホモロジー群につながることを理解する。
- ソリッドトーラス、ハンドル体、 $S^2 \times S^1$ 、 $\mathbb{RP}^3$ 、レンズ空間の基本群を、変形レトラクトや被覆空間から計算する。

学習の指針

この章の計算は、どれも「1 骨格の基本群は自由群」+「2 セルの境界語が関係式になる」という 2 段階である。前提となるのは、第 3 章のファン・カンペンの定理と、第 4 章のグラフの基本群・被覆空間の持ち上げである。初出の概念は、デッキ変換、連結和、可換化（アーベル化）、レンズ空間の 4 つである。群論からは、正規部分群と商群、および群の表示 $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ を使うので、不安があれば巻末付録「群論と線形代数の要点」を先に眺めておくとよい。迷ったら、まずトーラスの計算（正方形 1 枚）を完全に理解してから一般の場合に進むこと。

5.2 この章の位置づけ

前章までに、円周やグラフの基本群を計算した。特に、連結グラフ G の頂点数を V 、辺数を E とすると、 $\pi_1(G) \cong F_{E-V+1}$ であった。ここで F_r は階数 r の自由群である。

本章で扱う閉曲面は、グラフに 2 次元の円板を貼り付けた空間として理解できる。したがって、まず 1 骨格の基本群を自由群として計算し、そこに 2 セルの境界から来る関係式を加えることで、閉曲

面の基本群を求める。

基本的な流れは次の通りである。

多角形表示 $\rightarrow$ 1 骨格 $\rightarrow$ 自由群 $\rightarrow$ 2 セルの境界語 $\rightarrow$ 基本群の表示

5.3 普遍被覆空間とデッキ変換群

普遍被覆と基本群

普遍被覆空間は、もとの空間のループをほどいた空間である。円周の普遍被覆が直線であるように、普遍被覆の上では、円周を何回まわったかという情報が、直線上でどれだけ移動したかという情報に変わる。

デッキ変換は、普遍被覆を保ちながら各点を同じファイバー内の別の点へ移す対称性である。一般の被覆では、デッキ変換群は基本群全体を表すとは限らず、被覆空間の対称性を表す部分的な情報である。しかし普遍被覆の場合には、適切な仮定の下で、デッキ変換群は基本群と同型になる。そのため、基本群は「普遍被覆の対称性」としても理解できる。

第4章では、グラフの普遍被覆空間を例に、ループを持ち上げた終点が基本群の元を記録することを見た。ここでは、その考え方を整理しておく。

復習：被覆空間と普遍被覆

連続な全射 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ が被覆写像であるとは、各点 $x \in X$ が開近傍 U を持ち、 $p^{-1}(U)$ が互いに交わらない開集合（シート）の和集合であって、各シートが p によって U と同相になることをいう。被覆空間 $\tilde{X}$ が単連結（弧状連結かつ $\pi_1(\tilde{X}) = 1$ ）であるとき、 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を普遍被覆という。

ミニ例： $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ では、 S^1 の小さい弧 U の逆像は、 $\mathbb{R}$ 中の可算無限個の开区間（シート）である。 $\mathbb{R}$ は可縮、特に単連結なので、これは S^1 の普遍被覆である。

定義 5.1 (デッキ変換). 被覆写像 $p: \tilde{X} \rightarrow X$ に対して、同相写像 $h: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ が $p \circ h = p$ を満たすとき、 h を被覆 p のデッキ変換という。

デッキ変換全体は写像の合成を積として群をなし、これを $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$ と書く。

条件 $p \circ h = p$ は、 h が上の空間 $\tilde{X}$ では点を動かすが、下の空間 X から見ると何も変えていないことを意味する。

つまり、デッキ変換は被覆空間のシートを入れ替える対称性である。

具体例：円周のデッキ変換を条件から確かめる

$p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ とする。 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $h(t) = t + n$ とおくと、

$$p(h(t)) = e^{2\pi i(t+n)} = e^{2\pi i t} e^{2\pi i n} = e^{2\pi i t} = p(t)$$

なので、 h はデッキ変換である。一方、 $h(t) = t + \frac{1}{2}$ とすると $p(h(t)) = e^{2\pi i t} e^{\pi i} = -e^{2\pi i t} \neq p(t)$

であり、デッキ変換ではない。つまり、整数だけずらす平行移動がちょうどシートの入れ替えに対応し、 $\text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) = \{t \mapsto t + n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ となる。

定理 5.2 (普遍被覆と基本群). X を弧状連結, 局所弧状連結, 半局所単連結な空間とし, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を普遍被覆とする。基点 $x_0 \in X$ とその持ち上げ $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ を固定する。このとき, ループの積とデッキ変換の合成に関する標準的な規約を固定すれば, $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)$ である。より正確には, ループの積とデッキ変換の合成の規約によっては, この対応は反同型として現れる。

対応の考え方. 基点 $x_0 \in X$ と, その持ち上げ $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ を固定する。

ループ $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ を, 始点 $\tilde{x}_0$ から持ち上げる。その持ち上げを $\tilde{\alpha}$ とすると, 終点 $\tilde{\alpha}(1)$ は同じファイバー $p^{-1}(x_0)$ の点である。

普遍被覆の場合, ファイバーの任意の点 $\tilde{y} \in p^{-1}(x_0)$ に対して, $h(\tilde{x}_0) = \tilde{y}$ を満たすデッキ変換 h がただ 1 つ存在する。したがって, ループの持ち上げは, 基本群の元とデッキ変換を対応させる。ここで, ループの積をどちらから先にたどるか, またデッキ変換の合成をどちらの順に書くかによって, 得られる対応が同型になる場合と反同型になる場合がある。本書では, この違いは規約の問題として扱い, 基本的な幾何的対応を重視する。□

直観：持ち上げの終点がデッキ変換を決める

円周で対応を最後まで追ってみる。 n 回巻くループ $\alpha_n(s) = e^{2\pi i n s}$ を, $\tilde{x}_0 = 0$ を始点として $\mathbb{R}$ へ持ち上げると $\tilde{\alpha}_n(s) = ns$ であり, 終点は $\tilde{\alpha}_n(1) = n$ である。ファイバー $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ の中で 0 を n に送るデッキ変換は, 平行移動 $h_n(t) = t + n$ ただ 1 つである。こうして $[\alpha_n] \mapsto h_n$ という対応が得られ, 巻き数の足し算 $[\alpha_m][\alpha_n] = [\alpha_{m+n}]$ が平行移動の合成 $h_m \circ h_n = h_{m+n}$ に対応する。定理はこの現象を一般の普遍被覆に拡張したものである。

基本例

1. 円周の普遍被覆は $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ である。デッキ変換は $t \mapsto t + n$ ($n \in \mathbb{Z}$) で与えられる。したがって $\text{Deck}(\mathbb{R}/S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$.
2. トーラスの普遍被覆は $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ である。デッキ変換は $(x, y) \mapsto (x + m, y + n)$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) であり, $\text{Deck}(\mathbb{R}^2/T^2) \cong \mathbb{Z}^2$. したがって $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$.
3. 実射影平面の普遍被覆は $S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ である。非自明なデッキ変換は対蹠写像 $x \mapsto -x$ である。したがって $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5.4 2 セルを貼ると関係式が入る

閉曲面の基本群は, 多角形の辺の貼り合わせから計算できる。その基本原理は次の通りである。

基本原理：2 セルの境界語

連結なグラフ G に 2 セル D^2 を貼り付けて $X = G \cup_{\varphi} D^2$ を作るとする。

貼り付け写像 $\varphi: \partial D^2 \rightarrow G$ が $\pi_1(G)$ の元、すなわち語 r を表すならば、ファン・カンペンの定理により $\pi_1(X) \cong \pi_1(G)/\langle\langle r \rangle\rangle$ である。

つまり、2 セルを貼ることは、境界語 r を $r = 1$ という関係式として加えることに対応する。

復習：正規閉包 $\langle\langle r \rangle\rangle$

群 G の元 r の**正規閉包** $\langle\langle r \rangle\rangle$ とは、 r を含む最小の正規部分群のことであり、共役たち grg^{-1} ($g \in G$) とその逆元の積全体からなる。商群を作るには正規部分群で割る必要があるので、「 $r = 1$ とおく」という操作は、正確には $\langle\langle r \rangle\rangle$ で割ることを意味する。

ミニ例：自由群 $F(a, b)$ の中で、 $\langle\langle a \rangle\rangle$ は a だけでなく bab^{-1} や $b^2a^{-1}b^{-2}$ も含む。群の表示 $\langle x_1, \dots, x_n \mid r \rangle$ は、自由群 $F(x_1, \dots, x_n)$ を $\langle\langle r \rangle\rangle$ で割った商群の略記である。

特に、1 骨格が n 個の円周のブーケ $S^1 \vee \dots \vee S^1$ であれば、その基本群は自由群 $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ である。

そこに 2 セルを 1 個貼ると、境界語に対応する関係式が 1 本加わる。

$$\pi_1(X) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid r = 1 \rangle.$$

具体例：円周に円板を a^n で貼る

円周 S^1 の基本群の生成元を a とし、円板 D^2 を貼り付け写像 $\varphi: \partial D^2 \rightarrow S^1$, $\varphi(e^{2\pi is}) = e^{2\pi ins}$ (境界を n 回巻き付ける写像) で貼る。境界語は a^n なので、

$$\pi_1(S^1 \cup_{\varphi} D^2) \cong \langle a \mid a^n = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

$n = 1$ のときは円板をそのまま蓋をするように貼るので空間は可縮になり、実際に $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = 1$ と合う。 $n = 2$ のときは、次節以降で見る実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ がまさにこの構成であり、 $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる。

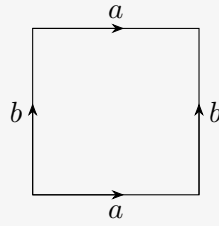
この原理を用いて、閉曲面の基本群を計算する。

5.5 トーラスの基本群

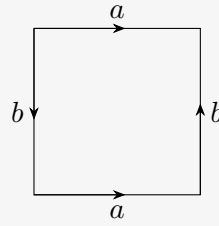
トーラス T^2 は、正方形の向かい合う辺を同じ向きに貼り合わせて得られる。辺を a, b と名付ける。

直観：正方形からトーラス・クラインの壺を作る手順

下図の左がトーラス、右がクラインの壺の貼り合わせ図である。矢印が同じ向きになるように、同じラベルの辺どうしを貼り合わせる。



トーラス



クラインの壺

境界語は、左下の頂点から反時計回りに境界を一周し、矢印と同じ向きに通る辺はそのまま、逆向きに通る辺は逆元として読む。トーラスでは、下 a 、右 b 、上（矢印と逆向き） a^{-1} 、左（矢印と逆向き） b^{-1} の順で $aba^{-1}b^{-1}$ となる。クラインの壺では左の辺の矢印が反転しているため、左を上から下へ通るとき矢印と同じ向きになり、境界語は $aba^{-1}b$ となる。これは第 4 章でデッキ変換群から得た表示 $\langle a, b \mid aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ の関係式 $aba^{-1}b = 1$ と同じ語であり、第 12 章のホモロジー計算でもこの語を用いる。また、貼り合わせを追うと、どちらの図でも正方形の 4 つの頂点はすべて 1 点に同一視されることが確かめられる。トーラスでは、 a どうしの貼り合わせで左下と左上（および右下と右上）が、 b どうしの貼り合わせで左下と右下（および左上と右上）が同一視される。クラインの壺では、 a どうしの貼り合わせは同じであり、 b どうしの貼り合わせでは左上と右下、左下と右上が同一視されるので、やはり 4 頂点は 1 点になる。

貼り合わせ後、トーラスは 1 つの 0 セル、2 つの 1 セル a, b 、1 つの 2 セルからなる CW 複体と見なせる。

1 骨格は $S^1 \vee S^1$ であり、その基本群は $F(a, b) = \langle a, b \rangle$ である。

正方形の境界を一周すると、2 セルの境界語は $aba^{-1}b^{-1}$ である。したがって、ファン・カンペンの定理より $\pi_1(T^2) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$ 。

関係式 $aba^{-1}b^{-1} = 1$ は $ab = ba$ と同値である。したがって $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ 。

確認

トーラスの基本群は 2 つの独立な方向の巻き数を記録する。一方の方向を a 、もう一方を b とすれば、これらは可換である。したがって $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 。

5.6 実射影平面の基本群

実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ は、円板 D^2 の境界円周上の反対点を同一視して得られる。CW 複体としては、1 つの 0 セル、1 つの 1 セル a 、1 つの 2 セルからなる。

1 骨格は円周 S^1 であり、 $\pi_1(S^1) \cong \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ である。

円板の境界を一周すると、境界円周の前半も後半も同じ向きで 1 セル a に貼り付く。したがって、2 セルの境界語は a^2 である。

よって $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \langle a \mid a^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。

被覆空間から見た別証明

$S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ は 2 重被覆であり, S^2 は単連結である。したがって, これは $\mathbb{RP}^2$ の普遍被覆である。

デッキ変換群は恒等写像と対蹠写像の 2 元からなるので, $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \text{Deck}(S^2/\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と分かる。

5.7 向き付け可能閉曲面の基本群

種数 g の向き付け可能閉曲面を Σ_g と書く。直感的には, Σ_g は穴が g 個ある閉曲面である。例えば $\Sigma_0 = S^2$, $\Sigma_1 = T^2$ である。

$g \geq 1$ のとき, Σ_g は $4g$ 角形の辺を $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ の順に貼り合わせて得られる。

境界語は $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ である。

交換子 $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ を用いると, これは $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ と書ける。

定理 5.3. $g \geq 1$ に対して,

$$\pi_1(\Sigma_g) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

である。

また $\pi_1(\Sigma_0) = \pi_1(S^2) = 1$ である。

証明の考え方 (直感) . 多角形のすべての頂点は, 貼り合わせ後に 1 点に同一視される。したがって, 1 骨格は $2g$ 個の円周のブーケと同じホモトピー型を持つ。

よって 1 骨格の基本群は自由群 $F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ である。

2 セルの境界は, 1 骨格の中で $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ というループを表す。したがって, ファン・カンペンの定理により, この語を 1 とする関係式を加えればよい。 $\square$

直観：種数 g の表示の読み方

表示の読み方を整理する。

- 生成元は $2g$ 個で, i 番目の穴 (ハンドル) ごとに 2 つのループ a_i, b_i が対応する。トーラスの a, b が各ハンドルに 1 組ずつあると思えばよい。
- 関係式は 1 本だけである。これは 2 セルが 1 枚しかないことの反映で, 「 $4g$ 角形の境界を一周するループ $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ は, 2 セルの内部を通して 1 点に縮められる」と読む。
- $g = 1$ のときは関係式が $[a, b] = 1$, すなわち $ab = ba$ となり, トーラスの $\mathbb{Z}^2$ が復元される。

関係式が 1 本しかないので, 可換化 $\mathbb{Z}^{2g}$ の階数から g が読み取れる。これが後の練習問題で曲面を区別するときの鍵になる。

種数 2 の曲面

Σ_2 の基本群は $\pi_1(\Sigma_2) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] = 1 \rangle$ である。これは 4 つの生成元と 1 本の関係式を持つ群である。

トーラスの場合 $g = 1$ は $\langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$ であり、これは $\mathbb{Z}^2$ であった。一方、 $g \geq 2$ では一般に非可換群になる。

5.8 向き付け不可能閉曲面の基本群

射影平面の k 個の連結和を $N_k = \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$ と書く。これは向き付け不可能閉曲面の標準形である。

特に $N_1 = \mathbb{RP}^2$, $N_2 =$ クラインの壺 である。

復習：連結和 $\#$

2 つの閉曲面 F_1, F_2 の連結和 $F_1 \# F_2$ とは、 F_1, F_2 からそれぞれ開円板を 1 つずつ取り除き、残った境界円周どうしを貼り合わせて得られる閉曲面のことである。直観的には、両方の曲面に小さい穴をあけ、管でつないだものである。

ミニ例：トーラス 2 つの連結和 $T^2 \# T^2$ は、穴が 2 つある曲面、すなわち種数 2 の閉曲面 Σ_2 である。一般に Σ_g は T^2 の g 個の連結和である。また、どの閉曲面 F についても $F \# S^2 \approx F$ である（球面から円板を除くと円板が残り、穴に蓋をするだけだから）。

連結和と関係式の直感

閉曲面の連結和は、多角形表示では境界語を横につなげる操作として現れる。たとえば、射影平面 $\mathbb{RP}^2$ の標準表示は境界語 x^2 を持つ。射影平面を k 個連結和にすると、これらの境界語が順に並び、

$$x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$$

が 2 セルの境界語になる。したがって、向き付け不可能閉曲面の基本群表示には、この語を 1 とする 1 本の関係式が入る。厳密には、連結和を円板を取り除いて境界円周同士を貼り合わせる操作として表し、その 1 骨格にファン・カンペンの定理を適用する。

N_k は $2k$ 角形の辺を $x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_k, x_k$ の形に貼り合わせて得られる。同じラベルの辺が反対向きではなく、同じ向きで 2 回現れることが特徴である。

そのため、境界語は $x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$ になる。

定理 5.4. $k \geq 1$ に対して、 $\pi_1(N_k) \cong \langle x_1, \dots, x_k \mid x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 = 1 \rangle$ である。

証明の考え方（直感）．多角形の貼り合わせ後、1 骨格は k 個の円周のブーケになる。したがって 1 骨格の基本群は自由群 $F(x_1, \dots, x_k)$ である。

2 セルの境界語は $x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$ なので、この語を 1 とする関係式を加える。

□

射影平面とクラインの壺

1. $k = 1$ のとき, $\pi_1(N_1) \cong \langle x_1 \mid x_1^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. これは射影平面の基本群である。
2. $k = 2$ のとき, $\pi_1(N_2) \cong \langle x_1, x_2 \mid x_1^2 x_2^2 = 1 \rangle$. これはクラインの壺の基本群である。
別の表示として, $\pi_1(N_2) \cong \langle u, v \mid uvu^{-1} = v^{-1} \rangle$ または $\pi_1(N_2) \cong \langle u, v \mid uvu^{-1}v = 1 \rangle$ と書ける。

具体例：クラインの壺の 2 つの表示が同じであることを手で確かめる

表示 $\langle x_1, x_2 \mid x_1^2 x_2^2 = 1 \rangle$ において, 新しい生成元を $u = x_2$, $v = x_1 x_2$ とおく。逆に解くと $x_2 = u$, $x_1 = vu^{-1}$ であり, 生成元の取り替えになっている。関係式に代入すると

$$x_1^2 x_2^2 = (vu^{-1})(vu^{-1})u^2 = vu^{-1}vu$$

となる。語 $vu^{-1}vu$ を巡回置換（共役をとる操作なので正規閉包は変わらない）して $uvu^{-1}v$ を得る。したがって $\pi_1(N_2) \cong \langle u, v \mid uvu^{-1}v = 1 \rangle$, すなわち $uvu^{-1} = v^{-1}$ である。この形は, u に沿って一周すると v の向きが反転するという, クラインの壺の向き付け不可能性を直接表している。

5.9 基本群の可換化

可換化の意味

基本群は一般に非可換であり, ループを進む順序を記録する。一方, 第一ホモロジー群 H_1 は可換群であり, ループを足し合わせる量として扱う。

可換化とは, 基本群の中で

$$gh = hg$$

がすべての元について成り立つようにした商群である。この操作により, ループの順序の情報は失われるが, どの 1 次元サイクルが残るかという情報が得られる。閉曲面や結び目補空間で H_1 を計算するとき, 基本群の可換化を用いる。

群 G の交換子部分群とは, 交換子 $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ ($g, h \in G$) で生成される正規部分群 $[G, G]$ のことである。

定義 5.5 (可換化). 群 G の可換化とは, 商群 $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$ のことである。これは, G の元をすべて可換にした, 最も大きい可換商群である。

復習：交換子部分群の性質

$[G, G]$ の元は, 1 つの交換子とは限らず, 交換子たちの積である。 $[G, G]$ は正規部分群になる（交換子の共役 $g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$ がまた交換子だから）ので, 商群 $G/[G, G]$ が定義できる。この商群では, 任意の g, h について $ghg^{-1}h^{-1} \in [G, G]$ が単位元の類になるので $\bar{g}\bar{h} = \bar{h}\bar{g}$ が成り立ち, 確かに可換群である。

ミニ例： G がはじめから可換なら $[G, G] = \{1\}$ で $G^{\text{ab}} = G$ 。自由群では $F(a, b)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^2$ となる（語 $a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} \dots$ は、 a の指数和と b の指数和の組だけが残る）。

群が表示 $G = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ で与えられているとき、可換化ではすべての生成元が可換になる。したがって、語 r_j は各生成元の指数和だけを記録する線形関係に変わる。

可換化の計算法

非可換な群の表示を可換化すると、整数係数の線形代数の問題になる。例えば、 $aba^{-1}b^{-1}$ は可換化すると $a + b - a - b = 0$ となり、自動的に消える。一方、 a^2 は $2a$ となる。

5.9.1 曲面群の可換化

トーラス

トーラスでは $\pi_1(T^2) = \langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle$ である。もともと可換なので、 $\pi_1(T^2)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^2$ 。

向き付け可能閉曲面

向き付け可能閉曲面では $\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$ 。可換化すると、各交換子は自動的に 1 になる。したがって、関係式は可換化後には新しい制約を与えない。

よって $\pi_1(\Sigma_g)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ 。

向き付け不可能閉曲面

向き付け不可能閉曲面では $\pi_1(N_k) = \langle x_1, \dots, x_k \mid x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 = 1 \rangle$ 。可換化すると、関係式は加法的に $2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_k = 0$ となる。

したがって $\pi_1(N_k)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^k / \langle 2x_1 + 2x_2 + \cdots + 2x_k \rangle$ 。

この商群は $\mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型である。したがって $\pi_1(N_k)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。

特に、クラインの壺 N_2 では $\pi_1(N_2)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。

具体例： N_2 の可換化を最後まで計算する

$k = 2$ の場合を基底の取り替えで計算してみる。可換化後の群は、生成元 x_1, x_2 を基底とする $\mathbb{Z}^2$ を、関係 $2x_1 + 2x_2 = 0$ で割ったものである。新しい基底として $u = x_1 + x_2$, $v = x_2$ をとる（ $x_1 = u - v$, $x_2 = v$ と逆に解けるので、これは $\mathbb{Z}^2$ の基底の取り替えである）。関係式は $2x_1 + 2x_2 = 2u = 0$ となるので、

$$\mathbb{Z}^2 / \langle 2x_1 + 2x_2 \rangle \cong (\mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v) / \langle 2u \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

である。一般の k でも同様に $u = x_1 + \cdots + x_k$ と残りの $x_2, \dots, x_k$ を基底にとれば、関係式は $2u = 0$ だけになり、 $\mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が得られる。

第一ホモロジー群との関係

後で学ぶ第一ホモロジー群は、連結な空間 X に対して $H_1(X; \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X)^{\text{ab}}$ を満たす。したがって、基本群の可換化はホモロジー群の計算にも直結する。

5.10 基本的な 3 次元多様体の基本群

ここでは、閉曲面の基本群の応用例として、基本的な 3 次元多様体の基本群を確認する。

5.10.1 3 次元球体と 3 次元球面

3 次元球体 B^3 は可縮なので $\pi_1(B^3) \cong 1$.

また、3 次元球面 S^3 は単連結であるから $\pi_1(S^3) \cong 1$.

5.10.2 ソリッドトーラス

ソリッドトーラスは $V = S^1 \times D^2$ である。これは芯円 $S^1 \times \{0\}$ へ変形レトラクトするので、 $\pi_1(V) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

5.10.3 ハンドル体

種数 g のハンドル体 H_g は、 g 個の円周のブーケへ変形レトラクトする。したがって $\pi_1(H_g) \cong F_g$.
ここで F_g は階数 g の自由群である。

5.10.4 積空間

積空間 $X \times Y$ の基本群は、各成分への射影により $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ と分解する。

したがって $\pi_1(S^2 \times S^1) \cong \pi_1(S^2) \times \pi_1(S^1) \cong 1 \times \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

また、 $T^2 \times I$ は T^2 に変形レトラクトするので、 $\pi_1(T^2 \times I) \cong \pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

同様に、任意の曲面 F に対して $F \times I$ は F に変形レトラクトするため、 $\pi_1(F \times I) \cong \pi_1(F)$ である。

5.11 実射影 3 空間の基本群

実射影 3 空間 $\mathbb{RP}^3$ は、 S^3 の対蹠点を同一視して得られる空間である。すなわち、 $\mathbb{RP}^3 \cong S^3 / (x \sim -x)$.

自然な写像 $p: S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ は 2 重被覆である。さらに、 S^3 は単連結なので、これは $\mathbb{RP}^3$ の普遍被覆である。

デッキ変換群は $x \mapsto x, x \mapsto -x$ の 2 つからなる。したがって $\text{Deck}(S^3/\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

よって $\pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5.12 レンズ空間の基本群

レンズ空間 $L(p, q)$ は, S^3 の自由な $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 作用による商として定義できる。ここで $p \geq 2$, $\gcd(p, q) = 1$ とする。

S^3 を $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ と見る。この上に, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が $(z_1, z_2) \mapsto (e^{2\pi i/p} z_1, e^{2\pi i q/p} z_2)$ によって作用する。

この作用で割った空間がレンズ空間であり, $L(p, q) = S^3/(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ である。

直観：作用が自由であることの確認

商写像が被覆になるためには, 作用が**自由**である (単位元以外の元が固定点を持たない) ことが効いている。実際に確かめる: $1 \leq k \leq p-1$ に対して $(e^{2\pi i k/p} z_1, e^{2\pi i k q/p} z_2) = (z_1, z_2)$ が成り立ったとする。 $z_1 \neq 0$ なら $e^{2\pi i k/p} = 1$, すなわち $p \mid k$ となり矛盾。 $z_1 = 0$ なら $|z_2| = 1 \neq 0$ なので $e^{2\pi i k q/p} = 1$, すなわち $p \mid kq$ 。ここで $\gcd(p, q) = 1$ より $p \mid k$ となり, やはり矛盾。よって作用は自由である。有限群がコンパクトなハウスドルフ空間に自由に作用すると, 商写像は被覆写像になる。これが $S^3 \rightarrow L(p, q)$ が p 重被覆である理由であり, $\gcd(p, q) = 1$ の仮定はここで使われている。

商写像 $S^3 \rightarrow L(p, q)$ は p 重被覆である。さらに S^3 は単連結なので, これは普遍被覆である。

デッキ変換群は作用している巡回群そのものであるから, $\text{Deck}(S^3/L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 。

したがって $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 。

パラメータ q の意味

レンズ空間 $L(p, q)$ の基本群は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であり, p によって決まる。一方, q はレンズ空間の貼り合わせ方を記録する重要な情報であり, 位相型に影響する。つまり, 基本群だけではレンズ空間を完全には区別できない。

5.13 不変量による識別

基本群は位相的不変量である。したがって, 2 つの空間の基本群が同型でなければ, それらの空間は同相ではない。

学習の指針：不変量で区別する論法の型

この論法は次の 3 段で書く。

- 「 $X \approx Y$ ならば $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ 」 (基本群は位相的不変量)。
- その対偶「 $\pi_1(X) \not\cong \pi_1(Y)$ ならば $X \not\approx Y$ 」を使う。
- 群が同型でないことは, 群の側の性質で示す。例えば, 元の個数 ($\mathbb{Z}^2$ は無限群, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は位数 2), 可換性, 可換化 G^{ab} , 位数 2 の元の有無などを比べる。

逆向きは使えないことに注意する。基本群が同型でも同相とは限らない (例: $\mathbb{R}^2$ と 1 点ほど

ちらも基本群が自明だが同相ではない)。

例えば $\pi_1(S^2) \cong 1$, $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$, $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。したがって S^2 , T^2 , $\mathbb{RP}^2$ は互いに同相ではない。

同様に, 3 次元多様体についても $\pi_1(S^3) = 1$, $\pi_1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるから, これらは互いに同相ではない。

不変量の限界

基本群が異なれば空間は同相でない。しかし, 基本群が同じでも空間が同相であるとは限らない。例えば, レンズ空間 $L(p, q)$ の基本群は q に依存せず $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である。したがって, 基本群は有用な不変量だが, すべてを完全に区別できるわけではない。

5.14 まとめ

本章の要点をまとめる。

- 普遍被覆 $\tilde{X} \rightarrow X$ に対して, 基点と規約を固定すれば $\text{Deck}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$ である。
- 閉曲面の基本群は, 多角形の辺の貼り合わせ表示から計算できる。
- 2 セルを貼ると, その境界語が関係式として入る。
- トーラスの基本群は $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ である。
- 射影平面の基本群は $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。
- 種数 g の向き付け可能閉曲面では

$$\pi_1(\Sigma_g) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

である。

- k 個の射影平面の連結和 N_k では $\pi_1(N_k) \cong \langle x_1, \dots, x_k \mid x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 = 1 \rangle$ である。
- 可換化により $\pi_1(\Sigma_g)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$, $\pi_1(N_k)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が得られる。
- ソリッドトーラス, ハンドル体, $S^2 \times S^1$, $\mathbb{RP}^3$, レンズ空間などの基本群も, 変形レトラクトや被覆空間から計算できる。

練習問題 (標準)

1. 種数 3 の向き付け可能閉曲面 Σ_3 の基本群の表示を書け。
2. $\pi_1(\Sigma_3)$ の可換化を計算し, $\mathbb{Z}^6$ になることを説明せよ。
3. 種数 g の向き付け可能閉曲面の基本群の表示から, 可換化が $\mathbb{Z}^{2g}$ になる理由を説明せよ。
4. 向き付け不可能閉曲面

$$N_3 = \#^3 \mathbb{RP}^2$$

の基本群の標準的な表示を書け。

5. N_3 の基本群の可換化を計算し,

$$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

になることを説明せよ。

6. 種数 1 と種数 2 の向き付け可能閉曲面が同相でないことを，基本群の可換化を用いて説明せよ。
7. 1 つ境界成分を持つ種数 2 の向き付け可能曲面の基本群は，どの階数の自由群になるか答えよ。
8. レンズ空間 $L(5, 2)$ の基本群を求めよ。
9. 閉曲面の基本群の表示において，2 セルの貼り付け語がただ 1 つの関係式として現れる理由を説明せよ。
10. 基本群だけではレンズ空間を完全には分類できないことを， $L(p, q)$ の基本群に注目して説明せよ。

練習問題（発展）

1. 向き付け不可能閉曲面 $N_k = \#^k \mathbb{RP}^2$ の基本群の可換化を計算し，

$$H_1(N_k; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となることを予想せよ。

2. 種数 g の向き付け可能閉曲面から開円板を 1 つ取り除いた曲面の基本群が，自由群 F_{2g} になることを説明せよ。
3. 閉曲面の基本群の表示から，曲面の向き付け可能性がどのように反映されているか説明せよ。

第 6 章

結び目群

6.1 この章で学ぶこと

この章では、結び目の複雑さを基本群によって調べる方法を学ぶ。結び目そのものは円周と同相であるため、結び目の情報は結び目そのものではなく、その補空間に現れる。この補空間の基本群が結び目群である。

- 結び目、結び目補空間、結び目群の定義を理解する。
- 自明結び目の補空間がソリッドトーラスであり、その結び目群が $\mathbb{Z}$ であることを理解する。
- 結び目図式からヴィルティンガー表示を作る方法を学ぶ。
- 三葉結び目群を具体的に計算し、非可換な結び目群の例を理解する。
- 結び目群の可換化が常に $\mathbb{Z}$ になる理由を理解する。
- メリディアン、ロンジチュード、ザイフェルト曲面の役割を知り、後のホモロジー計算との関係を理解する。

学習の指針

この章は、これまでに学んだ基本群の理論を結び目に応用する章である。前提となる既習事項は、基本群と変形レトラクト（第 1～2 章）、群の表示と自由群（第 3 章）、可換化（第 5 章）である。初出の概念は、結び目・結び目補空間・結び目群・ヴィルティンガー表示・メリディアン・ロンジチュード・ザイフェルト曲面である。抽象論よりも、三葉結び目での具体計算（図式 → 群の表示 → 可換化）を自分の手で最後まで再現できるようになることを目標に読むとよい。

6.2 3 次元多様体の基本群として見る

第 5 章までは、曲面の基本群を多角形表示から計算した。第 6 章では、舞台を 3 次元に移し、結び目の補空間という 3 次元多様体の基本群を調べる。

基本例として、ソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ は円周 S^1 に変形レトラクトするので、その基本群は $\mathbb{Z}$ である。より一般に、種数 g のハンドル体は g 個の円周のブーケに変形レトラクトするので、基本群は自由群 F_g になる。結び目補空間は、結び目の管状近傍を S^3 から取り除いて得られる 3 次元多様体であり、その基本群には結び目の埋め込み方が反映される。

6.3 結び目とは何か

定義 6.1 (結び目). S^3 の中への S^1 の埋め込み $K : S^1 \hookrightarrow S^3$ の像を**結び目**という。

ここで、 S^3 は 3 次元球面である。直感的には、結び目とは、3 次元空間内に置かれた閉じたひもである。

通常の空間 $\mathbb{R}^3$ の中の結び目を考えてもよいが、無限遠点を 1 点加えると $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \cong S^3$ となるので、結び目理論では S^3 の中で考えることが多い。

定義 6.2 (結び目の同値). 2 つの結び目 $K_0, K_1 \subset S^3$ が同値であるとは、 S^3 の同相写像 $h : S^3 \rightarrow S^3$ で $h(K_0) = K_1$ を満たすものが存在することをいう。

直感的には、結び目を切らずに連続的に変形して移り合うとき、同じ結び目とみなす。

直観: なぜ S^3 全体の同相写像で定義するのか

定義で要求しているのは、 K_0 から K_1 への同相写像ではなく、 S^3 全体の同相写像 h であることに注意する。どの結び目も位相空間としては S^1 と同相なので、結び目どうしの同相写像は常に存在してしまい、それでは何も区別できない。 $h : S^3 \rightarrow S^3$ は、結び目を「まわりの空間ごと」動かす変形であり、ひもを切らずに空間内で連続的に動かす操作（全同位）の数学的な定式化になっている。実際、向きを保つ S^3 の同相写像による同値は、全同位による同値と一致することが知られている。

自明結び目

平面上の円周として置かれた結び目を**自明結び目**という。これは結ばれていない輪であり、通常 U と書く。

6.4 なぜ補空間を見るのか

結び目そのものでは区別できない理由

どの結び目も、ひも自体だけを見れば一本の閉じた輪であり、位相空間としては円周 S^1 である。したがって、結び目そのものの基本群やホモロジー群を計算しても、すべて同じ答えになる。

結び目の違いは、円周が S^3 の中にどのように埋め込まれているかにある。その埋め込み方の情報は、結び目を取り除いた補空間

$$S^3 \setminus K$$

に反映される。補空間の中では、結び目の周りをまわるループがどのように絡み合っているかを記録できる。

結び目 K は、位相空間としては常に円周 S^1 と同相である。したがって、結び目そのものの基本群は $\pi_1(K) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ であり、これはどの結び目でも同じである。

つまり、結び目そのものの基本群を見ても、三葉結び目と自明結び目を区別できない。

そこで、結び目そのものではなく、結び目を取り除いた空間を考える。

定義 6.3 (結び目補空間). 結び目 $K \subset S^3$ の管状近傍を $N(K)$ とする。このとき $X_K = S^3 \setminus \text{Int } N(K)$ を K の**結び目補空間**という。

ここで $N(K)$ は、結び目のまわりの細い管である。 K は円周なので、 $N(K)$ はソリッドトーラスになる。

$$N(K) \cong S^1 \times D^2.$$

結び目補空間 X_K は、結び目のまわりの管をくり抜いた空間である。

直観: なぜ K ではなく管状近傍をくり抜くのか

$S^3 \setminus K$ ではなく $X_K = S^3 \setminus \text{Int } N(K)$ を考えるのは、次の理由による。まず、 $S^3 \setminus K$ は X_K に変形レトラクトするので、基本群を調べる限り両者に違いはない。一方で X_K は、境界 $\partial X_K \cong T^2$ をもつコンパクトな 3 次元多様体になるという利点がある。この境界トーラスの上でメリディアンやロンジチュードという曲線を取れることが、この章の後半と第 12 章のホモロジー計算で本質的に効いてくる。

定義 6.4 (結び目群). 結び目補空間の基本群 $G(K) = \pi_1(X_K)$ を K の**結び目群**という。

結び目群は、結び目が空間の中でどのように絡んでいるかを反映する重要な不変量である。

補空間が情報を持つ

結び目そのものは常に円周である。しかし、そのまわりの空間、つまり補空間は結び目によって変わる。結び目理論では、結び目を直接見るだけでなく、補空間を見ることが本質的である。

6.5 自明結び目の補空間

自明結び目 U を考える。 U の管状近傍 $N(U)$ はソリッドトーラスである。

S^3 からこのソリッドトーラスの内部を取り除くと、残りもまたソリッドトーラスになる。したがって $X_U = S^3 \setminus \text{Int } N(U)$ はソリッドトーラスである。

ソリッドトーラスは円周 S^1 に変形レトラクトするので、 $\pi_1(X_U) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 。

したがって $G(U) \cong \mathbb{Z}$ 。

自明結び目の特徴

自明結び目の補空間はソリッドトーラスであり、その基本群は無限巡回群 $\mathbb{Z}$ である。後で見るように、三葉結び目の結び目群は非可換であり、自明結び目の群とは異なる。

6.6 結び目図式

結び目を調べるためには、3 次元空間内の結び目を平面に射影した図を用いる。

定義 6.5 (結び目図式). 結び目 $K \subset \mathbb{R}^3$ を平面に射影し, 各交点でどちらの弧が上を通り, どちらが下を通るかを記録した図を**結び目図式**という。

結び目図式では, 交点で下を通る弧を少し切って描く。これにより, どちらが上を通るかが分かる。

定義 6.6 (弧). 結び目図式において, 下交点から次の下交点まで続く部分を**弧**という。

ヴィルティンガー表示では, 各弧に 1 つずつ生成元を割り当てる。

具体例: 三葉結び目図式の交点と弧

図 6.2 の三葉結び目の標準図式には, 交点が 3 つある。下を通る弧は下交点で切れるので, 図式は 3 本の弧に分かれ, のちの計算ではそれぞれに生成元 x, y, z を割り当てる。一般に, 交点を 1 つ以上もつ結び目図式では, 各弧はある下交点で終わり, 各交点でちょうど 1 本の弧が終わるので, 弧の数と交点の数は一致する。

補足: ライデマイスター移動

同じ結び目でも, 射影の方向や置き方を変えれば異なる図式が得られる。ライデマイスターの定理によれば, 2 つの図式が同じ結び目を表すのは, 平面内の変形に加えて, 次の 3 種類の局所変形 (ライデマイスター移動) を有限回行って移り合うとき, かつそのときに限る。

- R1: 1 本の弧に小さなねじれを作る, または消す。
- R2: 1 本の弧を別の弧の上 (または下) に重ねる, または引き離す。
- R3: 交点の下 (または上) を第 3 の弧がすべて通過する。

したがって, 図式から定義した量がこの 3 種類の移動で変わらないことを確かめれば, それは結び目の不変量になる。ヴィルティンガー表示も, 移動によって表示の見た目は変わるが, 得られる群は同型のままである。

6.7 ヴィルティンガー表示の考え方

ヴィルティンガー表示の直感

結び目図式を平面に描くと, 上下の交差によって弧がいくつかに分かれる。各弧の周りを小さく一周するループを生成元とする。これらは結び目補空間のメリディアンに対応する。

交点では, 上を通る弧の周りをまわる操作によって, 下を通る弧のメリディアンが別のメリディアンへ共役される。この局所的な関係式をすべての交点で書き出すと, 結び目群の表示が得られる。つまり, ヴィルティンガー表示は, 図式の各交点を群の関係式へ翻訳する方法である。

結び目群は, 結び目図式から機械的に表示できる。その方法が**ヴィルティンガー表示**である。基本的な手順は次の通りである。

1. 結び目図式の各弧に生成元を 1 つ割り当てる。
2. 各交点について, 1 つの関係式を作る。

3. すべての生成元と関係式をまとめる。

これにより，結び目群の表示 $G(K) \cong \langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ が得られる。

6.8 交点から関係式を読む

交点には，上を通る弧と，下を通る 2 つの弧がある。上を通る弧の生成元を x とし，下を通る弧の一方を y ，もう一方を z とする。

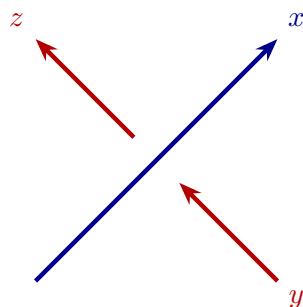


図 6.1 交点の局所図。青の弧 x が上を通り，途切れている赤の弧が下を通る。下の弧は交点の前で y （手前）と z （先）に分かれ， $xyx^{-1} = z$ の関係を生む。

このとき，交点の向きに応じて $xyx^{-1} = z$ または $x^{-1}yx = z$ という関係式が得られる。本質は，上を通る弧が，下を通る弧を共役で移す ということである。

ヴィルティンガー関係式の意味

ヴィルティンガー表示の関係式は，交点の近くでメリディアンがどのように移り合うかを表している。各弧の生成元は，その弧を小さく一周するメリディアンに対応する。交点では，上を通る弧のメリディアンによる共役として，下の弧のメリディアンが変化する。

直観:2 つの関係式の使い分け

$xyx^{-1} = z$ と $x^{-1}yx = z$ のどちらになるかは，交差の向き，すなわち上の弧に対して下の弧がどちら向きに交わるかで決まる。ただし，どちらの場合も「下の弧の生成元が上の弧の生成元による共役で移る」という形は共通である。また， $xyx^{-1} = z$ を変形すると $x^{-1}zx = y$ となるので，2 つの式は y と z の役割を入れ替えたものにすぎない。具体的な計算では，図 6.2 のように各交点に添えられた式を読み取れば十分である。さらに，可換化するとどちらの式も $y = z$ になるので，後で行う可換化の議論には向きの違いは影響しない。

6.9 ヴィルティンガー表示の作り方

結び目図式 D が与えられたとする。弧を $a_1, \dots, a_m$ とし，対応する生成元を $x_1, \dots, x_m$ とする。各交点 c について，次を行う。

1. 上を通る弧の生成元を確認する。

2. 下を通る弧の交点前後の生成元を確認する。

3. 向きに応じて $x_i x_j x_i^{-1} = x_k$ または $x_i^{-1} x_j x_i = x_k$ の形の関係式を書く。

すべての交点について関係式を書くと、 $G(K)$ の表示が得られる。

関係式の数

結び目図式の弧の数と交点の数は同じである。したがって、ヴィルティンガー表示では、通常、生成元の数と関係式の数と同じになる。ただし、関係式のうち 1 つは他の関係式から従うことが多い。

6.10 三葉結び目群の計算

三葉結び目の標準図式を考える。この図式には 3 つの弧があるので、生成元を x , y , z とする。

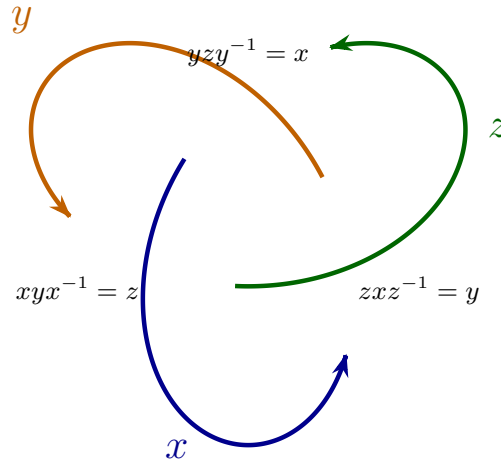


図 6.2 三葉結び目の標準図式と 3 つの弧 x, y, z 。矢印は弧の向きを表す。各交点の式は、その交点で上を通る弧による共役関係を示す。

各交点から、次の関係式が得られる。 $xyx^{-1} = z$, $yzzy^{-1} = x$, $zxx^{-1} = y$.

したがって $G(3_1) \cong \langle x, y, z \mid xyx^{-1} = z, yzy^{-1} = x, zxx^{-1} = y \rangle$.

ここから生成元 z を消去して、より簡単な表示を得る。

第 1 の関係式より $z = xyx^{-1}$. これを第 2 の関係式に代入すると、 $y(xy x^{-1})y^{-1} = x$. 両辺を整理すると、 $yxyx^{-1}y^{-1} = x$. 右から y を掛けると $yxyx^{-1} = xy$. さらに右から x を掛けると $xyx = xyx$. したがって $xyx = yxy$ という関係式が得られる。

よって三葉結び目群は $G(3_1) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ と表示できる。

具体例: 第 3 の関係式は残りの 2 つから従う

上の計算では、3 つの関係式のうち第 1 と第 2 だけを使った。実は第 3 の関係式 $zxx^{-1} = y$ は、 $z = xyx^{-1}$ と $xyx = yxy$ から自動的に従う。実際、 $z = xyx^{-1}$ を代入すると

$$zxx^{-1} = (xyx^{-1})x(xy^{-1}x^{-1}) = xyxy^{-1}x^{-1}$$

であり, $xyx = yxy$ を用いて書き換えると

$$xyxy^{-1}x^{-1} = (xyx)y^{-1}x^{-1} = yxx^{-1} = y$$

となる。これは、「関係式のうち 1 つは他の関係式から従うことが多い」という前節の注意の具体例である。

三葉結び目群とブレイド関係式

関係式 $xyx = yxy$ は 2 つの生成元のブレイド関係式である。したがって三葉結び目群は, 2 本生成のブレイド群とも深く関係している。

6.11 三葉結び目群は非可換である

三葉結び目群 $G(3_1) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ は非可換である。

実際, 対称群 S_3 の中で $x \mapsto (12)$, $y \mapsto (23)$ と送ることを考える。隣接する互換は $(12)(23)(12) = (23)(12)(23)$ を満たすので, 関係式 $xyx = yxy$ は保たれる。

したがって, 三葉結び目群から S_3 への準同型が得られる。しかも $(12)(23) \neq (23)(12)$ なので, 像は非可換である。よって, もとの三葉結び目群も非可換である。

一方, 自明結び目群は $G(U) \cong \mathbb{Z}$ であり可換である。

したがって $G(3_1) \not\cong G(U)$ であり, 三葉結び目は自明結び目ではない。

直観: 生成元の行き先を決めるだけで準同型が定まる理由

表示 $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ で与えられた群から群 H への準同型を作るには, 行き先 $a, b \in H$ を選び, 関係式 $aba = bab$ が H の中で成り立つことを確かめればよい。これは次の 2 段階で分かる。まず, 自由群の普遍性により, $x \mapsto a$, $y \mapsto b$ は自由群 $F(x, y)$ からの準同型に一意に延びる。次に, 関係式が保たれるなら, この準同型の核は関係式の正規閉包を含むので, 商群である $\langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ からの準同型が誘導される。本文の $x \mapsto (12)$, $y \mapsto (23)$ は, この手続きの実例である。

6.12 結び目群の可換化

群 G の可換化を G^{ab} と書く。これは, G の中ですべての元が可換になるようにした最大のアーベル商である。

復習: 可換化の計算法 (加法的記法)

群 G の可換化は, すべての交換子 $ghg^{-1}h^{-1}$ で生成される正規部分群 $[G, G]$ による商 $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$ である。表示 $\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ で与えられた群の可換化は, 生成元をすべて可換とみなし, 積 xy を和 $x + y$, 逆元 x^{-1} を $-x$ と書き直して関係式を読んだアーベル群になる。ミニ例として, 自由群 $F_2 = \langle x, y \mid \rangle$ の可換化は $\mathbb{Z}^2$ である。また, 関係式

$xyx^{-1} = z$ は加法的には $x + y - x = z$, すなわち $y = z$ と読める。

任意の結び目 K に対して, $G(K)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ。

これをヴィルティンガー表示から説明する。

ヴィルティンガー表示では, 各交点から $xyx^{-1} = z$ の形の関係式が得られる。可換化すると, 左辺は $x + y - x = y$ になる。したがって関係式は $y = z$ となる。

つまり, 可換化すると, 交点でつながる下側の 2 つの弧の生成元が等しくなる。結び目図式は 1 つの結び目から来ているので, この関係をすべての交点でたどると, すべての生成元が等しくなる。

したがって, 可換化後には生成元は 1 つだけ残り, $G(K)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ となる。

直観: なぜすべての生成元が 1 つにまとまるのか

結び目の向きに沿ってひもを一周たどると, 弧は $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_m \rightarrow a_1$ の順に現れ, 弧が切り替わるのは下交点をくぐる瞬間だけである。その交点の関係式は, 可換化後には「切り替わる前の弧の生成元 = 切り替わった後の弧の生成元」と読める。したがって, 一周たどることで $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$ が順に確かめられる。この議論は, 結び目が 1 本の円周であり, ひもを一周すればすべての弧を通ることを本質的に使っている。

三葉結び目群の可換化

三葉結び目群 $G(3_1) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ を可換化する。

可換化では x と y が可換になるので, 関係式は加法的に $x + y + x = y + x + y$ となる。したがって $2x + y = x + 2y$ より $x = y$ である。

よって可換化後には 1 つの生成元だけが残る, $G(3_1)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ となる。

可換化だけでは結び目を区別できない

任意の結び目群の可換化は $\mathbb{Z}$ である。したがって, 結び目を区別するには, 結び目群の非可換な情報を見る必要がある。これは, 結び目群が基本群として本質的に非可換な不変量であることを示している。

第一ホモロジー群との関係

連結な空間 X に対して, $H_1(X) \cong \pi_1(X)^{\text{ab}}$ が成り立つ。

したがって, 結び目補空間 $X_K = S^3 \setminus \text{Int } N(K)$ について, $H_1(X_K) \cong G(K)^{\text{ab}}$ である。

上で見たように $G(K)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ なので, $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$ が従う。

この事実は, 第 12 章でマイヤー・ヴィートリス完全系列を使って再び確認する。

6.13 メリディアン

結び目補空間の境界は $\partial X_K = \partial N(K) \cong T^2$ である。この境界トーラス上には, 特に重要な曲線がある。

定義 6.7 (メリディアン). 管状近傍 $N(K)$ の円板ファイバーの境界となる曲線を**メリディアン**という。通常 μ と書く。

直感的には、メリディアンは結び目を小さく一回まわる円周である。

ヴィルティンガー表示の各生成元は、結び目図式の各弧のまわりを一回まわるメリディアンに対応している。したがって、結び目群はメリディアンたちによって生成される。

メリディアンの重要性

結び目群の生成元はメリディアンである。また、後でホモロジーを考えると、メリディアンは $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$ の生成元になる。

6.14 ロンジチュード

境界トーラス $\partial N(K)$ には、メリディアンとともにもう一つ重要な曲線がある。

定義 6.8 (ロンジチュード). 境界トーラス $\partial N(K)$ 上で、結び目に沿って走る方向の曲線を**ロンジチュード**という。

ただし、ロンジチュードには選び方がある。特に重要なのは、**優先ロンジチュード**である。

定義 6.9 (優先ロンジチュード). 向き付けられた結び目 K のザイフェルト曲面 F を一つ取る。 $K = \partial F$ を境界トーラス $\partial N(K)$ 上へ、 F に沿って少し押し出して得られる曲線を**優先ロンジチュード**という。通常 λ と書く。

優先ロンジチュードは、結び目に沿って走るが、結び目のまわりを余分にねじらないように選ばれた曲線である。古典的には「結び目 K との絡み数が 0 になるロンジチュード」と同値に定義できるが、本書では絡み数をまだ正式に導入していないため、ザイフェルト曲面からの押し出しとして理解しておけば十分である。

直観: ロンジチュードは 1 本ではない

境界トーラス上で「結び目に沿って一周する」曲線は 1 本ではない。1 つのロンジチュード λ を固定すると、他の候補は λ にメリディアン方向の巻きつきを n 回加えた曲線であり、ホモロジー的には $[\lambda] + n[\mu]$ となる。つまり、ロンジチュードの選択には「ねじれの回数」という整数分の自由度がある。優先ロンジチュードは、ザイフェルト曲面を使ってこのねじれを 0 に正規化した、標準的な選び方である。

6.15 ザイフェルト曲面

定義 6.10 (ザイフェルト曲面). 向き付けられた結び目 K に対して、コンパクト向き付け可能曲面 $F \subset S^3$ が $\partial F = K$ を満たすとき、 F を K の**ザイフェルト曲面**という。

任意の向き付けられた結び目にはザイフェルト曲面が存在する。これは、結び目図式に対するザイ

フェルトのアルゴリズムによって構成できる。

ザイフェルト曲面は、結び目と補空間のホモロジーをつなぐ重要な役割を持つ。

特に、優先ロンジチュード λ は、ザイフェルト曲面を少し押し出して得られる曲線として実現できる。そのため、 λ は補空間 X_K の中でザイフェルト曲面の押し出しの境界になり、ホモロジー的には自明になる。

したがって $[\lambda] = 0 \in H_1(X_K)$ である。

一方、メリディアン μ は $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$ の生成元になる。

具体例: 自明結び目の μ と λ

自明結び目 U を平面内の円周とすると、ザイフェルト曲面として U が囲む円板 D が取れる。優先ロンジチュード λ は、 D に沿って U を境界トーラス上へ押し出した、 U と平行な円周である。 D から $N(U)$ にかかる部分を取り除くと、 λ を境界とする少し小さな円板が補空間 X_U の中に残る。したがって λ は X_U の中で円板を張るので、 $\pi_1(X_U)$ の中で自明であり、特に $[\lambda] = 0 \in H_1(X_U)$ が直接確かめられる。一方、メリディアン μ は、ソリッドトーラスである X_U の芯の円周とホモトピックであり、 $\pi_1(X_U) \cong H_1(X_U) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を与える。

第 12 章への接続

第 12 章では、 $S^3 = X_K \cup N(K)$ にマイヤー・ヴィートリス完全系列を適用する。そのとき、境界トーラス上の μ 、 λ の振る舞いを調べることで、 $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$ が得られる。

6.16 結び目群はどこまで結び目を区別するか

結び目群は結び目を調べるための不変量である。たとえば、自明結び目群は $\mathbb{Z}$ であるのに対し、三葉結び目群は非可換である。したがって、三葉結び目は自明結び目ではない。

さらに、深い定理として、結び目群が $\mathbb{Z}$ である結び目は自明結び目であることが知られている。

ただし、結び目群だけで結び目が完全に決まるわけではない。結び目補空間をより正確に捉えるには、結び目群に加えて、メリディアン・ロンジチュードの情報、すなわち**周辺構造**が重要になる。

周辺構造

結び目群だけでなく、境界トーラス上のメリディアンとロンジチュードが群の中でどのような元になるかを含めた情報を周辺構造という。結び目補空間の情報を正確に扱うには、この周辺構造が重要である。

6.17 まとめ

この章では、結び目群を定義し、ヴィルティンガー表示による具体的な計算を学んだ。

結び目 K に対して、補空間 $X_K = S^3 \setminus \text{Int } N(K)$ を考え、その基本群 $G(K) = \pi_1(X_K)$ を結び目群という。

結び目図式からは、ヴィルティンガー表示によって結び目群の表示が得られる。各弧に生成元を対

応させ、各交点から共役関係を読み取る。

三葉結び目では $G(3_1) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$ が得られ、これは非可換群である。したがって、三葉結び目は自明結び目ではない。

また、任意の結び目群の可換化は $G(K)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ である。これは、結び目補空間の第一ホモロジー群が $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$ であることと対応している。

メリディアンはこの $\mathbb{Z}$ の生成元であり、優先ロンジチュードはザイフェルト曲面を用いるとホモロジー的に自明になる。この事実は、後半のホモロジー群の計算で再び重要になる。

練習問題 (標準)

1. トーラス結び目 $T(2, 5)$ の結び目群が

$$\langle x, y \mid x^2 = y^5 \rangle$$

で与えられるとする。この群の可換化を計算せよ。

2. 群表示

$$G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

について、可換化が $\mathbb{Z}$ になることを示せ。

3. ある結び目図式から、生成元 a, b, c と関係式

$$b = aca^{-1}, \quad c = bab^{-1}$$

が得られたとする。この表示を用いて、可換化で a, b, c がすべて等しくなることを確認せよ。

4. ヴィルティンガー表示では、各弧に生成元を対応させる。図式の弧の数と生成元の数の関係を説明せよ。
5. 交点で得られる関係式が、可換化すると単に 2 つの弧の生成元を同一視する式になることを説明せよ。
6. 結び目補空間のメリディアンが、結び目を一回リンクする小さな円であることを説明せよ。
7. 優先ロンジチュードがメリディアンとは異なり、境界トーラス上を結び目に沿って進む曲線であることを説明せよ。
8. 結び目群の可換化が同じでも、結び目群そのものが異なれば結び目を区別できる可能性がある。この理由を説明せよ。
9. 結び目群の表示から可換化を計算する際、すべての生成元を可換にしてから関係式を読む理由を説明せよ。
10. 結び目補空間を調べることが、結び目そのものを見るより有効である理由を述べよ。

練習問題 (発展)

1. トーラス結び目 $T(p, q)$ の群が

$$\langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$$

で与えられ、 $\gcd(p, q) = 1$ とする。この群の可換化が $\mathbb{Z}$ になることを説明せよ。

2. 2 成分リンクの補空間では、第一ホモロジー群がしばしば $\mathbb{Z}^2$ になる。このことを、メリディアンの個数という観点から予想せよ。
3. 結び目群にメリディアンとロンジチュードの情報を加えると、単なる群より精密な不変量になる理由を説明せよ。

第 7 章

単体的複体と多面体

7.1 この章で学ぶこと

第 7 章では、後半で扱う単体的ホモロジー群の準備として、図形を点、線分、三角形、四面体 という基本的な部品に分解して扱う方法を学ぶ。

位相空間をそのまま扱うと連続的で複雑であるが、単体的複体に分割すると、図形の情報を組合せデータとして記述できる。この考え方は、次章以降に定義する鎖群、境界作用素、ホモロジー群の土台になる。

- 単体、面、単体的複体、多面体の定義を理解する。
- 単体的複体である例と、単体的複体でない例を区別できるようにする。
- 幾何学的単体的複体と抽象的単体複体の違いを理解する。
- 多面体または幾何学的実現の意味を理解する。
- 向き付き単体と境界の式を通して、次章の鎖群・境界作用素へつなげる。
- 細分、特に重心細分の考え方を理解する。
- 簡単な三角形分割について、頂点数・辺数・面数・オイラー標数を計算できるようにする。

学習の指針

この章の主役は「単体的複体」で、前提となるのは線形代数 (一次独立) と、集合と位相の初歩 (同相, 商位相) だけである。初出の概念は、単体、面、単体的複体、多面体、抽象的単体複体、単体写像、向き、細分と多いが、いずれも定義は有限的・組合せ的で、具体例を書き下せば必ず確認できる。読み方のコツは、新しい定義が出るたびに、点・線分・三角形・四面体のどれかで自分の手で例を作ってみることである。向き付き単体と境界の式は次章の鎖群・境界作用素で本格的に使うので、ここでは記号に慣れることを目標にすればよい。

7.2 なぜ単体的複体を考えるのか

第 1 章から第 6 章までは、基本群によってループの変形を調べた。基本群は非可換な情報を持つため精密である一方、計算が難しくなることも多い。また、球面のような高次元の穴は、ループだけでは直接は見えにくい。

そこで後半では、空間を単体に分け、鎖群と境界作用素を用いて穴を代数的に測る。特に連結な空

間では

$$H_1(X) \cong \pi_1(X)^{\text{ab}}$$

が成り立つので、第一ホモロジー群は基本群の可換化としても理解できる。この事実はフレヴィッツの定理の最初の例と見ることができる。

単体に分ける理由

一般の空間をそのまま扱うと、どこに鎖があり、どこが境界なのかを記述しにくい。そこで、空間を点、線分、三角形、四面体などの単体分割する。

単体に分けると、 n 次元の部品を形式的に足し合わせたものとして n 次元鎖を定義できる。また、各単体の境界は具体的な式で書ける。このため、ホモロジー群の定義は、幾何学的な問題を代数的な計算へ変換するものと見ることができる。

第 1 章から第 6 章までは、位相空間を連続的な対象として扱い、ホモトピーや基本群を定義した。たとえば、円周上のループを連続的に変形することで、 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ を得た。

一方、ホモロジー群では、空間を小さな部品に分け、その部品を足し引きすることで穴を調べる。このとき基本単位になるのが**単体**である。

直感的には、次のように考える。

- 点を 0 次元の部品とする。
- 線分を 1 次元の部品とする。
- 三角形を 2 次元の部品とする。
- 四面体を 3 次元の部品とする。

複雑な図形をこれらの部品の貼り合わせとして表すことで、連続的な図形を有限個の組合せデータとして扱えるようになる。

基本方針

単体的複体は、連続的な図形を有限個の組合せデータに置き換えるための道具である。この置き換えにより、次章以降のホモロジー群は、行列計算に近い形で扱えるようになる。

7.3 単体

7.3.1 アフィン独立

まず、単体を定義するためにアフィン独立を確認する。

定義 7.1 (アフィン独立). $\mathbb{R}^m$ の点 $v_0, \dots, v_n$ が**アフィン独立**であるとは、差ベクトル $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$ が一次独立であることをいう。

たとえば、平面上の 3 点のアフィン独立であることは、それらが同一直線上にないことを意味する。空間内の 4 点のアフィン独立であることは、それらが同一平面上にないことを意味する。

復習: 一次独立とアフィン独立の違い

ベクトル $u_1, \dots, u_n$ が**一次独立**であるとは、 $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n = 0$ ならば $c_1 = \dots = c_n = 0$ となることであった。アフィン独立は、点そのものではなく**差ベクトル**の一次独立を要求する点に注意する。

たとえば $\mathbb{R}^2$ の 3 点 $v_0 = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ は、差ベクトル $v_1 - v_0 = (1,0)$, $v_2 - v_0 = (0,1)$ が一次独立なのでアフィン独立である。一方、 $v_0 = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (2,0)$ では、 $v_1 - v_0 = (1,0)$, $v_2 - v_0 = (2,0)$ が一次従属なのでアフィン独立でない (3 点は同一直線上にある)。

また、2 点 $(1,0)$, $(2,0)$ は、位置ベクトルとしては一次従属だが、差 $(2,0) - (1,0) = (1,0) \neq 0$ なのでアフィン独立である。このように、原点をどこに取るかに依存しないのがアフィン独立の特徴である。

7.3.2 n 単体

定義 7.2 (n 単体). $\mathbb{R}^m$ の点 $v_0, \dots, v_n$ がアフィン独立であるとき、その凸包

$$[v_0, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

を n 単体という。点 $v_0, \dots, v_n$ をこの単体の**頂点**という。

復習: 凸包

$\mathbb{R}^m$ の部分集合 S が**凸**であるとは、 S の任意の 2 点を結ぶ線分が S に含まれることをいう。点 $v_0, \dots, v_n$ の**凸包**とは、これらすべてを含む最小の凸集合であり、凸結合 $\sum_i t_i v_i$ ($t_i \geq 0$, $\sum_i t_i = 1$) の全体と一致する。たとえば、 $\mathbb{R}^2$ の 3 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ の凸包は、これらを頂点とする三角形 (内部を含む) である。

係数 $t_0, \dots, t_n$ を**重心座標**という。

条件 $t_i \geq 0$ は、点が単体の内側にあることを表している。条件 $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ は、アフィン結合であることを表している。

具体例: 座標で書いた単体と重心座標

$\mathbb{R}^2$ の 3 点 $v_0 = (0,0)$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$ の張る 2 単体は

$$[v_0, v_1, v_2] = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

である。実際、 $t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 = (t_1, t_2)$ なので、点 (x, y) の重心座標は $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_0 = 1 - x - y$ と読み取れ、 $t_i \geq 0$ が上の 3 つの不等式に対応する。たとえば点 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ は重心座標 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ を持ち、これは三角形の重心である。同様に、1 単体 $[(0,0), (1,0)]$ は線分 $\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$, 0 単体 $[(0,0)]$ は 1 点である。

低次元の単体

- 0 単体は点である。
- 1 単体は線分である。
- 2 単体は三角形とその内部である。
- 3 単体は四面体とその内部である。

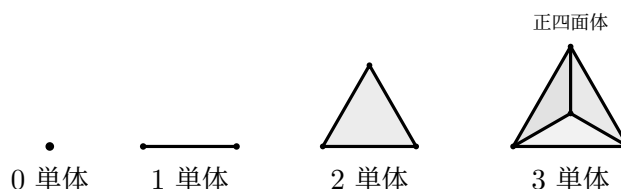


図 7.1 低次元の単体。点，線分，三角形，正四面体が基本部品になる。

7.4 単体の面

単体には，頂点の一部を選ぶことで得られる小さい単体が含まれている。

定義 7.3 (面). n 単体 $[v_0, \dots, v_n]$ に対して，頂点の一部を選んでできる単体 $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ をその面という。

特に， $k = n - 1$ の面を余次元 1 の面という。

三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ の面は，3 つの頂点，3 つの辺，そして三角形自身である。

四面体 $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ の余次元 1 の面は，4 枚の三角形 $[v_1, v_2, v_3]$ ， $[v_0, v_2, v_3]$ ， $[v_0, v_1, v_3]$ ， $[v_0, v_1, v_2]$ である。

面の個数

n 単体は $n + 1$ 個の頂点を持つ。その k 次元面は， $k + 1$ 個の頂点を選ぶことで決まる。したがって， n 単体の k 次元面の個数は $\binom{n+1}{k+1}$ である。

小練習：単体の面

1. 4 単体 $[v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$ は，頂点を何個，辺を何本持つか。
2. 3 単体の境界は，何個の 2 単体からなるか。
3. 4 点のうち 3 点が同一直線上にある場合，それらが 3 単体を張らない理由を説明せよ。

7.5 単体的複体

次に，単体を貼り合わせてできる図形を定義する。

定義 7.4. 有限個の単体からなる族 K が次を満たすとき、 K を**単体的複体**という。

1. K に属する任意の単体の任意の面も K に属する。
2. K に属する任意の 2 つの単体の共通部分は、両者の共通の面である。

第 1 条件は、三角形を入れたなら、その辺と頂点もすべて入れる という条件である。

第 2 条件は、部品同士が中途半端に交わらない という条件である。

たとえば、2 つの三角形が辺全体で貼り合わされるのはよい。しかし、一方の辺の途中だけで交わる場合は、そのままでは単体的複体ではない。

単体的複体の条件

単体的複体では、単体は必ず面に沿って貼り合わされる。交わりが点、辺、三角形面などの共通の面であればよい。しかし、辺の途中で交わる、面の一部だけで交わる、という貼り合わせは許されない。

具体例: 座標で確かめる 2 つの条件

x 軸上の 2 本の線分 $\sigma = [(0, 0), (2, 0)]$, $\tau = [(1, 0), (3, 0)]$ と、それらの端点からなる族を考える。共通部分は線分 $[(1, 0), (2, 0)]$ であるが、これは σ の面 (σ 自身とその端点) でも τ の面でもない。したがって第 2 条件に反し、この族は単体的複体ではない。

一方、点 $(1, 0)$ と $(2, 0)$ を新しい頂点に採用して $[(0, 0), (1, 0)]$, $[(1, 0), (2, 0)]$, $[(2, 0), (3, 0)]$ の 3 本の線分と 4 つの頂点からなる族に取り替えると、どの 2 つの単体の共通部分も共通の頂点 (または空集合) になり、単体的複体になる。多面体としては、どちらも同じ線分 $[(0, 0), (3, 0)]$ を表している。

7.6 単体的複体の例と非例

単体的複体の例

1. 1 本の線分 $[v_0, v_1]$ とその両端点からなる族は単体的複体である。
2. 三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ とそのすべての面からなる族は単体的複体である。
3. 四面体の境界をなす 4 枚の三角形と、それらのすべての面からなる族は単体的複体である。
4. グラフは、頂点を 0 単体、辺を 1 単体と見れば 1 次元単体的複体である。

単体的複体でない例

1. 2 本の線分が途中の点で交差している図形は、そのままでは単体的複体ではない。交点がどちらの線分の端点にもなっていないため、共通部分が共通の面になっていないからである。
2. 2 つの三角形が、一方の辺の途中だけを共有する場合も単体的複体ではない。交わりが三角形の共通の面になっていないからである。

ただし、これらの図形も、交点を新しい頂点として加え、線分や三角形をさらに分割すれば、単体的複体として扱えるようになる。この操作は後で述べる**細分**の一例である。

7.7 次元と骨格

定義 7.5 (次元). 単体的複体 K に含まれる単体の次元の最大値を、 K の**次元**という。

定義 7.6 (骨格). K に含まれる k 次元以下の単体全体からなる部分複体を、 K の k **骨格**といい、 $K^{(k)}$ と書く。

たとえば、三角形 1 枚からなる 2 次元複体の 1 骨格は、三角形の境界グラフである。このように、1 骨格はグラフになる。

四面体 1 個からなる 3 次元複体では、 $K^{(0)}$ は 4 つの頂点からなる集合、 $K^{(1)}$ は四面体の辺全体からなるグラフ、 $K^{(2)}$ は四面体の境界面全体、 $K^{(3)} = K$ である。

7.8 多面体と幾何学的実現

定義 7.7. 単体的複体 K に含まれる単体をすべて貼り合わせて得られる部分空間 $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ を K の**多面体**または**幾何学的実現**という。

ここで重要なのは、次の区別である。

K = 単体の貼り合わせ方を記録した組合せデータ

$|K|$ = 実際に得られる位相空間

同じ位相空間でも、異なる単体的複体として表されることがある。

たとえば、円周は 3 本の辺で分割しても、4 本の辺で分割してもよい。どちらも多面体としては S^1 と同相である。

円周の単体分割

3 つの頂点 v_0, v_1, v_2 と 3 本の辺 $[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_0]$ からなる複体の多面体は円周 S^1 である。

この複体では、頂点数 $V = 3$, 辺数 $E = 3$ なので、オイラー標数は $\chi(S^1) = V - E = 3 - 3 = 0$ である。

円板の単体分割

三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ とそのすべての面からなる複体の多面体は 2 次元円板である。このとき $V = 3$, $E = 3$, $F = 1$ なので、 $\chi(D^2) = V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1$ である。

7.9 抽象的単体複体

ここまでは、 $\mathbb{R}^m$ の中に実際に置かれた単体や単体的複体を考えた。しかし、ホモロジーを計算するときには、図形を描く前に どの頂点の組を単体として採用するか という組合せデータだけを指定す

る方が便利である。

この考え方を定式化したものが、抽象的単体複体である。

定義 7.8 (有限抽象的単体複体). 有限集合 A と、 A の部分集合からなる族 Δ が次の条件を満たすとき、 Δ を A 上の**有限抽象的単体複体**という。 $X \in \Delta, Y \subset X \implies Y \in \Delta$. つまり、ある集合を単体として認めたなら、そのすべての部分集合も単体として認める、という条件である。

直観: 何を忘れて何を残すか

幾何学的な単体的複体から、各単体の形・大きさ・置かれ方をすべて忘れ、「どの頂点の組が単体をなすか」という所属関係だけを残したものが抽象的単体複体である。幾何学的複体の第 1 条件 (面もすべて含む) は、そのまま部分集合について閉じているという条件になる。第 2 条件 (共通部分は共通の面) は、頂点集合の共通部分を取れば自動的に満たされるので、抽象的な定義には現れない。

集合族 Δ に属する元 $\sigma \in \Delta$ を Δ の**単体**という。

特に、 $\{v\} \in \Delta$ となる元 $v \in A$ を Δ の**頂点**という。

三角形の境界

集合族 $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ は抽象的単体複体である。これは 3 つの頂点と 3 本の辺からなる三角形の境界を表す。

ここにさらに $\{1, 2, 3\}$ を加えると、三角形の内部を含む 2 単体全体になる。

具体例: 正方形を 2 枚の三角形で表す

頂点集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上で、集合族

$$\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}$$

を考えると、どの元の部分集合も Δ に属するので、これは抽象的単体複体である。これは、正方形を対角線 $\{1, 3\}$ で 2 枚の三角形に分けた図形を表す。頂点数 $V = 4$, 辺数 $E = 5$, 2 単体の数 $F = 2$ であり、 $\chi = V - E + F = 4 - 5 + 2 = 1$ は円板のオイラー標数と一致する。逆に、たとえば $\{2, 4\}$ はこの族に属さないので、頂点 2 と 4 を結ぶ辺は存在しない。

定義 7.9 (抽象的単体の次元). 抽象的単体 $\sigma \in \Delta$ の次元を $\dim \sigma = |\sigma| - 1$ で定める。したがって、1 点集合は 0 次元、2 点集合は 1 次元、3 点集合は 2 次元である。

空単体

抽象的単体複体では、空集合 $\emptyset$ も単体として扱うのが自然である。空集合を**空単体**といい、 $\dim \emptyset = -1$ と定める。ただし、本書では主に 0 次元以上の単体を中心に扱う。

7.10 抽象的単体複体の幾何学的実現

抽象的単体複体 Δ は組合せデータであり、そのままでは図形ではない。

各単体 $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ に標準 n 単体を対応させ、共通する部分集合に対応する面同士を貼り合わせると、位相空間が得られる。これを Δ の幾何学的実現といい、 $|\Delta|$ と書く。

有限抽象的単体複体は、十分高い次元のユークリッド空間の中に実際の単体的複体として実現できる。

抽象的複体から図形へ

$\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ の幾何学的実現は、三角形の境界、すなわち円周である。

一方、 $\Delta \cup \{\{1, 2, 3\}\}$ の幾何学的実現は、三角形の内部を含む円板である。

7.11 単体写像

抽象的単体複体間の写像では、頂点を頂点へ写すだけでなく、単体が単体へ写ることを要求する。

定義 7.10 (単体写像). Δ_1, Δ_2 を抽象的単体複体とする。写像 $f: V(\Delta_1) \rightarrow V(\Delta_2)$ が、任意の単体 $\sigma \in \Delta_1$ に対して $f(\sigma) = \{f(v) \mid v \in \sigma\} \in \Delta_2$ を満たすとき、 f を Δ_1 から Δ_2 への**単体写像**という。

ここで、 σ の異なる頂点が同じ頂点に写ってもよい。したがって、単体写像は一般には次元を保たず、三角形を辺や点につぶすことも許される。

単体写像である場合とそうでない場合

三角形の境界 $\Delta = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ では、頂点集合 $\{1, 2, 3\}$ から自分自身への任意の写像は単体写像である。

一方、 $\Lambda = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ では、すべての頂点写像が単体写像になるわけではない。たとえば、 $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$ とすると、 $\{1, 2\} \in \Lambda$ の像は $\{2, 3\}$ であるが、 $\{2, 3\} \notin \Lambda$ なので、この f は単体写像ではない。

幾何学的実現は関手である

単体写像 $f: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ が与えられると、幾何学的実現の間の連続写像

$$|f|: |\Delta_1| \rightarrow |\Delta_2|$$

が誘導される。頂点をどこへ送るかが決まれば、各単体の内部では線形に写すことで連続写像が定まる。

さらに、単体写像 $f: \Delta_1 \rightarrow \Delta_2, g: \Delta_2 \rightarrow \Delta_3$ に対して

$$|g \circ f| = |g| \circ |f|, \quad |\text{id}_\Delta| = \text{id}_{|\Delta|}$$

が成り立つ。したがって、抽象的単体複体と単体写像からなる世界から、位相空間と連続写像からなる世界へ、

$$\Delta \mapsto |\Delta|$$

という対応が得られる。圏論の言葉では、幾何学的実現は一つの関手である。

直観: 単体写像と単体近似

単体写像は「頂点の行き先を決めれば残りは線形に写す」という、きわめて制限の強い写像である。それでも単体写像を考える価値があるのは、多面体の間の任意の連続写像が、定義域の複体を十分細かく細分すれば、もとの写像とホモトピックな単体写像で置き換えられる (**単体近似定理**) からである。つまり、連続写像の情報は有限個の頂点の対応表に圧縮でき、これが後の章で写像がホモロジー群に誘導する準同型を計算する際の基礎になる。細分が必要になる理由の一つはここにある。

7.12 向き付き単体

次章のホモロジー群の定義では、単体をただ数えるだけでなく、符号付きで足し引きする。そのために向きが必要になる。

定義 7.11 (向き). n 単体 $[v_0, \dots, v_n]$ の向きとは、頂点の順序 $(v_0, \dots, v_n)$ を偶置換までは同じ、奇置換では反対とみなしたものである。

1 単体 (v_0, v_1) は、 v_0 から v_1 へ向かう向きを持つ。順序を逆にすると、 $(v_1, v_0) = -(v_0, v_1)$ と考える。

2 単体 (v_0, v_1, v_2) は、三角形を $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ の順に回る向きを持つ。頂点を奇置換すると向きが反対になる。たとえば $(v_1, v_0, v_2) = -(v_0, v_1, v_2)$ である。

具体例:2 単体の向きはちょうど 2 通り

2 単体の頂点の並べ方は $3! = 6$ 通りあるが、偶置換で移り合うものを同一視すると 2 つの組に分かれる。

$$(v_0, v_1, v_2) = (v_1, v_2, v_0) = (v_2, v_0, v_1), \quad (v_0, v_2, v_1) = (v_2, v_1, v_0) = (v_1, v_0, v_2).$$

前の 3 つは $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2$ と回る向き、後の 3 つはその逆回りの向きを表し、互いに符号 -1 倍の関係にある。一般に $n \geq 1$ のとき、 n 単体の向きはつねにちょうど 2 通りである (置換全体が偶置換と奇置換の 2 つの類に分かれるため)。

向きの役割

向きを入れることで、隣り合う辺や面が符号付きで打ち消し合う。これにより、次章で示す $\partial \circ \partial = 0$ すなわち「境界の境界はない」という性質が成り立つ。

7.13 境界の式への予告

次章で定義する鎖群では、向き付き単体を形式的に足し合わせる。そのとき、単体の境界を次のように符号付きで書く。

1 単体では、 $\partial(v_0, v_1) = (v_1) - (v_0)$ である。これは、向き付き線分の終点－始点を表している。

2 単体では、 $\partial(v_0, v_1, v_2) = (v_1, v_2) - (v_0, v_2) + (v_0, v_1)$ である。これは、三角形の境界を向き付き辺の和として表している。

一般には、

$$\partial(v_0, \dots, v_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$$

である。ここで $\widehat{v_i}$ は v_i を取り除くことを表す。

具体例: 四面体の境界を書き下す

3 単体 (v_0, v_1, v_2, v_3) に一般の式を適用すると、

$$\partial(v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) - (v_0, v_2, v_3) + (v_0, v_1, v_3) - (v_0, v_1, v_2)$$

である。 v_0 を除いた面は符号 $(-1)^0 = +1$, v_1 を除いた面は $(-1)^1 = -1$, 以下交互に符号が付く。右辺は四面体の 4 枚の三角形面に符号を付けて足したものであり、符号は「隣り合う面の共有辺が互いに逆向きに現れる」ように選ばれている。

三角形で境界の境界を確認する

三角形 (v_0, v_1, v_2) について、 $\partial(v_0, v_1, v_2) = (v_1, v_2) - (v_0, v_2) + (v_0, v_1)$ である。さらに境界を取ると、

$$\begin{aligned} \partial\partial(v_0, v_1, v_2) &= ((v_2) - (v_1)) - ((v_2) - (v_0)) + ((v_1) - (v_0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

この計算は、「境界線には端点がない」という直感を代数的に表している。

7.14 単体分割とオイラー標数

単体的複体を使うと、図形のオイラー標数を単体の個数から計算できる。

2 次元の有限複体では、頂点数を V , 辺数を E , 2 単体の数を F とすると、 $\chi = V - E + F$ である。

球面

正四面体の境界は 4 枚の三角形からなる。その多面体は球面 S^2 と同相である。

頂点数, 辺数, 面数は $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$ なので、 $\chi(S^2) = V - E + F = 4 - 6 + 4 = 2$ 。

円板

三角形 1 枚からなる円板では $V = 3$, $E = 3$, $F = 1$ なので, $\chi(D^2) = 3 - 3 + 1 = 1$.

トーラス

トーラスは, 正方形の向かい合う辺を同じ向きに貼り合わせて得られる。正方形を 1 本の対角線で 2 つの三角形に分けると, トーラスを三角形で表す図が得られる。

ただし, この表示では貼り合わせ後に複数の頂点や辺が同一視されるため, 厳密には通常の単体的複体というより, Δ 複体または多角形表示として理解するのが自然である。さらに細分すれば, 通常の単体的複体による三角形分割が得られる。

この多角形表示では, 貼り合わせ後の数を形式的に数えると $V = 1$, $E = 3$, $F = 2$ となり, $\chi(T^2) = V - E + F = 1 - 3 + 2 = 0$ である。

多角形表示と単体的複体

トーラスの正方形表示は直感的には便利であるが, 厳密な意味での単体的複体とは少し異なる。本書では, まず単体的複体でホモロジーを定義し, 必要に応じて細分により通常の単体的複体に直して考える。

具体例: トーラスの本当の三角形分割

貼り合わせによる同一視を使わない, 通常の単体的複体としてのトーラスの三角形分割で頂点数が最小のものは, 頂点数 $V = 7$, 辺数 $E = 21$, 三角形面数 $F = 14$ を持つことが知られている。このときも

$$\chi(T^2) = V - E + F = 7 - 21 + 14 = 0$$

であり, 正方形表示から形式的に数えた値 $1 - 3 + 2 = 0$ と一致する。同様に, 射影平面 $\mathbb{RP}^2$ の最小の三角形分割は $V = 6$, $E = 15$, $F = 10$ を持ち, $\chi(\mathbb{RP}^2) = 6 - 15 + 10 = 1$ である。オイラー標数は分割の仕方によらないので, 計算にはいちばん数えやすい表示を使えばよい。

7.15 細分

定義 7.12 (細分). 単体的複体 K の各単体をさらに小さな単体に分割して得られる複体 K' が, 同じ多面体 $|K'| = |K|$ を表すとき, K' を K の**細分**という。

複体をより細かく分割しても, 多面体の位相型は変わらない。ホモロジー群は細分によらない不変量になるので, 計算しやすい分割を選んでよい。

例: 線分の細分

線分 $[v_0, v_1]$ の途中に新しい頂点 w を加えると, $[v_0, w]$, $[w, v_1]$ という 2 本の線分に分かれる。多面体としては同じ線分である。

オイラー標数を比べると、細分前は $V = 2$, $E = 1$, $\chi = 1$. 細分後は $V = 3$, $E = 2$, $\chi = 1$. したがってオイラー標数は変わらない。

例：三角形の細分

三角形に 1 本の辺を加えて 2 枚の三角形に分けても、多面体は同じ円板である。このとき頂点数、辺数、面数は同時に変わるが、 $V - E + F$ は変わらない。

7.16 重心細分

特に重要な細分が**重心細分**である。

重心細分では、各単体の重心を新しい頂点として加え、単体をより小さな単体に分ける。

三角形の重心細分

三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ の重心細分を考える。まず、三角形全体の重心、3 本の辺の midpoint、3 つの頂点を用意する。そして、頂点、辺の midpoint、三角形の重心を順に結ぶと、もとの三角形は 6 個の小三角形に分かれる。

この 6 個という数は、頂点、辺、面を次元の小さい順に並べる方法の数と対応している。具体的には、三角形の頂点の一つを選び、その頂点を含む辺の一つを選び、最後に三角形全体を選ぶ、という列から小三角形ができる。

重心細分の重要な点は、空間の位相を変えないまま、単体を細かくできることである。したがって、写像や交わりを単体的に扱いやすくなりたいときに用いられる。

重心細分を使うと、単体同士の交わりを整えたり、写像を単体的写像に近づけたりできる。このため、ホモロジー論では重心細分が重要な役割を果たす。

7.17 発展：重心細分とヒーガード分解

この節は発展的内容である。重心細分は、ホモロジーの準備だけでなく、3 次元多様体の構造を調べる道具にもなる。

向き付け可能な連結閉 3 次元多様体 M の有限三角形分割の一つ取る。このとき、もとの 1 骨格を少し太らせるとハンドル体を得られる。また、各四面体の重心を頂点とし、隣り合う四面体の重心を共有面の重心を通して結ぶと、双対 1 骨格を得られる。この双対 1 骨格を太らせたものもハンドル体になる。

2 回重心細分しておくと、もとの 1 骨格の正則近傍と双対 1 骨格の正則近傍を、同じ三角形分割の中で補完的に扱いやすくなる。

補足: ハンドル体と正則近傍

種数 g の**ハンドル体**とは、3 次元球体に g 個の 1 ハンドル $D^2 \times [0, 1]$ を境界に沿って貼り付けて得られる 3 次元多様体である。 $g = 0$ なら球体、 $g = 1$ なら中身の詰まったトーラス (ソリッドトーラス) であり、境界は種数 g の閉曲面になる。また、複体の中の部分複体 (たとえば

グラフ) の**正則近傍**とは、その部分複体を少しだけ太らせて得られる近傍のことで、グラフの場合は、頂点を球体に、辺を 1 ハンドルに太らせたものと思えばよい。

定義 7.13 (ヒーガード分解). 閉 3 次元多様体 M が $M = H_1 \cup_{\Sigma} H_2$, $H_1 \cap H_2 = \partial H_1 = \partial H_2 = \Sigma$ と表され、 H_1, H_2 がともにハンドル体であるとき、この分解を**ヒーガード分解**という。共通境界 Σ を**ヒーガード曲面**という。

定理 7.14 (閉 3 次元多様体のヒーガード分解). 向き付け可能な連結閉 3 次元多様体 M は、必ずヒーガード分解を持つ。

Proof. 閉 3 次元多様体は有限三角形分割を持つことが知られている (モイズの定理)。そこで K を M の有限三角形分割とする。必要なら K を 2 回重心細分し、 $K'' = \text{sd}^2 K$ と書く。重心細分は多面体を変えないので、 $|K''| = |K| = M$ である。

まず、もとの三角形分割 K の 1 骨格 $K^{(1)}$ を考える。これは有限連結グラフである。 K'' の中で $K^{(1)}$ の正則近傍を取り、 $H_1 = N(K^{(1)})$ とおく。有限連結グラフの正則近傍は、各頂点を 3 次元球に、各辺を 1 ハンドルに太らせたものであり、 M が向き付け可能なので 1 ハンドルはねじれずに付く。したがって H_1 はハンドル体である。

次に、 K の双対 1 骨格 Γ^* を考える。各四面体 Δ の重心を頂点とし、2 つの四面体 Δ, Δ' が三角形面 τ を共有するとき、 $b_{\Delta} - - b_{\tau} - - b_{\Delta'}$ という辺を入れる。 M は閉多様体なので、各三角形面はちょうど 2 つの四面体に接しており、この構成により有限連結グラフ Γ^* が得られる。

2 回重心細分しておく、 $K^{(1)}$ の正則近傍と Γ^* の正則近傍を、互いに補完的な部分複体として取ることができる。直感的には、各四面体から頂点と辺の近くを取り除くと、四面体の重心のまわりに 3 次元球が残り、共有面をまたぐ部分がそれらをつなぐ 1 ハンドルになる。

したがって $H_2 = \overline{M \setminus \text{int } H_1}$ は、双対 1 骨格 Γ^* の正則近傍と同相である。ゆえに H_2 もハンドル体である。

最後に $\Sigma = \partial H_1 = \partial H_2$ とおけば、 $M = H_1 \cup_{\Sigma} H_2$ であり、 H_1, H_2 はともにハンドル体である。したがって、これは M のヒーガード分解である。□

発展節の位置づけ

この証明で重要なのは、細分により、もとの骨格と双対骨格を同じ複体の中で扱いやすくてできるという点である。本書の主目的はホモロジー群の準備であるため、ヒーガード分解は発展的な応用として理解すればよい。

7.18 まとめ

単体的複体は、連続的な図形を離散的なデータで扱う装置である。単体、面、複体、多面体、抽象的単体複体、単体写像、向き、細分を理解しておくと、次章以降のホモロジー群の定義が自然に見える。この章で学んだ流れは次の通りである。

単体 $\rightarrow$ 単体的複体 $\rightarrow$ 多面体 $\rightarrow$ 抽象的単体複体 $\rightarrow$ 向きと境界 $\rightarrow$ 鎖群への準備

以後は、複体 K に対して鎖群 $C_n(K)$ を作り、境界写像の核と像を比較することでホモロジー群を定義する。

7.19 次章への橋渡し

次章では、単体を整数係数で形式的に足し合わせた鎖群を導入する。例えば、三角形の周だけからなる複体では

$$C_0 \cong \mathbb{Z}^3, \quad C_1 \cong \mathbb{Z}^3, \quad C_2 = 0$$

であり、内部の 2 単体を加えると $C_2 \cong \mathbb{Z}$ が現れる。この違いが、周を一周するサイクルが境界になるかどうかを決める。詳しい定義と計算は次章で行う。

練習問題 (標準)

1. 正八面体の境界複体は、頂点数 6, 辺数 12, 三角形面数 8 を持つ。この境界複体のオイラー標数を求めよ。
2. 頂点集合 $\{0, 1, 2\}$ 上の集合族

$$K = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}\}$$

が抽象的単体複体であることを確認せよ。

3. 集合族

$$L = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

が抽象的単体複体でない理由を説明せよ。

4. 五角形に中心点を加え、中心点と各頂点を結んで 5 枚の三角形に分ける。得られる単体的複体の頂点数, 辺数, 2 単体の数を数えよ。
5. 2 つの三角形が辺の途中の一点だけで交わる図形は、そのままでは単体的複体とは限らない。どのような細分を加えれば単体的複体として扱えるか説明せよ。
6. 向き付けられた 2 単体について,

$$\partial[v_1, v_3, v_2]$$

を書き下せ。

7. 向き付けを入れ替えたとき,

$$[v_0, v_2, v_1] = -[v_0, v_1, v_2]$$

とみなす理由を説明せよ。

8. 1 本の線分を 3 本の線分に細分したとき、オイラー標数が変わらないことを確認せよ。
9. 多面体として同じ空間を表す単体的複体が複数あり得る理由を説明せよ。
10. 単体的複体を使うと、曲面やグラフを有限個の部品で扱える。この利点をホモロジー計算の観点から説明せよ。

練習問題（発展）

1. 頂点集合 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ 上で，五角形の周だけを表す抽象的単体複体を書け。
2. 円板を 5 枚の三角形に分けた複体と，五角形の周だけからなる複体では，どのような穴の有無が異なるか説明せよ。
3. 四面体の境界複体を細分しても，オイラー標数が 2 のままであることを，細分前後のセルの増減から説明せよ。
4. 3 次元多様体を三角形分割して考えることが，ハンドル分解や双対複体の考え方につながる理由を述べよ。

第 8 章

単体的ホモロジー群の定義

8.1 この章で学ぶこと

この章では、単体複体から鎖群と境界作用素を作り、単体的ホモロジー群を定義する。図形を、点・辺・三角形などの形式的な和として代数的に扱うことが基本方針である。

- 単体複体と向き付けられた単体の意味を確認する。
- 各次元の鎖群 $C_n(K)$ の定義を理解する。
- 境界作用素 $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ の定義と計算方法を理解する。
- 「境界の境界はない」こと、すなわち $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ を理解する。
- サイクル、バウンダリ、ホモロジー群 $H_n(K) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ の意味を理解する。
- 簡単な単体複体について、鎖群と境界作用素を具体的に書けるようにする。

学習の指針

この章は本書後半の土台であり、ホモロジー群 $H_n(K) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ の定義そのものを理解することが目標である。前提となる既習事項は、前章の単体的複体と向き付き単体、および群論の商群・準同型・核・像である。初出の概念は、鎖群、境界作用素、サイクル、バウンダリ、ホモロジー群、チェイン複体である。抽象的な定義が続くが、そのたびに「三角形の周(円周)」と「内部を含む三角形」の 2 つの複体で手を動かして確かめれば、定義の意味は必ず追える。自由アーベル群や商群に不安があれば、巻末付録「群論と線形代数の要点」も参照するとよい。

8.2 ホモロジー群の考え方

基本群では、空間の中のループを調べた。円周 S^1 の基本群が $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ であることは、円周のまわりを何回まわるかという情報を表していた。

ホモロジー群でも、空間の中の「穴」を調べる。ただし、基本群とは少し違い、ホモロジー群では図形を代数的に扱う。

そのために、まず図形を 頂点, 辺, 三角形, 四面体, ... に分解し、それらを形式的に足し合わせる。

たとえば、辺 e_1, e_2, e_3 があるとき、 $e_1 + e_2 + e_3$ という式は、3 本の辺を足し合わせた 1 次鎖を

表す。

また、 $2e_1 - e_2 + 5e_3$ のように整数係数をつけて足し合わせることも許す。

このように、図形を代数的な対象に変換し、境界を計算することで、空間の穴を調べるのが単体的ホモロジーである。

基本方針

単体的ホモロジーでは、次の流れで空間を調べる。

単体複体 $\rightarrow$ 鎖群 $\rightarrow$ 境界作用素 $\rightarrow$ サイクルとバウンダリ $\rightarrow$ ホモロジー群

8.3 単体と向き

向きが必要な理由

ホモロジーでは、単体を足し合わせたり、境界を足し合わせたりする。このとき、境界が打ち消し合うかどうかを判断するには向きが必要である。

たとえば、二つの三角形が一つの辺を共有しているとする。その共有辺が一方の三角形では正向きに、他方では逆向きに現れれば、二つを足したとき共有辺は打ち消し合う。この打ち消しが、閉じた面やサイクルを作る仕組みである。

まず、単体について復習する。

- 0 単体は頂点である。
- 1 単体は辺である。
- 2 単体は三角形である。
- 3 単体は四面体である。

頂点 $v_0, \dots, v_n$ で張られる n 単体を $[v_0, \dots, v_n]$ と書く。

単体的ホモロジーでは、単体に向きをつけて扱う。前章では、図形としての単体 $[v_0, \dots, v_n]$ と区別するために、向き付き単体を丸括弧で $(v_0, \dots, v_n)$ と書いた。本章以降は鎖群の元としての向き付き単体だけを扱うので、多くの教科書の慣例に従い、向き付き単体も角括弧で $[v_0, \dots, v_n]$ と書く。すなわち、以後の $[v_0, \dots, v_n]$ は頂点の順序 $v_0, \dots, v_n$ で向き付けられた単体を表す。たとえば、辺 $[v_0, v_1]$ は、 v_0 から v_1 へ向かう向きを持つ。逆向きの辺は $[v_1, v_0]$ であり、 $[v_1, v_0] = -[v_0, v_1]$ と考える。

三角形でも同様に、 $[v_0, v_1, v_2]$ は、頂点の順序によって向き付けられた三角形を表す。

頂点の順序を奇置換すると符号が変わる。たとえば $[v_1, v_0, v_2] = -[v_0, v_1, v_2]$ である。

向きの役割

境界を符号付きで足し合わせるためには、単体の向きが必要である。向きを入れることで、隣り合う辺や面が打ち消し合うことを代数的に表現できる。

8.4 鎖群

鎖は「向き付き単体の形式和」

鎖群 $C_n(K)$ の元は、 n 次元単体を整数係数で足し合わせたものである。ここで整数係数を許すことにより、同じ単体を何回通るか、また逆向きに通るかを表現できる。

たとえば、辺 e_1, e_2, e_3 からなる三角形の周は

$$e_1 + e_2 + e_3$$

のような 1 次元鎖として表される。この段階では、鎖はまだ「閉じている」とは限らない。閉じているかどうかは、次に定義する境界作用素で判定する。

K を単体複体とする。 K に含まれる n 次元の単体を n 単体という。

単体的ホモロジーでは、向き付けられた n 単体を整数係数で形式的に足し合わせたものを考える。

K に含まれる向き付けられた n 単体全体を K_n と書く。このとき、

$$C_n(K) = \left\{ \sum_{\sigma \in K_n} a_\sigma \sigma \mid a_\sigma \in \mathbb{Z}, a_\sigma \neq 0 \text{ となる } \sigma \text{ は有限個} \right\}$$

と定める。

これを n 次鎖群という。その元を n 次鎖という。

有限単体複体では、 K_n が有限集合なので、 $C_n(K) = \bigoplus_{\sigma \in K_n} \mathbb{Z}\sigma$ と書ける。つまり、 $C_n(K)$ は、 K に含まれる向き付けられた n 単体を基底とする自由アーベル群である。

復習: 自由アーベル群・基底・形式和

アーベル群 F が $x_1, \dots, x_r$ を基底とする自由アーベル群であるとは、 F の任意の元が $a_1x_1 + \dots + a_rx_r$ ($a_i \in \mathbb{Z}$) の形に一意的に書けることをいう。このとき、対応 $a_1x_1 + \dots + a_rx_r \mapsto (a_1, \dots, a_r)$ によって $F \cong \mathbb{Z}^r$ となる。「形式和」とは、 x_i たちの間にもともと足し算が定義されていなくても、係数の組 $(a_1, \dots, a_r)$ を指定したものを和の記号で書いた、という意味である。たとえば $2e_1 - e_2$ は「 e_1 の係数が 2、 e_2 の係数が -1 、他は 0」というデータにほかならず、和は係数ごとに

$$(2e_1 - e_2) + (e_1 + 3e_2) = 3e_1 + 2e_2$$

と計算する。

鎖群の例

K に 1 単体 e_1, e_2, e_3 があるとする。このとき $C_1(K) = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \mathbb{Z}e_3 \cong \mathbb{Z}^3$ である。

例えば $2e_1 - e_2 + 5e_3$ は 1 次鎖である。

8.5 鎖群の具体例

例 1：線分

線分 $K = [v_0, v_1]$ を考える。頂点は v_0, v_1 であり、辺は $[v_0, v_1]$ である。

したがって $C_0(K) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \cong \mathbb{Z}^2$, $C_1(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \cong \mathbb{Z}$, $C_n(K) = 0$ ($n \geq 2$) である。

例 2：三角形の境界

三角形の周だけからなる単体複体を考える。頂点を v_0, v_1, v_2 とし、辺を $[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_0]$ とする。

このとき $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^3$, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$, $C_n(K) = 0$ ($n \geq 2$) である。

重要なのは、この複体には三角形の内部が含まれていないことである。したがって $C_2(K) = 0$ である。

具体例: 鎖を $\mathbb{Z}^3$ のベクトルとみなす

例 2 の複体で、 $C_1(K)$ の基底を $e_1 = [v_0, v_1]$, $e_2 = [v_1, v_2]$, $e_3 = [v_2, v_0]$ の順に固定すると、1 次鎖は整数ベクトルと同一視できる。たとえば

$$e_1 + e_2 + e_3 \longleftrightarrow (1, 1, 1), \quad 2e_1 - e_3 \longleftrightarrow (2, 0, -1), \quad -e_2 \longleftrightarrow (0, -1, 0)$$

である。逆向きの辺は $[v_1, v_0] = -e_1 \longleftrightarrow (-1, 0, 0)$ に対応する。このように鎖群を $\mathbb{Z}^{(n \text{ 単体の個数})}$ とみなす見方が、後の章で境界作用素を行列として扱う計算の出発点になる。

例 3：三角形の内部を含む場合

三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ の内部も含む単体複体を考える。この場合、 $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^3$, $C_1(K) \cong \mathbb{Z}^3$, $C_2(K) \cong \mathbb{Z}$ である。

三角形の周だけの場合と比べると、 $C_2(K)$ が新たに現れる。この違いが、後で H_1 の違いとして現れる。

8.6 境界作用素

境界作用素の符号

境界作用素では、頂点を一つずつ取り除いて得られる面を足し合わせる。その際に符号 $(-1)^i$ が付くのは、面に誘導される向きを正しくそろえるためである。

この符号のおかげで、境界をもう一度取ると各面が二回ずつ逆符号で現れ、互いに打ち消し合う。したがって

$$\partial \circ \partial = 0$$

が成り立つ。この性質がなければ、サイクルとバウンダリを用いてホモロジー群を定義するこ

とはできない。

次に、単体の境界を代数的に表す写像を定義する。

境界作用素は、 n 次元の単体に対して、その境界をなす $(n-1)$ 次元の単体の符号付き和を対応させる写像である。

向き付けられた n 単体 $[v_0, \dots, v_n]$ に対し、

$$\partial_n[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$$

と定める。ここで、 $\widehat{v_i}$ は頂点 v_i を取り除くことを表す。

この対応を線形に拡張して得られる準同型 $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ を境界作用素という。

すなわち、 $c = a_1\sigma_1 + \dots + a_r\sigma_r$ に対して、 $\partial_n c = a_1\partial_n\sigma_1 + \dots + a_r\partial_n\sigma_r$ である。

また、0 次鎖の境界は常に 0 と定める。すなわち $\partial_0[v] = 0$ である。

具体例: 定義の式を 1 単体・2 単体に適用する

$n=1$ のとき、定義の和は $i=0, 1$ の 2 項からなる。 $i=0$ では v_0 を取り除いて $[v_1]$ 、 $i=1$ では v_1 を取り除いて $[v_0]$ が得られるので、

$$\partial_1[v_0, v_1] = (-1)^0[v_1] + (-1)^1[v_0] = [v_1] - [v_0]$$

である。 $n=2$ のときは $i=0, 1, 2$ の 3 項で、

$$\partial_2[v_0, v_1, v_2] = (-1)^0[v_1, v_2] + (-1)^1[v_0, v_2] + (-1)^2[v_0, v_1] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

である。「 i 番目の頂点を取り除いた面に符号 $(-1)^i$ を付けて足す」という操作を、このように機械的に実行すればよい。

8.7 境界作用素の基本例

0 単体

頂点 $[v_0]$ については $\partial_0[v_0] = 0$ である。

頂点にはそれ以上低い次元の境界はない。

1 単体

向き付けられた辺 $[v_0, v_1]$ について、 $\partial_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$ である。

これは 終点 − 始点 を表している。

2 単体

向き付けられた三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ について、 $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ である。

三角形の境界が三つの辺からなることを、符号付きで表している。

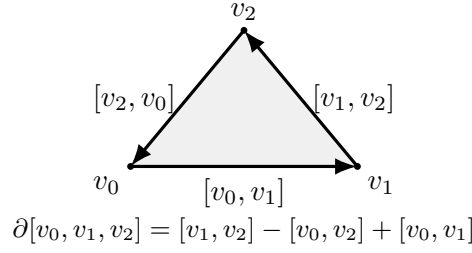


図 8.1 向き付き三角形の境界。符号は誘導される辺の向きを表す。

3 単体

向き付けられた四面体 $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ について,

$$\partial_3[v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2].$$

これは、四面体の境界が 4 枚の三角形からなることを表している。

8.8 境界計算の例

1 次鎖の境界

頂点 v_0, v_1, v_2 と辺 $[v_0, v_1], [v_1, v_2]$ を考える。1 次鎖 $c = 2[v_0, v_1] - [v_1, v_2]$ の境界を求める。境界作用素の線形性より,

$$\begin{aligned}\partial_1 c &= 2\partial_1[v_0, v_1] - \partial_1[v_1, v_2] \\ &= 2([v_1] - [v_0]) - ([v_2] - [v_1]) \\ &= -2[v_0] + 3[v_1] - [v_2].\end{aligned}$$

したがって $\partial_1 c = -2[v_0] + 3[v_1] - [v_2]$.

円周を一周する鎖

円周を 3 本の辺 $[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0]$ で分割した単体複体を考える。

1 次鎖 $z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ の境界を計算すると,

$$\begin{aligned}\partial_1 z &= ([v_1] - [v_0]) + ([v_2] - [v_1]) + ([v_0] - [v_2]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって、円周を一周する鎖は境界を持たない。

具体例: 境界作用素を行列で表す

上の円周の複体で, C_1 の基底を $[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_0]$, C_0 の基底を $[v_0]$, $[v_1]$, $[v_2]$ の順に取る。 $\partial_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$ などから, ∂_1 は整数行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される (j 列目は j 番目の辺の境界の係数を並べたものである)。鎖 $z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ はベクトル $(1, 1, 1)$ に対応し,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので, $\partial_1 z = 0$ が行列計算でも確かめられる。

8.9 境界の境界はない

定理 8.1. 任意の $n \geq 1$ に対して, $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ が成り立つ。

Proof. 向き付けられた n 単体 $[v_0, \dots, v_n]$ について確認すれば十分である。

境界を二回取ると, 二つの頂点 v_i, v_j を取り除いた $(n-2)$ 単体が現れる。 $i < j$ とすると, この単体は二通りで現れる。

一つは, 先に v_i を取り除き, 次に v_j を取り除く方法である。このとき, 二回目には v_j の位置が一つ前にずれているので, 符号は $(-1)^i(-1)^{j-1} = (-1)^{i+j-1}$ である。

もう一つは, 先に v_j を取り除き, 次に v_i を取り除く方法である。このとき符号は $(-1)^j(-1)^i = (-1)^{i+j}$ である。

これらは互いに反対符号なので打ち消し合う。したがって $\partial_{n-1}\partial_n[v_0, \dots, v_n] = 0$ である。

線形性により, 任意の n 次鎖についても同じことが成り立つ。 □

この定理は, 「境界の境界はない」という幾何的事実を代数的に表している。

三角形での確認

向き付けられた 2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ について, $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$. さらに境界をとると,

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2[v_0, v_1, v_2] &= \partial_1[v_1, v_2] - \partial_1[v_0, v_2] + \partial_1[v_0, v_1] \\ &= ([v_2] - [v_1]) - ([v_2] - [v_0]) + ([v_1] - [v_0]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

直観: なぜ必ず打ち消し合うのか

上の三角形の計算で、頂点 $[v_2]$ に注目してみる。 $[v_2]$ は v_0, v_1 の 2 つを取り除くと現れるが、取り除く順序が 2 通りある。先に v_0 を除くと $+ [v_1, v_2]$ を経て $+ [v_2]$ が、先に v_1 を除くと $- [v_0, v_2]$ を経て $- [v_2]$ が現れ、符号がちょうど逆になる。定理の証明に現れた符号 $(-1)^{i+j-1}$ と $(-1)^{i+j}$ の比較は、この「同じ面が 2 通りの順序で 1 回ずつ、互いに逆符号で現れる」ことを一般の次元で述べたものである。

8.10 サイクルとバウンダリ

境界作用素を用いて、二種類の鎖を定義する。

定義 8.2. $Z_n(K) = \text{Ker}(\partial_n) = \{c \in C_n(K) \mid \partial_n c = 0\}$ を n 次サイクル群という。これは、境界を持たない n 次鎖全体の群である。

具体例: サイクルかどうかを判定する

頂点 v_0, v_1, v_2 と 3 本の辺 $[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0]$ からなる複体で考える。

- $c_1 = [v_0, v_1]$ は、 $\partial_1 c_1 = [v_1] - [v_0] \neq 0$ なのでサイクルではない。
- $c_2 = [v_0, v_1] + [v_1, v_2]$ は、 $\partial_1 c_2 = [v_2] - [v_0] \neq 0$ なのでサイクルではない。
- $z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ は、 $\partial_1 z = 0$ なのでサイクルである。

途中で止まっている道は端点が境界として残り、一周して閉じたときにはじめて境界が消える。「サイクル (輪)」という名前は、この閉じた形にちなんでいる。

定義 8.3. $B_n(K) = \text{Im}(\partial_{n+1}) = \{\partial_{n+1} d \mid d \in C_{n+1}(K)\}$ を n 次バウンダリ群という。これは、一つ上の次元の鎖の境界として現れる n 次鎖全体の群である。

直観: 「境界のない鎖」と「何かの境界である鎖」

$Z_n(K)$ は「自分自身は境界を持たない (閉じた) 鎖」の集まりであり、 $B_n(K)$ は「一つ上の次元の何かの縁 (バウンダリ) として現れる鎖」の集まりである。たとえば、円周を一周する鎖はどこにも端点が残らないのでサイクルであり、内部を含む三角形の周は 2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ の境界なのでバウンダリである。名前のとおり、「境界のないもの」がサイクル、「何かの境界であるもの」がバウンダリと覚えればよい。

定理 $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ より、 $B_n(K) \subset Z_n(K)$ が成り立つ。

実際、 $b = \partial_{n+1} d$ ならば、 $\partial_n b = \partial_n \partial_{n+1} d = 0$ である。

したがって、すべてのバウンダリはサイクルである。

サイクルとバウンダリの違い

三角形の境界は閉じた輪なのでサイクルである。しかし、三角形という 2 次鎖の境界でもあるので、バウンダリでもある。

一方、円周のように、中を埋める 2 単体が存在しない場合、円周を一周する鎖はサイクルではあるが、バウンダリではない。この違いが、空間の穴を検出する。

8.11 ホモロジー群の定義

サイクルのうち、バウンダリとして書けるものは「自明」とみなす。そのため、サイクル群をバウンダリ群で割って、次の群を定義する。

定義 8.4. $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K) = \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1})$ を n 次単体的ホモロジー群という。

復習: 商群と「ホモガス」の意味

アーベル群 A とその部分群 $B \subset A$ に対し (アーベル群では任意の部分群が正規部分群である), 商群 A/B とは, $a - a' \in B$ のとき a と a' を同じとみなして得られる群であった。 a の属する類を $[a] = a + B$ と書き, 和は $[a] + [a'] = [a + a']$ で定める。特に $[a] = 0$ となるのは $a \in B$ のとき, かつそのときに限る。ミニ例: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ では差が偶数の整数どうしを同一視し, 元は $[0]$ と $[1]$ の 2 つだけになる。 $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$ の場合, $z - z' \in B_n(K)$ となる 2 つのサイクル z, z' はホモガスであるといい, このとき $[z] = [z']$ である。つまり, 差がバウンダリで埋められるサイクルどうしを同一視するのがホモロジー群である。

この商群では, 二つの n 次サイクル z, z' について, $z - z' \in B_n(K)$ であれば同じものとみなす。すなわち, 差が一つ上の次元の境界として書けるサイクルは, ホモロジー的には同じである。

サイクル z の同値類を $[z] \in H_n(K)$ と書く。

直感的には,

$$H_n(K) = \frac{\text{境界を持たない } n \text{ 次鎖}}{\text{一つ上の次元の境界として消える } n \text{ 次鎖}}$$

である。

したがって, $H_n(K)$ は n 次元的な穴の情報を表す。

- $H_0(K)$ は連結成分の情報を表す。
- $H_1(K)$ は面で埋められない閉じた輪の情報を表す。
- $H_2(K)$ は立体で埋められない閉じた面の情報を表す。

直観: H_0 が連結成分を数える理由

0 次鎖はすべて ∂_0 で 0 に送られるので, $Z_0(K) = C_0(K)$ である。一方, 辺 $[v, w]$ の境界は $[w] - [v]$ なので, $H_0(K)$ の中では, 辺で結ばれた 2 頂点は $[w] = [v]$ と同一視される。辺をたどって行き来できる頂点はすべて 1 つの類にまとめられ, 行き来できない頂点は別の類のまま残る。したがって $H_0(K)$ は, 連結成分 1 つにつき $\mathbb{Z}$ が 1 つ現れる自由アーベル群になる。

8.12 三角形の周と三角形の内部

ホモロジー群の意味を理解するために、三角形の周だけの場合と、内部を含む場合を比べる。



周だけ： H_1 に残る 内部あり：境界として消える

図 8.2 三角形の周だけの場合と、内部を含む場合の違い。

三角形の周だけの場合

三角形の周だけからなる単体複体 K を考える。このとき $C_2(K) = 0$ 。一方、三角形の周を一周する鎖 $z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ は $\partial_1 z = 0$ を満たすので、1 次サイクルである。

しかし $C_2(K) = 0$ なので、 $B_1(K) = \text{Im } \partial_2 = 0$ である。したがって、 z はバウンダリではない。よって $[z] \neq 0 \in H_1(K)$ である。

三角形の内部を含む場合

今度は三角形の内部も含む単体複体 L を考える。このとき $C_2(L) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2]$ である。

三角形の境界は $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ である。

これは三角形の周を表す 1 次サイクルである。したがって、三角形の周は 2 次鎖の境界として現れる。よってホモロジー群では $[\partial_2[v_0, v_1, v_2]] = 0$ である。

つまり、三角形の内部を入れると、周のループは境界として消える。

穴を検出する仕組み

三角形の周だけでは、周を一周するサイクルを埋める 2 単体がない。そのため H_1 に非自明な元が残る。

一方、三角形の内部を含むと、周のサイクルは三角形の境界になる。そのため H_1 では 0 になる。

具体例: 三角形の周の H_0 と H_1 を定義から計算する

三角形の周だけの複体 K で、計算を最後まで実行してみる。まず H_1 を求める。一般の 1 次鎖 $c = p[v_0, v_1] + q[v_1, v_2] + r[v_2, v_0]$ の境界は

$$\partial_1 c = (r - p)[v_0] + (p - q)[v_1] + (q - r)[v_2]$$

なので、 $\partial_1 c = 0$ となるのは $p = q = r$ のとき、かつそのときに限る。よって $Z_1(K) = \mathbb{Z}z$ (z は周を一周する鎖) であり、 $C_2(K) = 0$ から $B_1(K) = 0$ なので

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) \cong \mathbb{Z}$$

である。次に H_0 を求める。 $Z_0(K) = C_0(K) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2]$ であり、 $B_0(K)$ は $[v_1] - [v_0]$, $[v_2] - [v_1]$, $[v_0] - [v_2]$ で生成される (3 つ目は前の 2 つの和の (-1) 倍なので、生成元としては実質 2 つである)。商群では $[v_0] = [v_1] = [v_2]$ と同一視されるので、どの 0 次鎖の類も $[v_0]$ の整数倍になり、 $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である。

8.13 チェイン複体

各次元の鎖群と境界作用素を並べると、

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

という列が得られる。

この列では、隣り合う二つの写像の合成が常に 0 になる。このような構造を**チェイン複体**という。

チェイン複体では $\text{Im}(\partial_{n+1}) \subset \text{Ker}(\partial_n)$ が成り立つため、各次元で $H_n(K) = \text{Ker}(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ を定義できる。

ホモロジー群は、チェイン複体から取り出される代数的不変量である。

具体例: 線分のチェイン複体

線分 $K = [v_0, v_1]$ (頂点 2 つと辺 1 本) のチェイン複体は

$$0 \longrightarrow C_1(K) \cong \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \cong \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

であり、 ∂_1 は $a[v_0, v_1] \mapsto a([v_1] - [v_0])$ で与えられる。 $a([v_1] - [v_0]) = 0$ となるのは $a = 0$ のときだけなので $Z_1(K) = 0$ 、よって $H_1(K) = 0$ である。また $Z_0(K) = C_0(K)$, $B_0(K) = \mathbb{Z}([v_1] - [v_0])$ であり、商群では $[v_1] = [v_0]$ と同一視されるので $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ である。このように、複体を決めるとチェイン複体が決まり、各次元のホモロジー群が一斉に定まる。

8.14 係数について

本書では基本的に整数係数 $\mathbb{Z}$ を用いる。厳密には、このホモロジー群を $H_n(X; \mathbb{Z})$ と書く。ただし、特に断りがない場合は、整数係数であることを省略して $H_n(X)$ と書く。

第 13 章では、計算を線形代数で扱いやすくするために、有理数係数 $H_n(X; \mathbb{Q})$ も用いる。係数を変えると、見える情報が変わることがある。整数係数では、向きや巻き数、ねじれに関する情報を記録できる。

一方、係数を $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ に変えると、鎖群はベクトル空間となり、線形代数の方法で計算しやすくなる。ただし、体係数では整数係数で見えるねじれ情報は失われる。

たとえば、実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ やクラインの壺では、整数係数ホモロジーに位数 2 のねじれが現れる。このような情報は、 $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$ 係数では見えなくなる。

復習: アーベル群のねじれ元

アーベル群 A の元 $a \neq 0$ が**ねじれ元**であるとは、ある正の整数 m に対して $ma = 0$ となることをいう。たとえば $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ において、元 $(0, 1)$ は $2(0, 1) = (0, 0)$ を満たす位数 2 のねじれ元である。 $\mathbb{Z}^n$ にはねじれ元が存在しないが、ホモロジー群には $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のようなねじれ部分が現れることがあり、これが本文の「位数 2 のねじれ」の意味である。係数を $\mathbb{Q}$ に変えるとベクトル空間になり、0 でない元を正の整数倍しても 0 にならないため、ねじれの情報は消える。

8.15 例題

ここでは、定義を実際の計算に使ってみる。計算の中心は、境界作用素を各単体に作用させ、線形性で全体に拡張することである。

例題 1：1 次鎖の境界

頂点 v_0, v_1, v_2 と辺 $[v_0, v_1], [v_1, v_2]$ を考える。1 次鎖 $c = 2[v_0, v_1] - [v_1, v_2]$ の境界 $\partial_1 c$ を求めよ。

解答. 境界作用素の線形性より、

$$\begin{aligned}\partial_1 c &= 2\partial_1[v_0, v_1] - \partial_1[v_1, v_2] \\ &= 2([v_1] - [v_0]) - ([v_2] - [v_1]) \\ &= -2[v_0] + 3[v_1] - [v_2].\end{aligned}$$

したがって、 $\partial_1 c = -2[v_0] + 3[v_1] - [v_2]$ である。

例題 2：三角形の境界の境界

向き付けられた 2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ について、 $\partial_1 \partial_2[v_0, v_1, v_2] = 0$ を直接計算で確かめよ。

解答. まず、 $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\partial_1 \partial_2[v_0, v_1, v_2] &= \partial_1[v_1, v_2] - \partial_1[v_0, v_2] + \partial_1[v_0, v_1] \\ &= ([v_2] - [v_1]) - ([v_2] - [v_0]) + ([v_1] - [v_0]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって、三角形の境界をさらに境界に送ると 0 になる。

例題 3：円周を一周する鎖はサイクルである

円周を 3 本の辺 $[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0]$ で分割した単体複体を考える。1 次鎖 $z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$ が 1 次サイクルであることを示せ。

解答. 境界を計算すると、

$$\begin{aligned}\partial_1 z &= ([v_1] - [v_0]) + ([v_2] - [v_1]) + ([v_0] - [v_2]) \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって $z \in \text{Ker}(\partial_1) = Z_1(K)$ であり、 z は 1 次サイクルである。

この複体には 2 単体がないので、 $C_2(K) = 0$. したがって $B_1(K) = \text{Im}(\partial_2) = 0$ であり、このサイクルはバウンダリではない。よって、 z は $H_1(K)$ の非自明な元を与える。

例題 4：三角形の周は、内部があるとバウンダリになる

三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ を含む単体複体を考える。1 次鎖 $z = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ は、ホモロジー群 $H_1(K)$ では 0 とみなされることを説明せよ。

解答. 境界作用素の定義より、 $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] = z$. したがって、 z は 2 次鎖 $[v_0, v_1, v_2]$ の境界であり、 $z \in B_1(K) = \text{Im}(\partial_2)$ である。
バウンダリはホモロジー群では 0 とみなされるので、 $[z] = 0 \in H_1(K)$ である。

例題 5： H_0 と連結成分

2 つの頂点 v_0, v_1 と、それらを結ぶ辺 $[v_0, v_1]$ からなる単体複体 K を考える。このとき $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ であることを説明せよ。

解答. 鎖群は $C_1(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1]$, $C_0(K) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1]$ である。

境界写像は $\partial_1[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$ である。

また $Z_0(K) = \text{Ker } \partial_0 = C_0(K)$ である。一方、 $B_0(K) = \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}([v_1] - [v_0])$.

したがって $H_0(K) = C_0(K)/\mathbb{Z}([v_1] - [v_0])$. この商では $[v_1] = [v_0]$ と同一視される。よって、残る生成元は 1 つであり、 $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$. これは、この複体が連結であることを表している。

8.16 まとめ

この章では、単体的ホモロジー群を次の流れで定義した。

単体複体 $\longrightarrow$ 鎖群 $C_n(K) \longrightarrow$ 境界作用素 $\partial_n \longrightarrow$ サイクルとバウンダリ $\longrightarrow$ ホモロジー群 $H_n(K)$.

鎖群 $C_n(K)$ は、 n 単体を整数係数で形式的に足し合わせた群である。境界作用素 ∂_n は、 n 次鎖にその境界である $(n-1)$ 次鎖を対応させる。

重要な性質は $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ であり、これにより $B_n(K) = \text{Im}(\partial_{n+1}) \subset Z_n(K) = \text{Ker}(\partial_n)$ が成り立つ。

したがって、単体的ホモロジー群は $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$ と定義される。

これは cycles/boundaries という形をしており、「境界を持たない鎖」のうち、「一つ上の次元の境界として説明できないもの」を測っている。

次章では、この定義に基づいて、具体的な単体複体のホモロジー群を計算する。

練習問題（標準）

1. 2 次鎖

$$c = 2[v_0, v_1, v_2] - [v_0, v_2, v_3]$$

の境界 $\partial_2 c$ を計算せよ。

2. 頂点 v_0, v_1, v_2 と辺 $[v_0, v_1], [v_1, v_2]$ からなる複体を考える。1 次鎖

$$c = [v_0, v_1] + [v_1, v_2]$$

の境界を求めよ。

3. 三角形の周を

$$z = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] - [v_0, v_2]$$

と向き付ける。 z がサイクルであることを確認せよ。

4. 2 つの三角形 $[v_0, v_1, v_2]$ と $[v_0, v_2, v_3]$ からなる正方形型の複体を考える。その鎖群 C_2, C_1, C_0 の階数を求めよ。
5. 上の複体で、外周を一周する 1 次サイクルが 2 次鎖

$$[v_0, v_1, v_2] + [v_0, v_2, v_3]$$

の境界であることを確認せよ。

6. 2 つの連結成分からなる複体として、1 本の線分と 1 つの孤立点の和を考える。このとき H_0 はどのような群になるか説明せよ。
7. 係数を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に変えると、向きの符号が区別されなくなる。このことを、1 単体の境界を例に説明せよ。
8. $B_n(K) \subset Z_n(K)$ が成り立つことは、境界の境界が 0 であることとどのように関係しているか説明せよ。

練習問題（発展）

1. 向き付き 2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ について、直接計算により $\partial_1 \partial_2 [v_0, v_1, v_2] = 0$ を確認せよ。
2. 三角形の周だけからなる複体と、内部を含む三角形の複体を比較し、どちらで H_1 が消えるかを説明せよ。
3. 係数を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に変えた場合、三角形の境界式から符号が消えることを確認せよ。

ここまでのミニ不変量表

第 8 章終了時点では、次の表を目安として、 H_0 と H_1 の意味を確認しておくといよい。

複体 K	直感	$H_0(K)$	$H_1(K)$
点	1 つの連結成分	$\mathbb{Z}$	0
線分	穴のない連結な図形	$\mathbb{Z}$	0
三角形の周	1 つの輪	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
内部を含む三角形	輪が面で埋まる	$\mathbb{Z}$	0

第 9 章

ホモロジー群の計算 (1) 定義に基づく計算

9.1 この章で学ぶこと

- 単体的ホモロジー群を定義どおり計算できるようにする。
- 各鎖群の基底を固定し、境界準同型を整数行列で表せるようにする。
- 境界行列から $\text{Ker } \partial_n$ と $\text{Im } \partial_{n+1}$ の基底を求め、商群 H_n まで計算する。
- 2 単体, 3 単体, およびそれらの境界のホモロジー群を計算する。
- 円周, グラフ, 球面などの基本例を手で計算する。
- H_1 とループの数, H_0 と連結成分の関係を理解する。
- オイラー・ポアンカレの公式を用いて, 計算結果を確認する。

学習の指針

この章は, 前章で定義した鎖群 C_n , 境界作用素 ∂_n , およびホモロジー群 $H_n = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ を, 具体的な複体に対して実際に手で計算する章である。前提となるのは, 第 8 章の定義に加えて, 線形代数 (連立一次方程式, 行列の階数) と, 群論の商群・準同型定理である。初出の概念は, オイラー・ポアンカレの公式と, 曲面の例で顔を出す「ねじれ (トーション)」である。第 4 章や第 7 章で数えたオイラー標数は, 本章で一般の複体に対して定義し直す。どの計算例も短いので, 必ず紙の上で境界写像から自分で書き下し, 本文の結果を再現しながら読み進めてほしい。

9.2 ホモロジー群の計算手順

計算で何をしているか

ホモロジー群の計算は, 次の二つを比べる作業である。第一に, 境界を持たない鎖, すなわちサイクルをすべて求める。第二に, より高次元の鎖の境界として現れるサイクル, すなわちバウンダリを求める。

ホモロジー群

$$H_n(K) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

は、「閉じている鎖」のうち、「すでに何かの境界であるもの」を 0 とみなした商である。したがって、ホモロジー群は、埋められない穴だけを記録する。

単体的ホモロジー群は、定義に従えば次の手順で計算できる。

1. 各次元の鎖群 C_n を書く。
2. 境界写像 $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ を書く。
3. サイクル群 $Z_n = \text{Ker } \partial_n$ を求める。
4. バウンダリ群 $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$ を求める。
5. 商群 $H_n = Z_n / B_n$ を計算する。

つまり、ホモロジー群の計算は

境界写像を書く $\longrightarrow$ 核と像を求める $\longrightarrow$ 商群をとる

という線形代数的な手順で行われる。

9.3 基底・境界行列・核・像：計算の全手順

ホモロジー群の定義

$$H_n(K) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

は短い、実際の計算では、その前にいくつかの準備が必要である。最も大切なのは、**各鎖群の基底とその順序を最初に固定すること**である。基底を固定すると、鎖は整数ベクトルになり、境界準同型は整数行列になる。その後は、核を連立一次方程式として求め、像を列ベクトルの整数係数一次結合として求め、最後に商群を取る。

行列計算の基本設計

各次数 n について、次の三段階を区別する。

幾何 : 向き付き単体とその境界を読む,
 線形代数 : $D_n x = 0$ を解き, D_{n+1} の列を調べる,
 群論 : $\text{Ker } D_n / \text{Im } D_{n+1}$ という商群を計算する。

「行列を書いて終わり」でも、「階数を数えて終わり」でもない。整数係数ホモロジーでは、最後の商群に有限位数の元が残ることがあるため、像を**整数係数**で正確に把握する必要がある。

9.3.1 第 0 段階：向きと基底の順序を固定する

K の n 単体に一つずつ向きを選び、

$$\mathcal{B}_n = (\sigma_1, \dots, \sigma_{f_n})$$

のように順序をつけて並べる。すると

$$C_n(K) = \mathbb{Z}\sigma_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\sigma_{f_n} \cong \mathbb{Z}^{f_n}$$

となり、鎖

$$c = x_1\sigma_1 + \cdots + x_{f_n}\sigma_{f_n}$$

を座標ベクトル

$$[c]_{\mathcal{B}_n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{f_n} \end{pmatrix}$$

で表せる。

向きや順序の選び方は一意ではない。しかし、一度決めた後は計算の途中で変えないことが重要である。向きを逆にすれば対応する基底ベクトルに -1 が掛かり、順序を変えれば行列の行または列が入れ替わるが、最終的なホモロジー群の同型型は変わらない。

よくある誤り：基底の順序を書かない

同じ境界準同型でも、基底の順序が違えば行列の見た目は変わる。したがって、行列を書く前に

$$\mathcal{B}_n = (\sigma_1, \dots, \sigma_{f_n}), \quad \mathcal{B}_{n-1} = (\tau_1, \dots, \tau_{f_{n-1}})$$

を必ず明記する。答案では、「 C_n の基底をこの順に取る」と一行書くだけで、その後の符号や列の意味が明確になる。

9.3.2 第1段階：境界準同型を行列にする

$C_n(K)$ の基底を $\mathcal{B}_n = (\sigma_1, \dots, \sigma_{f_n})$, $C_{n-1}(K)$ の基底を $\mathcal{B}_{n-1} = (\tau_1, \dots, \tau_{f_{n-1}})$ とする。各基底単体の境界を

$$\partial_n \sigma_j = \sum_{i=1}^{f_{n-1}} a_{ij} \tau_i$$

と書く。この係数 a_{ij} を並べた行列

$$D_n = (a_{ij})$$

を、基底 $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n-1}$ に関する**境界行列**という。このとき

$$[\partial_n c]_{\mathcal{B}_{n-1}} = D_n [c]_{\mathcal{B}_n}$$

が成り立つ。

列の規則

境界行列 D_n の j 列目は、定義域の j 番目の基底単体 σ_j の境界 $\partial_n \sigma_j$ の座標ベクトルである。すなわち

$$D_n = ([\partial_n \sigma_1]_{\mathcal{B}_{n-1}} \cdots [\partial_n \sigma_{f_n}]_{\mathcal{B}_{n-1}}).$$

「像を列に入れる」と覚えるとよい。行に並べる流儀と混同すると、行列の積や核の計算がすべて転置されてしまう。

例題 1：三角形の周の境界行列を作る

三角形の周だけからなる複体を考える。辺と頂点の基底を

$$\mathcal{B}_1 = (e_{01}, e_{02}, e_{12}), \quad \mathcal{B}_0 = (v_0, v_1, v_2)$$

とする。ただし $e_{ij} = [v_i, v_j]$ である。各辺の境界は

$$\partial_1 e_{01} = v_1 - v_0, \quad \partial_1 e_{02} = v_2 - v_0, \quad \partial_1 e_{12} = v_2 - v_1.$$

したがって、各境界の係数を列に並べると

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

たとえば第 2 列 $(-1, 0, 1)^\top$ は、 $\partial_1 e_{02} = -v_0 + v_2$ を表している。

9.3.3 第 2 段階： $D_{n-1}D_n = 0$ を確認する

境界の境界は 0 なので、境界行列は

$$D_{n-1}D_n = 0$$

を満たす。これは単なる理論上の性質ではなく、**行列を正しく作れたかを検算する方法**でもある。積が零行列にならなければ、どこかで向き、符号、基底の順序のいずれかを誤っている。

たとえば、内部を含む三角形で

$$\mathcal{B}_2 = (\sigma), \quad \sigma = [v_0, v_1, v_2]$$

とすると

$$\partial_2 \sigma = e_{12} - e_{02} + e_{01}$$

だから

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

上の D_1 と掛けると

$$D_1 D_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、 $\partial_1 \partial_2 = 0$ が行列で確認できる。

9.3.4 第 3 段階：核を整数連立一次方程式として求める

一般の n 次鎖を座標ベクトル $x \in \mathbb{Z}^{f_n}$ で表すと、

$$\partial_n c = 0 \iff D_n x = 0$$

である。したがって

$$\text{Ker } \partial_n \cong \{x \in \mathbb{Z}^{f_n} \mid D_n x = 0\}$$

であり、核を求めることは整数解を持つ同次連立一次方程式を解くことになる。

三角形の周の例で

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とすると、 $D_1x = 0$ は

$$-a - b = 0, \quad a - c = 0, \quad b + c = 0$$

である。これより $b = -a$, $c = a$ なので

$$x = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{Z}).$$

したがって

$$\text{Ker } \partial_1 = \mathbb{Z}\langle e_{01} - e_{02} + e_{12} \rangle.$$

このように、自由変数を整数パラメータで置き、最後に基底となる鎖を書き戻すのが基本である。

ℚ 上の解と ℤ 上の解

核の方程式 $D_nx = 0$ は、まず有理数上で解いてもよい。ただし、最終的には整数解全体の基底を与えなければならない。分母が現れたら払って整数ベクトルに直し、さらに共通因子を除いて原始的なベクトルにする。小さな例では通常の変換法で十分だが、大きな整数行列では Smith 標準形や Hermite 標準形が有効である。

9.3.5 第 4 段階：像を列ベクトルの整数係数一次結合として求める

D_{n+1} の列ベクトルを $d_1, \dots, d_s$ とすると、

$$\text{Im } \partial_{n+1} = \mathbb{Z}d_1 + \cdots + \mathbb{Z}d_s$$

である。つまり、像は D_{n+1} の列が生成する整数格子である。

内部を含む三角形では

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z}\langle e_{01} - e_{02} + e_{12} \rangle.$$

これは先ほど求めた $\text{Ker } \partial_1$ と一致する。

階数だけでは像は決まらない

整数係数では、像の階数だけを知っても商群は決まらない。たとえば

$$[1] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [2] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

はどちらも階数 1 だが、像はそれぞれ $\mathbb{Z}$ と $2\mathbb{Z}$ である。したがって商は

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となり、全く異なる。 $\mathbb{Q}$ 上では $\mathbb{Z}$ と $2\mathbb{Z}$ の違いが見えないため、ねじれを求めるには整数係数の像を保つ必要がある。

9.3.6 第 5 段階：核の基底の中で像を表し、商群を取る

$Z_n = \text{Ker } \partial_n$ の基底を

$$z_1, \dots, z_r$$

とする。 $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$ の各生成元は Z_n に含まれるので、 z_i の整数係数一次結合として書ける。その係数を列に並べた行列を R_n とすると、

$$H_n(K) = Z_n/B_n \cong \mathbb{Z}^r / \text{Im } R_n$$

となる。ここで初めて、ホモロジー群の計算が「商群の計算」に帰着する。

典型的には次の三つの場合が現れる。

B_n の位置	商	意味
$B_n = 0$	$H_n \cong \mathbb{Z}^r$	r 個の自由な穴が残る
$B_n = Z_n$	$H_n = 0$	すべてのサイクルが境界で消える
$Z_n = \mathbb{Z}z, B_n = \mathbb{Z}(dz)$	$H_n \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$	d 倍すると消えるねじれ

一般の場合には、 R_n を Smith 標準形に直すことで、自由部分とねじれ部分を読み取る。

例題 2：三角形の周と内部を含む三角形を比較する

三角形の周だけの複体 K と、内部の 2 単体も含む複体 L を、同じ基底

$$\mathcal{B}_1 = (e_{01}, e_{02}, e_{12}), \quad \mathcal{B}_0 = (v_0, v_1, v_2)$$

で比較する。どちらも

$$\text{Ker } D_1 = \mathbb{Z}\langle z \rangle, \quad z = e_{01} - e_{02} + e_{12}$$

である。

周だけの場合は $C_2(K) = 0$ なので

$$\text{Im } D_2 = 0, \quad H_1(K) = \mathbb{Z}z/0 \cong \mathbb{Z}.$$

一方、内部を含む場合は

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Im } D_2 = \mathbb{Z}z.$$

したがって

$$H_1(L) = \mathbb{Z}z/\mathbb{Z}z = 0.$$

二つの空間で D_1 は全く同じであり、違いは D_2 の有無だけである。つまり、「閉じた輪があるか」は $\text{Ker } D_1$ が測り、「その輪を面で埋められるか」は $\text{Im } D_2$ が測っている。

9.3.7 第6段階： H_0 は係数の総和写像で仕上げる

H_0 では $\partial_0 = 0$ なので、常に

$$H_0(K) = C_0(K) / \text{Im } \partial_1$$

である。連結な複体では、辺の境界によって同じ連結成分内の頂点がすべて同一視される。具体的には、係数の総和を取る準同型

$$\varepsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \left(\sum_i a_i v_i \right) = \sum_i a_i$$

を考えると、連結な場合には

$$\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$$

となる。したがって第一同型定理より

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$$

である。連結成分が c 個なら、各成分ごとに係数の総和を取る写像を考えて

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}^c$$

となる。

手計算用ワークシート

一つの複体について、次の順に表を埋めると計算が整理しやすい。

n	$\mathcal{B}_n$	D_n	$\text{Ker } D_n$	$\text{Im } D_{n+1}$	H_n
...					
2					
1					
0		O	C_0	$\text{Im } D_1$	

特に、 $D_{n-1}D_n = O$ を確認し、 $\text{Im } D_{n+1}$ の生成元を $\text{Ker } D_n$ の基底で書き直してから商を取る。この二点を省略しないことが、符号ミスとねじれの見落としを防ぐ。

9.4 線分ホモロジー

まず、最も簡単な 1 単体である線分を計算する。線分 $I = [v_0, v_1]$ を考える。辺を $e_{01} = [v_0, v_1]$ とおくと、 $C_1 \cong \mathbb{Z}$, $C_0 \cong \mathbb{Z}^2$, $C_n = 0$ ($n \geq 2$) である。

境界写像は $\partial_1(e_{01}) = v_1 - v_0$ である。

したがって $\text{Ker } \partial_1 = 0$ だから $H_1(I) = 0$ 。

また、 $H_0(I) = C_0 / \text{Im } \partial_1$ である。ここで $\text{Im } \partial_1 = \langle v_1 - v_0 \rangle$ なので、商をとると v_0 と v_1 は同じ連結成分に属するものとして同一視される。よって $H_0(I) \cong \mathbb{Z}$ 。

具体例：商群 $C_0/\text{Im } \partial_1$ を準同型定理で計算する

「 v_0 と v_1 が同一視される」ことを、商群の計算として確かめておく。係数の総和をとる写像

$$\varepsilon : C_0 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \varepsilon(av_0 + bv_1) = a + b$$

は全射準同型である。その核は

$$\text{Ker } \varepsilon = \{av_0 + bv_1 \mid a + b = 0\} = \mathbb{Z}(v_1 - v_0) = \text{Im } \partial_1$$

である。したがって準同型定理（第一同型定理）より

$$H_0(I) = C_0/\text{Im } \partial_1 = C_0/\text{Ker } \varepsilon \cong \mathbb{Z}$$

となる。「連結成分が 1 個だから $H_0 \cong \mathbb{Z}$ 」という以後の議論は、いつもこの型の計算で正当化される。

線分には穴がなく、連結である。そのため $H_1(I) = 0$, $H_0(I) \cong \mathbb{Z}$ となる。

9.5 2 単体のホモロジー

三角形 1 枚からなる 2 単体 $K = [v_0, v_1, v_2]$ を考える。これは幾何学的には円板である。

辺を $e_{01} = [v_0, v_1]$, $e_{02} = [v_0, v_2]$, $e_{12} = [v_1, v_2]$ とおき、2 単体を $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ とおく。

このとき $C_2 \cong \mathbb{Z}$, $C_1 \cong \mathbb{Z}^3$, $C_0 \cong \mathbb{Z}^3$ 。

境界写像は $\partial_2(\sigma) = e_{12} - e_{02} + e_{01}$ である。また、 $\partial_1(e_{01}) = v_1 - v_0$, $\partial_1(e_{02}) = v_2 - v_0$, $\partial_1(e_{12}) = v_2 - v_1$ 。

まず H_2 を計算する。 $\partial_2(\sigma) = e_{12} - e_{02} + e_{01} \neq 0$ なので $\text{Ker } \partial_2 = 0$ 。したがって $H_2(K) = 0$ 。

次に H_1 を計算する。1 次サイクルは、三角形の境界を一周する鎖 $e_{01} - e_{02} + e_{12}$ で生成される。すなわち $\text{Ker } \partial_1 = \langle e_{01} - e_{02} + e_{12} \rangle$ 。一方、 $\text{Im } \partial_2 = \langle \partial_2(\sigma) \rangle = \langle e_{01} - e_{02} + e_{12} \rangle$ 。したがって $\text{Ker } \partial_1 = \text{Im } \partial_2$ であり、 $H_1(K) = 0$ 。

注意：「核は～で生成される」は計算で確かめる

上では「1 次サイクルは $e_{01} - e_{02} + e_{12}$ で生成される」と述べたが、これはただで済ませてよい事実ではない。目に見えるサイクル以外に核の元がないことは、連立一次方程式を解いて初めて保証される。実際の計算は次節で行う。 ∂_1 は 2 単体の有無に関係なく同じ写像なので、次節で求める $\text{Ker } \partial_1 = \mathbb{Z}\langle e_{01} - e_{02} + e_{12} \rangle$ がそのまま本節の主張の根拠になる。

最後に、 K は連結なので $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ 。

以上より $H_2(K) = 0$, $H_1(K) = 0$, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ 。

これは、2 単体が円板であり、可縮であることに対応している。

9.6 2 単体の境界のホモロジー

次に、2 単体そのものではなく、その境界 $\partial\Delta^2$ を考える。これは三角形の周だけからなる複体であり、円周 S^1 である。

この場合、2 単体は含まれない。したがって $C_2 = 0$, $C_1 \cong \mathbb{Z}^3$, $C_0 \cong \mathbb{Z}^3$.

境界写像 ∂_1 は前節と同じである。ここでは核を実際に求めておく。一般の 1 次鎖を

$$w = ae_{01} + be_{02} + ce_{12}$$

と書くと、

$$\partial_1 w = a(v_1 - v_0) + b(v_2 - v_0) + c(v_2 - v_1) = (-a - b)v_0 + (a - c)v_1 + (b + c)v_2$$

である。したがって $\partial_1 w = 0$ であるための条件は

$$-a - b = 0, \quad a - c = 0, \quad b + c = 0$$

である。これより $c = a$, $b = -a$ となるので、

$$\text{Ker } \partial_1 = \mathbb{Z}\langle e_{01} - e_{02} + e_{12} \rangle \cong \mathbb{Z}$$

である。しかし、今回は $C_2 = 0$ なので $\text{Im } \partial_2 = 0$ 。したがって $H_1(\partial\Delta^2) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 \cong \mathbb{Z}$ 。

また、 $\partial\Delta^2$ は連結なので $H_0(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$ 。

よって $H_1(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_0(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$ 。

ここで重要なのは、次の違いである。 Δ^2 では三角形の内部があるため、境界のループは埋められる。そのため $H_1(\Delta^2) = 0$ 。一方、 $\partial\Delta^2$ では内部がないため、境界のループは残る。そのため $H_1(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$ 。

9.7 行列による完全計算例：対角線で分割した正方形

正方形を対角線 $[v_0, v_2]$ で 2 枚の三角形に分け、内部も含めた単体複体 K を考える。頂点を正方形の周に沿って v_0, v_1, v_2, v_3 と並べ、基底を

$$\mathcal{B}_2 = (\sigma_1, \sigma_2), \quad \sigma_1 = [v_0, v_1, v_2], \quad \sigma_2 = [v_0, v_2, v_3],$$

$$\mathcal{B}_1 = (e_{01}, e_{12}, e_{23}, e_{03}, e_{02}), \quad \mathcal{B}_0 = (v_0, v_1, v_2, v_3)$$

とする。

境界行列を作る

2 単体の境界は

$$\partial_2 \sigma_1 = e_{01} + e_{12} - e_{02}, \quad \partial_2 \sigma_2 = e_{23} - e_{03} + e_{02}$$

なので、

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

また、各辺の境界を列に並べると

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

実際に掛け算をすると $D_1 D_2 = O$ となる。これは、共有対角線 e_{02} が 2 枚の三角形から反対符号で現れることに対応する。

H_2 の計算

$D_2(x, y)^\top = 0$ とすると、第 1 行と第 3 行から $x = 0, y = 0$ が従う。したがって

$$\text{Ker } D_2 = 0, \quad H_2(K) = 0$$

である。正方形全体は閉じた曲面ではなく境界を持つので、2 次元サイクルは残らない。

H_1 の計算

一般の 1 次鎖を

$$w = ae_{01} + be_{12} + ce_{23} + de_{03} + qe_{02}$$

とする。方程式 $D_1(a, b, c, d, q)^\top = 0$ は

$$-a - d - q = 0, \quad a - b = 0, \quad b - c + q = 0, \quad c + d = 0$$

である。 $b = a, d = -c, q = c - a$ となるから、

$$w = a(e_{01} + e_{12} - e_{02}) + c(e_{23} - e_{03} + e_{02}).$$

よって

$$\text{Ker } D_1 = \mathbb{Z}\langle e_{01} + e_{12} - e_{02}, e_{23} - e_{03} + e_{02} \rangle.$$

一方、この二つの生成元はちょうど D_2 の二つの列、すなわち $\partial_2 \sigma_1$ と $\partial_2 \sigma_2$ である。したがって

$$\text{Im } D_2 = \text{Ker } D_1$$

であり、

$$H_1(K) = 0$$

となる。

外周を一周するサイクルは

$$e_{01} + e_{12} + e_{23} - e_{03} = \partial_2 \sigma_1 + \partial_2 \sigma_2$$

である。行列の言葉では、 D_2 の第 1 列と第 2 列を足すと、対角線成分が消えて外周のベクトルになる。これが「外周は 2 枚の三角形で埋められる」ことの代数的表現である。

H_0 の計算

K は連結であるから

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}.$$

以上より

$$H_2(K) = 0, \quad H_1(K) = 0, \quad H_0(K) \cong \mathbb{Z}.$$

この結果は、 K が円板と同相で可縮であることと一致する。

9.8 3 単体のホモロジー

次に、3 単体 $\Delta^3 = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ を考える。これは四面体の中身まで含んだ図形であり、幾何学的には 3 次元球体である。

3 単体を $\tau = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ とおく。2 次元の面は $f_{012}, f_{013}, f_{023}, f_{123}$ の 4 個である。したがって $C_3 \cong \mathbb{Z}$, $C_2 \cong \mathbb{Z}^4$, $C_1 \cong \mathbb{Z}^6$, $C_0 \cong \mathbb{Z}^4$ 。

3 単体の境界は $\partial_3(\tau) = f_{123} - f_{023} + f_{013} - f_{012}$ である。これは四面体の全表面を、向きをそろえて足し合わせた 2 次鎖である。

まず $\partial_3(\tau) \neq 0$ なので $\text{Ker } \partial_3 = 0$ 。したがって $H_3(\Delta^3) = 0$ 。

次に、四面体の表面全体 $f_{123} - f_{023} + f_{013} - f_{012}$ は 2 次サイクルである。しかし、これは 3 単体 τ の境界そのものである。つまり $\text{Ker } \partial_2 = \text{Im } \partial_3$ となる。したがって $H_2(\Delta^3) = 0$ 。

また、四面体の 1 次元部分にはいくつかの閉路があるが、それらは 2 次元の面によって埋められる。したがって $H_1(\Delta^3) = 0$ 。

具体例： $H_1(\Delta^3)$ が消える理由の行間を埋める

「閉路が面で埋められる」ことを実際に確かめる。辺を $e_{ij} = [v_i, v_j]$ と書く。3 本の辺 e_{01}, e_{02}, e_{03} は木（ループのない連結グラフ）をなし、残りの辺は e_{12}, e_{13}, e_{23} である。残りの各辺に対して、木を通して閉じる次のサイクルを作ると、どれも面の境界になっている。

$$e_{01} + e_{12} - e_{02} = \partial_2 f_{012}, \quad e_{01} + e_{13} - e_{03} = \partial_2 f_{013}, \quad e_{02} + e_{23} - e_{03} = \partial_2 f_{023}.$$

任意の 1 次サイクル w から、 e_{12}, e_{13}, e_{23} の係数の分だけこの 3 つのサイクルを引くと、木の辺だけからなるサイクルが残る。木にはループがないので、それは 0 である。よって $\text{Ker } \partial_1$ はこの 3 つで生成され、 $\text{Ker } \partial_1 \subset \text{Im } \partial_2$ 、すなわち $H_1(\Delta^3) = 0$ が分かる。次節の $\partial \Delta^3$ も同じ 1 骨格と 2 骨格を持つので、同じ議論で $H_1(\partial \Delta^3) = 0$ となる。

最後に、 Δ^3 は連結なので $H_0(\Delta^3) \cong \mathbb{Z}$ 。

以上より

$$H_3(\Delta^3) = 0, \quad H_2(\Delta^3) = 0, \quad H_1(\Delta^3) = 0, \quad H_0(\Delta^3) \cong \mathbb{Z}.$$

これは、3 単体が可縮であることと一致している。

9.9 3 単体の境界のホモロジー

次に、3 単体の境界 $\partial \Delta^3$ を考える。これは四面体の表面であり、球面 S^2 の三角形分割である。

この場合、3 単体の中身は含まれない。したがって $C_3 = 0$, $C_2 \cong \mathbb{Z}^4$, $C_1 \cong \mathbb{Z}^6$, $C_0 \cong \mathbb{Z}^4$ 。

四面体の全表面 $z = f_{123} - f_{023} + f_{013} - f_{012}$ を考える。各辺は、向きが反対の形でちょうど 2 回ずつ現れるため、 $\partial_2(z) = 0$ である。したがって $z \in \text{Ker } \partial_2$ 。

実際、 $\text{Ker } \partial_2 = \langle z \rangle \cong \mathbb{Z}$ 。一方、今回は $C_3 = 0$ なので $\text{Im } \partial_3 = 0$ 。したがって $H_2(\partial \Delta^3) = \text{Ker } \partial_2 / \text{Im } \partial_3 \cong \mathbb{Z}$ 。

また、四面体の辺でできる閉路は、各三角形の面によって埋められる。したがって $H_1(\partial \Delta^3) = 0$ 。

さらに、 $\partial \Delta^3$ は連結なので $H_0(\partial \Delta^3) \cong \mathbb{Z}$ 。

よって

$$H_2(\partial\Delta^3) \cong \mathbb{Z}, H_1(\partial\Delta^3) = 0, H_0(\partial\Delta^3) \cong \mathbb{Z}.$$

これは球面 S^2 のホモロジー群 $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(S^2) = 0$, $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$ と一致する。

9.10 グラフのホモロジー

一般の連結グラフ G を考える。グラフは 1 次元単体的複体であるため, $C_n = 0$ ($n \geq 2$) である。したがって $H_1(G) = \text{Ker}(\partial_1)$, $H_0(G) = C_0/\text{Im}(\partial_1)$ 。

頂点数を V , 辺数を E とする。連結グラフでは, 境界写像 $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$ の像の階数は $\text{rank Im } \partial_1 = V - 1$ である。

ここで, $\text{rank Im } \partial_1 = V - 1$ となる理由を確認しておく。頂点を $v_1, \dots, v_V$ とする。各辺の境界は $\partial_1(e) = v_j - v_i$ の形であるから, $\text{Im } \partial_1$ の元は, 頂点の係数の総和が 0 である 0 次鎖である。

逆に, グラフ G は連結であるから, 基準となる頂点 v_1 から任意の頂点 v_i へ道が存在する。その道に沿って辺の境界を足し合わせると, 中間の頂点は打ち消し合い, $v_i - v_1$ が得られる。したがって $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_V - v_1$ はすべて $\text{Im } \partial_1$ に含まれる。

一方, 係数の総和が 0 である任意の 0 次鎖 $a_1 v_1 + \dots + a_V v_V$, $a_1 + \dots + a_V = 0$ は $a_2(v_2 - v_1) + \dots + a_V(v_V - v_1)$ と書ける。したがって, $\text{Im } \partial_1$ は, 係数の総和が 0 である 0 次鎖全体に一致する。この群は $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_V - v_1$ を基底とする自由アーベル群であるから, $\text{rank Im } \partial_1 = V - 1$ である。したがって $\text{rank Ker } \partial_1 = \text{rank } C_1 - \text{rank Im } \partial_1 = E - (V - 1) = E - V + 1$ 。よって $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$ 。これは, 連結グラフにある独立なループの個数を表している。

復習：自由アーベル群の階数と階数公式

上の議論で使った事実を整理する。有限生成アーベル群 A の**階数** $\text{rank } A$ とは, $A \cong \mathbb{Z}^r \oplus$ (有限群) と書いたときの r のことである。

- 自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ の部分群は, 再び自由アーベル群である (階数は n 以下)。
- 準同型 $\varphi : A \rightarrow B$ に対して $\text{rank } A = \text{rank Ker } \varphi + \text{rank Im } \varphi$ (階数公式)。
- 部分群 $B \subset A$ に対して $\text{rank}(A/B) = \text{rank } A - \text{rank } B$ 。

ミニ例として, 三角形の周の $\partial_1 : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ では $\text{rank Im } \partial_1 = 2$ なので $\text{rank Ker } \partial_1 = 3 - 2 = 1$ となり, 前の計算と合う。グラフでは $C_2 = 0$ より $H_1(G) = \text{Ker } \partial_1$ そのものであり, これは $C_1 \cong \mathbb{Z}^E$ の部分群だから自由アーベル群である。したがって階数 $E - V + 1$ を求めるだけで $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$ と結論できる。

例：木

木 T はループを持たない連結グラフである。木では $E = V - 1$ が成り立つ。したがって $\text{rank } H_1(T) = E - V + 1 = 0$ 。よって $H_1(T) = 0$, $H_0(T) \cong \mathbb{Z}$ 。

例：8 の字グラフ

8 の字グラフは、1 点で接した 2 つの円周からなるグラフである。独立なループが 2 つあるため、 $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$ となる。

実際、頂点 1 個、辺 2 個からなる CW 複体として見ると、 $V = 1$, $E = 2$ なので $\text{rank } H_1 = E - V + 1 = 2$ 。したがって $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$, $H_0 \cong \mathbb{Z}$ 。

単体的複体として各円周を複数の辺に分けても、ホモロジー群は同じである。

9.11 非連結な空間と H_0

H_0 は連結成分の個数を測る。たとえば、 c 個の連結成分を持つ単体的複体 K については $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^c$ である。

例：2 本の線分の和

互いに交わらない 2 本の線分からなる複体 K を考える。このとき連結成分は 2 個である。各線分には穴がないので $H_1(K) = 0$ 。一方、 $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^2$ である。

このように、 H_0 は「つながっている部分の個数」を表す。

9.12 オイラー・ポアンカレの公式

有限単体的複体 K に対し、 f_n を n 単体の個数とする。このとき

$$\chi(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$$

を K のオイラー標数という。一方、ホモロジー群を用いても

$$\chi(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank } H_n(K)$$

が成り立つ。これをオイラー・ポアンカレの公式という。

定理 9.1 (オイラー・ポアンカレの公式). 有限単体的複体 K に対して、

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank } H_n(K)$$

が成り立つ。

注意：証明で使う道具は階数の計算規則だけ

以下の証明で使うのは、グラフの節の復習ボックスでまとめた二つの規則、すなわち階数公式 $\text{rank } C_n = \text{rank } \text{Ker } \partial_n + \text{rank } \text{Im } \partial_n$ と、商の階数 $\text{rank}(A/B) = \text{rank } A - \text{rank } B$ だけである。各次元でこの二つを書き下し、交代和をとると隣り合う項が打ち消し合う、というのが証明の骨組みである。ねじれ部分は階数に寄与しないため、途中の式には一切現れない。

証明. $C_n(K)$ は n 単体を基底とする自由アーベル群なので, $\text{rank } C_n(K) = f_n$ である。ここで $Z_n = \text{Ker } \partial_n$, $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$ とおく。 Z_n は n 次サイクル群, B_n は n 次境界群である。

境界写像 $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ について, その核は Z_n , 像は B_{n-1} である。したがって階数公式より, $\text{rank } C_n(K) = \text{rank } Z_n + \text{rank } B_{n-1}$ となる。また, ホモロジー群は $H_n(K) = Z_n/B_n$ で定義されるので, $\text{rank } H_n(K) = \text{rank } Z_n - \text{rank } B_n$ である。よって $\text{rank } Z_n = \text{rank } H_n(K) + \text{rank } B_n$ となる。これを先ほどの式に代入すると,

$$\text{rank } C_n(K) = \text{rank } H_n(K) + \text{rank } B_n + \text{rank } B_{n-1}$$

である。すなわち,

$$f_n = \text{rank } H_n(K) + \text{rank } B_n + \text{rank } B_{n-1}$$

が成り立つ。

両辺に $(-1)^n$ をかけて, すべての n について足し合わせる。有限単体の複体では十分大きい n に対して $C_n = 0$ となるので, 以下の和は有限和である。

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank } H_n(K) + \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank } B_n + \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank } B_{n-1}.$$

ここで $B_{-1} = 0$ と考えると, 最後の 2 つの和は添字を 1 つずらすことで互いに打ち消し合う。実際,

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank } B_{n-1} = - \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank } B_n$$

である。したがって

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \text{rank } H_n(K)$$

が得られる。□

この公式は, 単体の個数から計算した量と, ホモロジー群から計算した量が一致することを主張している。つまり, オイラー標数は, 単体分割の細かさだけに依存する量ではなく, 空間のホモロジー的な構造を反映する量である。

例：円周

円周を 3 個の頂点と 3 本の辺で三角形分割すると, $f_0 = 3$, $f_1 = 3$ 。したがって $\chi(S^1) = 3 - 3 = 0$ 。一方, $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ なので $\text{rank } H_0 - \text{rank } H_1 = 1 - 1 = 0$ 。よって一致する。

例：2 単体

2 単体 Δ^2 では $f_0 = 3$, $f_1 = 3$, $f_2 = 1$ 。したがって $\chi(\Delta^2) = 3 - 3 + 1 = 1$ 。一方, $H_0(\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(\Delta^2) = 0$, $H_2(\Delta^2) = 0$ なので $\text{rank } H_0 - \text{rank } H_1 + \text{rank } H_2 = 1 - 0 + 0 = 1$ 。よって一致する。

例：球面

球面 S^2 を四面体の境界として三角形分割すると, $f_0 = 4$, $f_1 = 6$, $f_2 = 4$ 。したがって $\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$ 。一方, $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(S^2) = 0$, $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$ なので $\text{rank } H_0 - \text{rank } H_1 + \text{rank } H_2 = 1 - 0 + 1 = 2$ 。よって一致する。

例：3 単体

3 単体 Δ^3 では $f_0 = 4, f_1 = 6, f_2 = 4, f_3 = 1$. したがって $\chi(\Delta^3) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$. 一方, $H_0(\Delta^3) \cong \mathbb{Z}, H_k(\Delta^3) = 0 (k \geq 1)$ なので $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \text{rank } H_k(\Delta^3) = 1$. これも一致する。

9.13 曲面の例

トーラス T^2 の三角形分割を直接扱おうと計算量が増えるが, 結果は $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}, H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2, H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$ である。

オイラー標数は $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$ である。これは $\text{rank } H_0 - \text{rank } H_1 + \text{rank } H_2 = 1 - 2 + 1 = 0$ と一致する。

一方, 射影平面では $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が現れ, ここに初めてねじれが出てくる。ただし, オイラー・ポアンカレの公式ではホモロジー群の階数だけを見るため, ねじれ部分は検出されない。射影平面の詳しい計算は, 第 12 章で扱う。

復習：有限生成アーベル群の構造定理とねじれ

有限生成アーベル群 A は, 適当な $r \geq 0$ と $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_k$ (各 $d_i \geq 2$) により

$$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_k\mathbb{Z}$$

と分解できる (有限生成アーベル群の構造定理)。 $\mathbb{Z}^r$ の部分を自由部分, 有限群の部分を**ねじれ (トーション) 部分**といい, $r = \text{rank } A$ である。ミニ例: $\mathbb{Z}^2 / \langle (2, 0) \rangle$ では, 第 1 成分が 2 の倍数の違いを無視され, 第 2 成分はそのまま残るので $\mathbb{Z}^2 / \langle (2, 0) \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる。有限単体的複体のホモロジー群は有限生成アーベル群なので, 必ずこの形に分解される。 $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は, 自由部分がなくねじれ部分だけが残った例である。

具体例： $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が現れる仕組み

ねじれが生じる典型的な状況を, 計算の形で見ておく。ある複体で, 計算の結果

$$\text{Ker } \partial_1 = \mathbb{Z}z, \quad \text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z}(2z)$$

となったとする。すなわち, サイクルは z の整数倍しかなく, 境界として作れるのは $2z$ の整数倍だけである。このとき

$$H_1 = \mathbb{Z}z / \mathbb{Z}(2z) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となる。実射影平面ではまさにこれが起こる。 $\mathbb{RP}^2$ は, 円板の縁を円周 a に 2 重に巻き付けて貼った空間なので, 面全体の境界は a を 2 周する鎖 $2a$ になる。つまり「 a 自身は境界でないが, $2a$ は境界になる」のであり, これが $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の正体である。

直観： H_1 のねじれ元の幾何学的意味

位数 2 のねじれ元 $[z] \in H_1$ は、「1 周では面で埋められないが、2 周すると埋められるループ」を表す。 $\mathbb{RP}^2$ 中の射影直線がその代表例である。メビウスの帯を思い浮かべると、中心の円周 1 周は帯の中で縮められないが、帯の縁は中心円のまわりを 2 周しており、 $\mathbb{RP}^2$ ではその縁が円板でふさがれる。この「何周かすると消える」という情報は、個数（階数）だけを見る $\mathbb{Q}$ 係数やオイラー標数では検出できず、 $\mathbb{Z}$ 係数のホモロジーだけが記録する。

9.14 包含写像が誘導する準同型

ここまで、いくつかの空間についてホモロジー群を具体的に計算した。次に重要になるのは、空間の間の写像があるとき、ホモロジー群の間にも写像が生じるという点である。

たとえば、三角形の境界から三角形全体への包含写像

$$i : \partial\Delta^2 \hookrightarrow \Delta^2$$

を考える。上で計算したように、

$$H_1(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\Delta^2) = 0$$

である。したがって、この包含写像が誘導する準同型

$$i_* : H_1(\partial\Delta^2) \rightarrow H_1(\Delta^2)$$

は

$$\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

という零写像である。

一方、どちらの空間も連結なので

$$H_0(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z}, \quad H_0(\Delta^2) \cong \mathbb{Z}$$

であり、 H_0 上では包含写像は同型を誘導する。

直観：誘導準同型は何を伝えるか

$i_* : H_1(\partial\Delta^2) \rightarrow H_1(\Delta^2)$ が零写像であることは、「周を一周するループは、 $\partial\Delta^2$ の中では埋められないが、 Δ^2 の中まで持っていくと三角形の内部で埋められて消える」ことを代数の言葉で言い直したものである。つまり、サイクルは写像で行き先の空間へ運ぶことができ、運んだ先で境界になるかどうか、二つの空間の関係を反映する。次章の鎖写像と誘導準同型は、この観察を一般の連続写像に対して定式化するものである。

この例は、空間の写像がホモロジー群の準同型を誘導すること、また次数によってその準同型の振る舞いが異なることを示している。次章では、この対応を鎖写像と誘導準同型として定式化する。

9.15 まとめ

定義に従うホモロジー群の計算では、

- 各向き付き単体を並べ、鎖群 C_n の基底と順序を固定する、
- 各基底単体の境界を列に並べ、境界行列 D_n を作る、
- $D_{n-1}D_n = 0$ を確認して符号を検算する、
- 整数方程式 $D_n x = 0$ を解き、サイクル群 $\text{Ker } D_n$ の基底を求める、
- D_{n+1} の列の整数係数一次結合として、バウンダリ群 $\text{Im } D_{n+1}$ を求める、
- $\text{Im } D_{n+1}$ を $\text{Ker } D_n$ の基底で表し、商群 $H_n = \text{Ker } D_n / \text{Im } D_{n+1}$ を計算する

という流れになる。

本章の重要な計算結果をまとめると、次のようになる。

$$H_k(\Delta^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0), \\ 0 & (k \geq 1), \end{cases}$$

また、 $n \geq 2$ のとき

$$H_k(\partial\Delta^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0), \\ \mathbb{Z} & (k=n-1), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

つまり、単体 Δ^n は穴を持たないが、その境界 $\partial\Delta^n$ は $n-1$ 次元の穴を 1 つ持つ。

練習問題 (標準)

1. 2 本の辺を直列につないだ区間型の複体の H_1 と H_0 を計算せよ。
2. 四角形の周だけからなるグラフの H_1 と H_0 を計算せよ。
3. 四角形を 1 本の対角線で 2 枚の三角形に分け、内部も含めた複体を考える。その H_1 が消える理由を説明せよ。
4. θ グラフの第一ホモロジー群を求めよ。
5. 2 つの円周を 1 本の線分でつないだグラフの H_1 と H_0 を求めよ。
6. 2 つの三角形の境界が互いに交わずに置かれている複体の H_0 と H_1 を求めよ。
7. 頂点数 $V = 7$, 辺数 $E = 10$, 連結成分数 $c = 2$ のグラフについて、 $H_1(G)$ の階数を求めよ。
8. 四面体の境界複体は球面 S^2 の三角形分割である。そのホモロジー群を答えよ。
9. 三角形の周に 2 単体を貼ると、周を一周するサイクルがバウンダリになる。このことをホモロジー群の言葉で説明せよ。
10. 定義に基づくホモロジー計算では、まずどの鎖群と境界写像を調べるべきか説明せよ。
11. 三角形の周だけからなる複体で、基底を

$$\mathcal{B}_1 = (e_{01}, e_{02}, e_{12}), \quad \mathcal{B}_0 = (v_0, v_1, v_2)$$

とする。境界行列 D_1 を書き、整数方程式 $D_1 x = 0$ を解いて $\text{Ker } D_1$ の基底を求めよ。

12. 前問の複体に 2 単体 $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ を加える。境界行列 D_2 を書き, $D_1 D_2 = 0$ を確認せよ。さらに H_2, H_1, H_0 を求めよ。
13. 正方形を対角線 $[v_0, v_2]$ で 2 枚の三角形に分けた複体について, 本文と同じ基底を用いて D_2 の二つの列を書け。その和が正方形の外周を表すことを確認せよ。
14. 頂点 v_0, v_1, v_2, v_3 と, 辺 $[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0]$ および孤立点 v_3 からなる複体を考える。境界行列 D_1 を書き, H_0 と H_1 を行列から求めよ。

練習問題 (発展)

1. 連結グラフ G の頂点数を V , 辺数を E とするとき, $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$ となる理由を, 極大木を用いて説明せよ。
2. 連結成分数が c のグラフについて, $H_1(G)$ の階数が $E - V + c$ になることを予想し, 具体例で確かめよ。
3. 四面体の境界複体が S^2 と同じホモロジー群を持つことを, 面・辺・頂点の数とサイクルの観点から説明せよ。
4. 二つの準同型

$$\varphi_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto x, \quad \varphi_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto 2x$$

は $\mathbb{Q}$ 上ではどちらも階数 1 であるが, 余核は異なる。それぞれの像と商 $\mathbb{Z}/\text{Im } \varphi_i$ を求め, 整数係数では階数だけでは不十分である理由を説明せよ。

5. 鎖複体の一部が

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{D_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$$

であり,

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとする。 H_2 と H_1 を求めよ。特に H_1 の自由部分とねじれ部分を区別せよ。

第 10 章

ホモロジー代数の基礎

10.1 この章で学ぶこと

- 鎖複体, サイクル, バウンダリ, ホモロジー群の関係を整理する。
- 完全系列と短完全系列の意味を理解する。
- 鎖写像と誘導準同型の定義を理解する。
- ホモロジー群が写像に対して自然に振る舞うことを理解する。
- 鎖複体の短完全系列から, ホモロジー群の長完全系列が現れることを知る。
- 次章のマイヤー・ヴィートリス完全系列に向けて, 完全系列の読み方に慣れる。

学習の指針

この章では位相空間はほとんど登場せず, アーベル群と準同型だけを扱う。前提となるのは群・準同型・核・像・商群といった群論の基礎であり, 不安があれば巻末付録「群論と線形代数の要点」を先に見直すとよい。初出の概念は完全系列, 鎖写像, 鎖ホモトピーの三つで, いずれも「Im と Ker を見比べる」ことが基本動作になる。抽象的な定義が続くが, 各定義の直後に置かれた小さな具体例を, 必ず自分の手で検算しながら読み進めてほしい。

10.2 ホモロジー代数とは何か

これまで, 単体的複体 K に対して鎖群 $C_n(K)$ を考え, 境界写像 $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ を用いてホモロジー群

$$H_n(K) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

を定義した。

ここで重要なのは, ホモロジー群が空間そのものから直接得られるのではなく,

$$\text{空間} \longrightarrow \text{鎖複体} \longrightarrow \text{ホモロジー群}$$

という手順で得られることである。

ホモロジー代数では, この中間に現れる鎖複体, 境界写像, 完全系列, 鎖写像を抽象的に扱う。位相空間の具体的な形をいったん忘れて代数的な構造を見ることで, 複雑な空間のホモロジー群を効率よく計算できるようになる。

10.3 鎖複体の復習

定義 10.1. アーベル群の列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

が $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ を満たすとき、これを**鎖複体**という。

具体例: 「境界の境界はゼロ」の検算

$C_2 = \mathbb{Z}$, $C_1 = \mathbb{Z}^2$, $C_0 = \mathbb{Z}$ とし、他の次数の群はすべて 0 とする。境界写像を

$$\partial_2(c) = (2c, -2c), \quad \partial_1(a, b) = a + b$$

で定めると、

$$\partial_1(\partial_2(c)) = 2c + (-2c) = 0$$

となり、 $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$ が成り立つ。他の合成は一方が零写像なので自動的に 0 である。したがって

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は鎖複体である。

この条件は、「境界の境界は空である」という幾何学的事実を代数的に表している。鎖複体に対して、

$$Z_n(C_\bullet) = \text{Ker } \partial_n, \quad B_n(C_\bullet) = \text{Im } \partial_{n+1}$$

をそれぞれ n 次サイクル群, n 次バウンダリ群という。条件 $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ から

$$B_n(C_\bullet) \subset Z_n(C_\bullet)$$

が成り立つので、商群

$$H_n(C_\bullet) = Z_n(C_\bullet) / B_n(C_\bullet)$$

を定義できる。これが鎖複体 $C_\bullet$ の n 次ホモロジー群である。

ホモロジー群の意味

ホモロジー群は、

境界を持たない鎖

のうち、

高次元の鎖の境界として消えるもの

を同じものとみなして得られる群である。つまり、ホモロジー群は「境界として消えないサイクル」を測っている。

具体例: 小さな鎖複体のホモロジー計算

前のボックスの鎖複体 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ (ここで $\partial_2(c) = (2c, -2c)$, $\partial_1(a, b) = a + b$) のホモロジー群を計算してみる。

- $Z_2 = \text{Ker } \partial_2 = 0$ より $H_2 = 0$ である。
- $Z_1 = \text{Ker } \partial_1 = \{(a, -a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ は $(1, -1)$ で生成され, $\mathbb{Z}$ と同型である。一方 $B_1 = \text{Im } \partial_2 = \{(2c, -2c) \mid c \in \mathbb{Z}\}$ は $(2, -2) = 2 \cdot (1, -1)$ で生成される。したがって $H_1 = Z_1/B_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。
- $Z_0 = C_0 = \mathbb{Z}$, $B_0 = \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}$ より $H_0 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$ である。

このように, ホモロジー群は核と像を具体的に書き出せば最後まで計算できる。

10.4 完全系列

完全性の読み方

完全系列では, 各場所で

$$\text{Im} = \text{Ker}$$

が成り立つ。これは, 「前から来るもの」と「次へ行くと 0 になるもの」が一致するという意味である。

したがって, 完全系列を使う計算では, 未知の群を直接作るのではなく, 隣の写像の核や像から間接的に決定する。たとえば

$$0 \rightarrow A \rightarrow B$$

が完全なら $A \rightarrow B$ は単射であり,

$$A \rightarrow B \rightarrow 0$$

が完全なら $A \rightarrow B$ は全射である。このような短い読み方を積み重ねて, 長完全系列を扱う。

ホモロジー代数で最も重要な概念の一つが完全系列である。

定義 10.2. 群準同型の列

$$\cdots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \rightarrow \cdots$$

が各 n で

$$\text{Im}(f_{n+1}) = \text{Ker}(f_n)$$

を満たすとき, この列を**完全系列**という。

完全性とは, ある場所に入ってくる像が, 次に出ていく写像の核と一致するという条件である。すなわち,

$$\text{前から来たもの} = \text{次へ送ると 0 になるもの}$$

という意味である。

たとえば

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が B で完全であるとは,

$$\text{Im } f = \text{Ker } g$$

が成り立つことである。これは, B の元のうち g によって 0 に送られるものは, ちょうど A から来た元である, ということを表している。

具体例: 完全性を確かめる

剰余をとる写像を q と書く。列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

が完全であることを場所ごとに確かめる。左の $\mathbb{Z}$ では $\text{Ker}(\times 3) = 0$ が左端からの像 0 と一致する。すなわち $\times 3$ は単射である。中央の $\mathbb{Z}$ では $\text{Im}(\times 3) = 3\mathbb{Z} = \text{Ker } q$ が成り立つ。 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ では q が全射なので $\text{Im } q = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \text{Ker}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 0)$ となる。よってこの列は完全である。一方, 剰余のとり先を変えた列 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{q'} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ では, $\text{Im}(\times 2) = 2\mathbb{Z}$, $\text{Ker } q' = 4\mathbb{Z}$ となって一致しないので, 中央の $\mathbb{Z}$ において完全ではない。

10.5 短完全系列とその読み方

短完全系列の直感

短完全系列

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

は, B が A と C を組み合わせてできていることを表す。ただし, 一般には $B \cong A \oplus C$ とは限らない。

直感的には, A は B の中に埋め込まれている部分であり, C は B から A の部分をつぶした商として得られる。ホモロジーでは, 鎖複体の短完全系列から長完全系列が作られ, 未知のホモロジー群を既知のホモロジー群から計算できるようになる。

復習: アーベル群の直和

アーベル群 A, B の直和 $A \oplus B$ とは, 組 $(a, b) (a \in A, b \in B)$ の全体に成分ごとの加法を入れたアーベル群である。たとえば $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元は $(n, \bar{b})$ の形で, $(1, \bar{1}) + (1, \bar{1}) = (2, \bar{0})$ のように計算する。線形代数で学んだベクトル空間の直和 $\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ のアーベル群版である。

特に重要なのが, 次の形の完全系列である。

定義 10.3. 完全系列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

を短完全系列という。

この列が完全であるとは、次の 3 つが成り立つことである。

1. f は単射である。
2. g は全射である。
3. $\text{Im } f = \text{Ker } g$ である。

したがって、短完全系列は大まかには

A が B の中に入り、 C は B から A の情報をつぶしたもの

を表している。つまり、直感的には

$$C \cong B/A$$

という関係を表す。

例 10.4. 写像 $\times 2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 2n$ と、剰余をとる写像 $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を考える。このとき

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は短完全系列である。実際、 $\times 2$ は単射、 q は全射であり、 $\text{Ker } q = 2\mathbb{Z} = \text{Im}(\times 2)$ である。

短完全系列は直和とは限らない

短完全系列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ があっても、一般に $B \cong A \oplus C$ とは限らない。たとえば

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は短完全系列であるが、 $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

具体例: 直和になる短完全系列

写像を $i(n) = (n, \bar{0})$, $p(n, \bar{b}) = \bar{b}$ で定めると、列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

は短完全系列である。実際、 i は単射、 p は全射であり、 $\text{Ker } p = \{(n, \bar{0}) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \text{Im } i$ が成り立つ。この例では中央が実際に $B \cong A \oplus C$ の形になっている。前のボックスの $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ と見比べると、両端の群が $A = \mathbb{Z}$, $C = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同じでも、中央の B は同型とは限らないことが分かる。つまり短完全系列は B の材料が A と C であることを教えるが、組み立て方までは一通りに決めない。

10.6 鎖写像

次に、鎖複体どうしの間の写像を考える。

定義 10.5. 二つの鎖複体 $(C_\bullet, \partial)$ と $(D_\bullet, \partial')$ に対し、各次数の準同型 $f_n : C_n \rightarrow D_n$ があり、すべての n について

$$\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$$

を満たすとき、 $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ を鎖写像という。

図式で書くと、

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial'_n} & D_{n-1} \end{array}$$

が可換であるということである。つまり、先に境界をとってから写す場合と、先に写してから境界をとる場合が一致する。

具体例: 鎖写像の検算

$C_\bullet$ と $D_\bullet$ をともに、次数 $1, 0$ に $\mathbb{Z}$ を置いた鎖複体 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ とする。 $f_1(n) = 3n$, $f_0(n) = 3n$ と定めると

$$\partial'_1(f_1(n)) = 2 \cdot 3n = 6n, \quad f_0(\partial_1(n)) = 3 \cdot 2n = 6n$$

で両者が一致するから、 $f_\bullet$ は鎖写像である。

一方、 $E_\bullet : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ への写像を $g_1(n) = n$, $g_0(n) = n$ と定めても、 $\partial'_1(g_1(n)) = 3n$ と $g_0(\partial_1(n)) = 2n$ は一致しないので、これは鎖写像ではない。可換図式の条件は、自動的に成り立つものではなく検算すべき条件である。

命題 10.6. 鎖写像はサイクルをサイクルに送り、バウンダリをバウンダリに送る。

Proof. $z \in C_n$ がサイクルであるとする。すなわち $\partial_n z = 0$ である。鎖写像の条件より

$$\partial'_n f_n(z) = f_{n-1}(\partial_n z) = f_{n-1}(0) = 0$$

となる。したがって $f_n(z)$ は $D_\bullet$ のサイクルである。

また、 $z = \partial_{n+1} c$ がバウンダリであるとする、

$$f_n(z) = f_n(\partial_{n+1} c) = \partial'_{n+1} f_{n+1}(c)$$

である。したがって $f_n(z)$ は $D_\bullet$ のバウンダリである。 □

10.7 誘導準同型

鎖写像はサイクルをサイクルに送り、バウンダリをバウンダリに送るので、ホモロジー群の準同型を誘導する。

定理 10.7 (鎖写像が誘導する準同型). 鎖写像 $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ は、各 n について準同型

$$f_* : H_n(C_\bullet) \rightarrow H_n(D_\bullet)$$

を誘導する。これはサイクル $z \in Z_n(C_\bullet)$ に対して

$$f_*([z]) = [f_n(z)]$$

で定められる。

Proof. まず、 z がサイクルならば、前節の命題より $f_n(z)$ もサイクルである。したがって $[f_n(z)]$ は $H_n(D_\bullet)$ の元を定める。

次に、 $[z] = [z']$ とする。このとき、ある $c \in C_{n+1}$ が存在して $z - z' = \partial_{n+1}c$ と書ける。鎖写像の条件より

$$f_n(z) - f_n(z') = f_n(z - z') = f_n(\partial_{n+1}c) = \partial'_{n+1}f_{n+1}(c)$$

である。右辺は $D_\bullet$ のバウンダリである。したがって $[f_n(z)] = [f_n(z')]$ であり、 $f_*([z]) = [f_n(z)]$ は代表元の取り方によらない。□

具体例: 誘導準同型の計算

前節のボックスで扱った鎖写像 $f_\bullet : C_\bullet \rightarrow C_\bullet$ (ここで $C_\bullet : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, $f_1(n) = f_0(n) = 3n$) が誘導する準同型を計算する。まず

$$H_1(C_\bullet) = \text{Ker}(\times 2) = 0, \quad H_0(C_\bullet) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

である。 $f_* : H_0(C_\bullet) \rightarrow H_0(C_\bullet)$ は

$$f_*([m]) = [3m] = [m]$$

となる。 $3m \equiv m \pmod{2}$ だからである。したがって $f_* = \text{id}$ である。鎖写像としては $f_\bullet$ は恒等写像ではないが、ホモロジー群のレベルでは恒等写像になる。

単体的複体の間の単体写像や包含写像は、鎖群の間の鎖写像を与える。したがって、それらはホモロジー群の間の準同型を誘導する。第9章末尾で見たように、たとえば包含 $\partial\Delta^2 \hookrightarrow \Delta^2$ は

$$H_1(\partial\Delta^2) \rightarrow H_1(\Delta^2)$$

を誘導するが、右辺は 0 なので、この写像は零写像である。

10.8 ホモロジーの関手性

ホモロジー群は、写像に対して自然に振る舞う。

命題 10.8 (関手性). 連続写像 $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ に対して、誘導準同型は

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

を満たす。また、恒等写像について

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X)}$$

が成り立つ。

これは、空間と連続写像の情報が、ホモロジー群と群準同型の情報へ自然に移ることを意味する。この性質を、ホモロジーの**関手性**という。

具体例: 関手性の使い方

部分空間 $A \subset X$ と包含写像 $i: A \rightarrow X$ に対し, $r \circ i = \text{id}_A$ を満たす連続写像 $r: X \rightarrow A$ (レトラクション) があったとする。関手性より

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (\text{id}_A)_* = \text{id}_{H_n(A)}$$

となるので, $i_*: H_n(A) \rightarrow H_n(X)$ は単射でなければならない。たとえば, もしレトラクション $r: \Delta^2 \rightarrow \partial\Delta^2$ が存在したとすると, $i_*: H_1(\partial\Delta^2) \cong \mathbb{Z} \rightarrow H_1(\Delta^2) = 0$ が単射となって矛盾する。したがって Δ^2 をその境界 $\partial\Delta^2$ にレトラクトすることはできない。写像の合成の式だけから空間に関する結論が出る点が, 関手性の威力である。

圏論から見るホモロジー

ホモロジーの構成は, 大きく見ると

$$X \mapsto C_\bullet(X) \mapsto H_n(X)$$

という二段階からなる。まず空間 X から鎖複体 $C_\bullet(X)$ を作り, 次にその鎖複体からホモロジー群 $H_n(X)$ を作る。

単体的複体と単体写像に限れば, これは

$$C_\bullet: \mathbf{Simp} \rightarrow \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}), \quad H_n: \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}$$

という関手として見られる。ここで $\mathbf{Simp}$ は単体的複体の圏, $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ はアーベル群の鎖複体の圏を表す。

したがって, ホモロジー群は単に各空間に付随する群ではなく, 写像まで含めて自然に対応する不変量である。

10.9 短完全系列から長完全系列へ

完全系列が威力を発揮するのは, 鎖複体の短完全系列から, ホモロジー群の長完全系列が得られるからである。

定理 10.9 (鎖複体の短完全系列から生じる長完全系列). 鎖複体の短完全系列

$$0 \rightarrow C'_\bullet \xrightarrow{i} C_\bullet \xrightarrow{p} C''_\bullet \rightarrow 0$$

があるとする。このとき, ホモロジー群の長完全系列

$$\cdots \rightarrow H_n(C'_\bullet) \xrightarrow{i_*} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{p_*} H_n(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C'_\bullet) \rightarrow \cdots$$

が得られる。

ここで現れる写像

$$\delta: H_n(C''_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(C'_\bullet)$$

を**接続準同型**という。本書では, この一般的な構成の詳細には立ち入らない。重要なのは, 短完全系

列から長完全系列が生じ、その長完全系列を読むことで未知のホモロジー群を決定できるという点である。

直観: 接続準同型の作り方

接続準同型 δ は、次の「ジグザグ」で作られる。 $z'' \in Z_n(C''_\bullet)$ とする。

- p は全射なので、 $p(c) = z''$ となる $c \in C_n$ を選ぶ (持ち上げ)。
- $p(\partial c) = \partial''(p(c)) = \partial''z'' = 0$ なので $\partial c \in \text{Ker } p = \text{Im } i$ であり、 i の単射性から $\partial c = i(c')$ となる $c' \in C'_{n-1}$ がただ一つ存在する (引き戻し)。
- $i(\partial' c') = \partial(i(c')) = \partial(\partial c) = 0$ と i の単射性から $\partial' c' = 0$ 、すなわち c' はサイクルである。

そこで $\delta([z'']) = [c']$ と定める。 c の選び方や代表元 z'' の取り方によらないことも、同じ種類の議論 (図式追跡) で確かめられる。「持ち上げて、境界をとって、引き戻す」という三段階が δ の実体である。

具体例: 図式追跡で接続準同型を計算する

次数 $1, 0$ にだけ群を持つ小さな鎖複体で、 δ を実際に追いかけてみる。

$$C'_\bullet : 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad C_\bullet : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad C''_\bullet : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

とし、 i は次数 0 で id , p は次数 1 で id , 他の次数では零写像とすると、各次数で $0 \rightarrow C'_n \rightarrow C_n \rightarrow C''_n \rightarrow 0$ は完全である。 $H_1(C''_\bullet) = \mathbb{Z}$ の生成元 $[1]$ に前のボックスの手順を適用する。まず $1 \in C''_1$ を $c = 1 \in C_1$ に持ち上げ、次に境界 $\partial c = 1 \in C_0$ をとり、最後にこれを $c' = 1 \in C'_0$ に引き戻す。よって

$$\delta([1]) = [1] \in H_0(C'_\bullet) = \mathbb{Z}$$

である。実際、 $H_1(C_\bullet) = H_0(C_\bullet) = 0$ なので、長完全系列は $0 \rightarrow H_1(C''_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_0(C'_\bullet) \rightarrow 0$ となり、 δ は同型でなければならない。これは上の計算と整合している。

完全系列を読むときの基本

長完全系列を用いるときは、まず既知の群や 0 になる群を書き込む。そのうえで、各場所で

$$\text{Im} = \text{Ker}$$

が成り立つことを利用する。特に、前後の群が 0 であれば、中央の写像が単射や全射、あるいは同型であることが分かる。

10.10 ホモトピー不変性

最後に、ホモロジー群がホモトピー不変量であることを述べておく。

定理 10.10 (ホモトピー不変性). 連続写像 $f, g : X \rightarrow Y$ がホモトピックであれば, すべての n について

$$f_* = g_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

が成り立つ。

したがって, ホモトピー同値な空間は同じホモロジー群を持つ。特に, X が一点に可縮であれば,

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_n(X) = 0 \quad (n \geq 1)$$

である。

この定理の証明には, 鎖ホモトピーという代数的道具を用いる。ただし, 本書では完全系列の使い方を優先するため, 証明の詳細には立ち入らない。

補足: 鎖ホモトピーの定義

鎖写像 $f_\bullet, g_\bullet : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ に対し, 準同型の族 $P_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ がすべての n で

$$f_n - g_n = \partial'_{n+1} \circ P_n + P_{n-1} \circ \partial_n$$

を満たすとき, P を $f_\bullet$ から $g_\bullet$ への鎖ホモトピーという。鎖ホモトピーが存在すれば $f_* = g_*$ である。実際, z がサイクルなら

$$f_n(z) - g_n(z) = \partial'_{n+1}(P_n(z)) + P_{n-1}(\partial_n z) = \partial'_{n+1}(P_n(z))$$

はバウンダリなので, $[f_n(z)] = [g_n(z)]$ となる。ミニ例として, $C_\bullet = D_\bullet : 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ (次数 1, 0) では, $P_0 = \text{id} : C_0 \rightarrow D_1$, $P_1 = 0$ が恒等鎖写像 $\text{id}_\bullet$ から零写像への鎖ホモトピーになる (各次数で上の式を検算してみよ)。

直観: 鎖ホモトピーの式はどこから来るか

位相的なホモトピー $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ で f と g がつながっている状況を思い浮かべる。 n 単体 σ に対し, 角柱 $\sigma \times [0, 1]$ を H で送って得られる $(n+1)$ 次元の鎖を $P(\sigma)$ と考えると, 角柱の境界は「上面と下面」すなわち $g(\sigma)$ と $f(\sigma)$, および「側面」すなわち $P(\partial\sigma)$ にあたる部分からなる。この幾何学的関係を符号まで整理したものが $f - g = \partial' \circ P + P \circ \partial$ である。つまり鎖ホモトピーとは「 f と g の間を掃く角柱」を代数的に表したものであり, 位相のホモトピーの鎖複体版である。ホモトピー不変性の証明では, ホモトピー H からこの P を実際に構成する。

10.11 マイヤー・ヴィートリス完全系列への予告

次章で扱うマイヤー・ヴィートリス完全系列では, 空間を

$$K = K_1 \cup K_2$$

と分解する。このとき, $K_1, K_2, K_1 \cap K_2, K$ のホモロジー群の間に長完全系列が現れる。

その基本形は

$$\cdots \rightarrow H_n(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \rightarrow H_n(K) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(K_1 \cap K_2) \rightarrow \cdots$$

である。

第 10 章で学んだ完全系列，鎖写像，誘導準同型，長完全系列は，このマイヤー・ヴィートリス完全系列を読むための準備である。接続準同型 δ の具体的な意味は，次章，マイヤー・ヴィートリス完全系列の中で説明する。

10.12 まとめ

本章の内容をまとめる。

- 鎖複体とは，境界の境界が 0 になるようなアーベル群の列である。
- ホモロジー群は $H_n = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ で定義される。
- 完全系列とは，各場所で $\text{Im} = \text{Ker}$ が成り立つ列である。
- 短完全系列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ は， A が B に入り， C がその商として得られる状況を表す。
- 鎖写像は境界写像と両立する写像である。
- 鎖写像はホモロジー群の準同型を誘導する。
- 誘導準同型は合成と両立する。これを関手性という。
- 鎖複体の短完全系列から，ホモロジー群の長完全系列が得られる。
- マイヤー・ヴィートリス完全系列は，この一般原理の重要な応用である。

ホモロジー代数は抽象的に見えるが，目的は明確である。それは，複雑な空間のホモロジー群を，より簡単な空間のホモロジー群から計算することである。

練習問題（標準）

1. 列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

が短完全系列であることを確認せよ。

2. 写像

$$i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad i(n) = (n, 0), \quad p: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad p(a, b) = b$$

により得られる列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

が短完全系列であることを示せ。

3. 鎖複体

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

のホモロジー群を計算せよ。

4. 鎖複体 $C_1 \xrightarrow{\partial} C_0$ を $C_1 = \mathbb{Z}^2$, $C_0 = \mathbb{Z}^2$,

$$\partial(a, b) = (a + b, 0)$$

で定める。 $Z_1 = \text{Ker } \partial$ を求めよ。

5. 境界写像

$$\partial_C : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \partial_C(n) = 2n, \quad \partial_D : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \partial_D(n) = 4n$$

を持つ鎖複体を考える。 $f_1(n) = n$, $f_0(n) = 2n$ は鎖写像を定めるか確認せよ。

6. 鎖写像がサイクルをサイクルに送ることを, 式

$$\partial f(z) = f \partial(z)$$

を用いて説明せよ。

7. 長完全系列の一部

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$$

が完全で, $A = 0$ かつ $D = 0$ であるとする。このとき $B \rightarrow C$ について何がいえるか説明せよ。

8. 空間 X が S^1 に変形レトラクトするなら, $H_1(X)$ と $H_0(X)$ はどうなるか答えよ。

練習問題 (発展)

1. 短完全系列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ において, $A = 0$ のとき $B \rightarrow C$ が同型になることを示せ。
2. 鎖写像 $f : C_\bullet \rightarrow D_\bullet$ が境界をバウンダリに送ることを, 式 $f\partial = \partial f$ から説明せよ。
3. 長完全系列の一部 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ が与えられたとき, B が A と C の情報を同時に含むことを, 簡単なアーベル群の例で説明せよ。

第 11 章

マイヤー・ヴィートリス完全系列

11.1 この章で学ぶこと

- 単体的ホモロジーにおけるマイヤー・ヴィートリス完全系列の主張を理解する。
- 空間を 2 つの部分複体に分けて、ホモロジー群を計算する方法を学ぶ。
- 完全系列の読み方に慣れる。
- つなぎ準同型の意味を理解する。
- 円周、球面、くさび和のホモロジー群をマイヤー・ヴィートリス完全系列で計算できるようにする。
- 交わりが非連結な場合でもホモロジーでは自然に扱えることを理解する。

学習の指針

本章の前提は第 10 章の内容である。特に、完全系列の定義（各場所で $\text{Im} = \text{Ker}$ ）、鎖複体の短完全系列からホモロジー群の長完全系列が生じるという定理、そしてホモトピー不変性（可縮な空間のホモロジーは 1 点のそれと同じ）の三つを使う。不安があれば第 10 章の該当箇所を先に見直してほしい。本章で初めて登場する概念は、マイヤー・ヴィートリス完全系列そのものと、次元を一つ下げる「つなぎ準同型」 δ の二つだけである。定理の形を暗記するよりも、円周 S^1 の計算例を自分の手で最後まで再現できるようになることを目標に読み進めるとよい。

11.2 マイヤー・ヴィートリス完全系列の考え方

貼り合わせをホモロジーで読む

マイヤー・ヴィートリス完全系列は、「全体の穴」を「二つの部分の穴」と「交わりの穴」から計算する道具である。部分空間 K_1 と K_2 がそれぞれ単純でも、交わり $K_1 \cap K_2$ が複雑であれば、全体 K に新しい穴が生じることがある。

円周を二つの弧に分ける例では、弧はどちらも可縮であるが、交わりが 2 点に分かれるため、全体に 1 次元の穴が生じる。球面を二つの円板に分ける例では、円板はどちらも可縮であるが、交わりが円周であるため、全体に 2 次元のホモロジーが生じる。

ホモロジー群を定義に従って直接計算するには、鎖群を書き、境界写像を行列で表し、核と像を求

める必要がある。しかし、複体が大きくなると、この計算はすぐに複雑になる。

そこで、空間をより簡単な部分に分けて計算する方法が重要になる。

単体的複体 K が 2 つの部分複体 K_1, K_2 によって $K = K_1 \cup K_2$ と書けるとする。このとき、 K のホモロジー群を、 $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ のホモロジー群から調べる方法がある。

これがマイヤー・ヴィートリス完全系列である。

第 10 章で見たように、鎖複体の短完全系列からはホモロジー群の長完全系列が生じる。マイヤー・ヴィートリス完全系列は、この一般原理を空間の分解 $K = K_1 \cup K_2$ に適用したものである。

直感的には、マイヤー・ヴィートリス完全系列は全体の穴を、二つの部分の穴と、その重なり方から計算するための道具である。

11.3 鎖群の短完全系列

まず、単体的複体 K が部分複体 K_1, K_2 によって $K = K_1 \cup K_2$ と分解されているとする。

このとき、各次元 n について、鎖群の列

$$0 \rightarrow C_n(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\iota} C_n(K_1) \oplus C_n(K_2) \xrightarrow{j} C_n(K) \rightarrow 0$$

を考える。

ここで写像は $\iota(c) = (c, -c)$ および $j(a, b) = a + b$ で定める。

なぜこの列が完全か

まず、 ι は単射である。実際、 $\iota(c) = (0, 0)$ ならば $(c, -c) = (0, 0)$ なので $c = 0$ である。

次に、 $j \circ \iota = 0$ である。実際、 $j(\iota(c)) = j(c, -c) = c - c = 0$ 。したがって $\text{Im } \iota \subset \text{Ker } j$ である。

逆に、 $(a, b) \in \text{Ker } j$ とする。すると $j(a, b) = a + b = 0$ なので $a = -b$ である。このような鎖は、 K_1 側にも K_2 側にも同時に現れる部分、すなわち $K_1 \cap K_2$ の鎖から来ている。したがって、ある $c \in C_n(K_1 \cap K_2)$ が存在して $(a, b) = (c, -c)$ と書ける。よって $\text{Ker } j = \text{Im } \iota$ である。

さらに、 $K = K_1 \cup K_2$ なので、 K の各単体は K_1 または K_2 のどちらかに属する。したがって $j: C_n(K_1) \oplus C_n(K_2) \rightarrow C_n(K)$ は全射である。

以上より、

$$0 \rightarrow C_n(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\iota} C_n(K_1) \oplus C_n(K_2) \xrightarrow{j} C_n(K) \rightarrow 0$$

は短完全系列である。

直観: 両側に共通する鎖は交わりの鎖である

上の証明の要点は、「 K_1 の鎖であり、同時に K_2 の鎖でもあるものは、 $K_1 \cap K_2$ の鎖である」という一点にある。鎖 $a \in C_n(K_1)$ は K_1 の n 単体の整数係数の一次結合であり、各単体の係数は一意に定まる。 $a = -b$ という等式は、 K の鎖として両辺が等しいことを意味するから、 a の中で係数が 0 でない単体は、 K_1 の単体であると同時に ($-b$ の単体として) K_2 の単体でもある。 K_1, K_2 は部分複体なので、そのような単体はちょうど $K_1 \cap K_2$ に属する。したがって $a \in C_n(K_1 \cap K_2)$ とみなせる。「 K_1, K_2 が部分複体である」という仮定は、まさにここで効いている。

11.4 マイヤー・ヴィートリス完全系列

前節の短完全系列は、すべての次元 n で成り立つ。さらに、これらの写像は境界写像と両立するため、鎖複体の短完全系列

$$0 \rightarrow C_\bullet(K_1 \cap K_2) \rightarrow C_\bullet(K_1) \oplus C_\bullet(K_2) \rightarrow C_\bullet(K) \rightarrow 0$$

が得られる。

第 10 章で学んだように、鎖複体の短完全系列からは、ホモロジー群の長完全系列が誘導される。

短完全系列から長完全系列へ

マイヤー・ヴィートリス完全系列は、個別の空間だけに対する偶然の公式ではない。背後には、鎖複体の短完全系列

$$0 \rightarrow C'_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow C''_\bullet \rightarrow 0$$

からホモロジー群の長完全系列が自然に生じる、という一般原理がある。

この一般原理を、分解 $K = K_1 \cup K_2$ に対応する短完全系列

$$0 \rightarrow C_\bullet(K_1 \cap K_2) \rightarrow C_\bullet(K_1) \oplus C_\bullet(K_2) \rightarrow C_\bullet(K) \rightarrow 0$$

へ適用したものが、マイヤー・ヴィートリス完全系列である。圏論・ホモロジー代数の視点では、これは「短完全系列を長完全系列へ送る自然な構成」と見ることができる。

定理 11.1 (マイヤー・ヴィートリス完全系列). 単体的複体 K が部分複体 K_1, K_2 によって $K = K_1 \cup K_2$ と書けるとする。このとき、次の長完全系列が存在する。

$$\cdots \rightarrow H_n(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\iota_*} H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \xrightarrow{j_*} H_n(K) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(K_1 \cap K_2) \rightarrow \cdots$$

さらに低次元まで書くと、

$$\cdots \rightarrow H_1(K) \xrightarrow{\delta} H_0(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\iota_*} H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) \xrightarrow{j_*} H_0(K) \rightarrow 0$$

である。

この完全系列は、各場所で $\text{Im} = \text{Ker}$ が成り立つことを意味する。

直観: 定理の主張の読み方——三種類の写像が周期的に並ぶ

この長完全系列は、一見長いが、実は

$$H_n(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\iota_*} H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \xrightarrow{j_*} H_n(K) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(K_1 \cap K_2)$$

という 1 周期分の型が、次元 n を下げながら繰り返されているだけである。覚えるべき約束は次の三つである。

- ι_* : 交わりのサイクルを両側に符号付きで送る (鎖レベルで $c \mapsto (c, -c)$)。
- j_* : 両側のサイクルを全体の中で足す (鎖レベルで $(a, b) \mapsto a + b$)。

- δ : ただ一つ次元を下げる写像。 H_n から H_{n-1} へ移る「つなぎ目」である。

使うときは、 K_1 , K_2 , $K_1 \cap K_2$ の既知のホモロジー群を書き込み、0 になる群で系列を切り、残った短い部分から未知の $H_n(K)$ を挟み撃ちで決める。この手順は本章の例で繰り返し実演する。

部分複体版と開被覆版

位相空間の開被覆 $X = U \cup V$ に対するマイヤー・ヴィートリス完全系列は、通常は特異ホモロジーで定式化される。

本書では単体的ホモロジーを扱っているため、まずは $K = K_1 \cup K_2$ という部分複体版を基本形として用いる。

必要に応じて細分を行えば、多くの場合、空間の分割を部分複体の分割に置き換えて考えることができる。

11.5 写像の意味

マイヤー・ヴィートリス完全系列に現れる写像を確認する。

ι_* の意味

写像 $\iota_*: H_n(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_n(K_1) \oplus H_n(K_2)$ は、交わりの中のサイクルを、 K_1 側と K_2 側に入れて見る写像である。

ただし、鎖レベルで $\iota(c) = (c, -c)$ と定めたので、ホモロジーでも符号付きで $\iota_*([c]) = ([c], -[c])$ となる。

j_* の意味

写像 $j_*: H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \rightarrow H_n(K)$ は、 K_1 のサイクルと K_2 のサイクルを、全体 K の中で足し合わせる写像である。

鎖レベルでは $j(a, b) = a + b$ である。

したがって、 K_1 側で見える穴と K_2 側で見える穴を、全体 K の中で見たものが j_* である。

つなぎ準同型 δ の意味

写像 $\delta: H_n(K) \rightarrow H_{n-1}(K_1 \cap K_2)$ をつなぎ準同型という。これは、第 10 章で述べた接続準同型がマイヤー・ヴィートリス完全系列に現れたものである。

これは、全体 K のサイクルを K_1 側と K_2 側に分けたとき、その境界のずれが交わり $K_1 \cap K_2$ に現れることを表している。

11.6 つなぎ準同型の構成

つなぎ準同型 $\delta: H_n(K) \rightarrow H_{n-1}(K_1 \cap K_2)$ の構成を説明する。

まず, $[z] \in H_n(K)$ をとる。つまり, $z \in C_n(K)$ はサイクルであり, $\partial z = 0$ である。

$K = K_1 \cup K_2$ なので, z は $z = a + b$ と書ける。ここで $a \in C_n(K_1)$, $b \in C_n(K_2)$ である。

いま $0 = \partial z = \partial(a + b) = \partial a + \partial b$ なので $\partial a = -\partial b$ である。

ここで ∂a は K_1 の鎖であり, $-\partial b$ は K_2 の鎖である。両者が等しいので, これは交わり $K_1 \cap K_2$ の鎖とみなせる。

したがって $\partial a \in C_{n-1}(K_1 \cap K_2)$ である。さらに $\partial(\partial a) = 0$ なので, ∂a は $(n-1)$ 次サイクルである。

そこで $\delta([z]) = [\partial a]$ と定める。

この定義は, 分解 $z = a + b$ の取り方によらず well-defined であり, ホモロジー群の準同型になる。

つなぎ準同型の well-defined 性. 上の定義では, $z = a + b$ という分解を選んだ。この分解は一意ではないが, 得られるホモロジー類 $[\partial a]$ は変わらない。実際, 別の分解を $z = a' + b'$ とすると,

$$a - a' = -(b - b')$$

であり, 左辺は K_1 の鎖, 右辺は K_2 の鎖である。したがって, これは交わり $K_1 \cap K_2$ の鎖 c とみなせる。このとき $a' = a - c$ と書けるので,

$$\partial a' = \partial a - \partial c$$

である。つまり, ∂a と $\partial a'$ は $K_1 \cap K_2$ の中で境界だけ異なる。したがって, 両者は $H_{n-1}(K_1 \cap K_2)$ で同じホモロジー類を定める。□

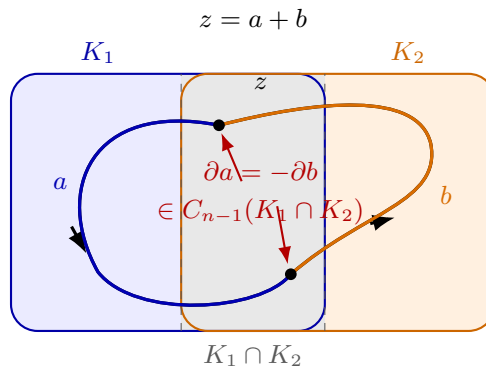


図 11.1 つなぎ準同型の模式図。閉じたサイクル z を K_1 側の鎖 a と K_2 側の鎖 b に分けると, その境界 $\partial a = -\partial b$ は交わり $K_1 \cap K_2$ の上に現れる。

つなぎ準同型の直感

つなぎ準同型は, K のサイクルを K_1 側と K_2 側に分け, その切れ目を $K_1 \cap K_2$ で測る 写像である。

特に, 円周を上半分と下半分に分けると, 切れ目は両端の 2 点に現れる。この切れ目が

$H_0(K_1 \cap K_2)$ に現れる。

具体例: 円周のサイクルでつなぎ準同型を計算する

つなぎ準同型を、鎖のレベルで一度計算しておこう。円周を 4 頂点 p, u, q, w と 4 辺からなる複体 K とし、上半分を K_1 (辺 $[p, u], [u, q]$ とその頂点), 下半分を K_2 (辺 $[q, w], [w, p]$ とその頂点) とする。交わりは $K_1 \cap K_2 = \{p, q\}$ である。

円周を 1 周するサイクルは

$$z = [p, u] + [u, q] + [q, w] + [w, p]$$

であり, 実際 $\partial z = (u - p) + (q - u) + (w - q) + (p - w) = 0$ となる。これを

$$a = [p, u] + [u, q] \in C_1(K_1), \quad b = [q, w] + [w, p] \in C_1(K_2)$$

と分けると $z = a + b$ である。このとき

$$\partial a = (u - p) + (q - u) = q - p$$

なので, 定義より

$$\delta([z]) = [\partial a] = [q] - [p] \in H_0(K_1 \cap K_2)$$

である。つまり, z を上下に切ったときの「切れ目」である 2 点の差が $\delta([z])$ である。この元は, 後の節で $\text{Ker } \iota_*$ の生成元として現れる $[p] - [q]$ と符号を除いて一致する。

11.7 完全系列の読み方

マイヤー・ヴィートリス完全系列を使うときには, 次のように読むとよい。

1. $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ のホモロジー群を先に調べる。
2. 長完全系列のうち, 必要な部分だけを書き出す。
3. 0 になる群を消して, 系列を短くする。
4. 完全性 $\text{Im} = \text{Ker}$ を用いて未知の群を決める。
5. 必要なら, H_0 の写像を具体的に計算する。

特に重要なのは, H_0 である。交わり $K_1 \cap K_2$ が非連結な場合, $H_0(K_1 \cap K_2)$ はその成分の個数を記録する。そのため, 交わりが 2 点になる場合などでも, 完全系列は自然に働く。

具体例: 完全系列から未知の群を決める三つの型

長完全系列から切り出した短い部分は, 多くの場合, 次のどれかの型で処理できる。どれも完全性 $\text{Im} = \text{Ker}$ だけから従う。

- **型 A** : $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ が完全なら $A \cong B$ 。実際, A での完全性から $\text{Ker } f = 0$ (単射), B での完全性から $\text{Im } f = B$ (全射) である。本章では $0 \rightarrow H_2(S^2) \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow 0$ の形で使う。

- 型 B: $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ が完全で g が単射なら $A = 0$ 。実際, $\text{Im } f = \text{Ker } g = 0$ であり, f は単射なので $A \cong \text{Im } f = 0$ である。本章では $H_1(S^2) = 0$ の導出で使う。
- 型 C: $0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z}^b \rightarrow 0$ が完全なら $G \cong A \oplus \mathbb{Z}^b$ 。 $\mathbb{Z}^b$ の基底 $e_1, \dots, e_b$ の逆像 $g_1, \dots, g_b \in G$ を一つずつ選ぶと, G の各元は「 A から来た元」と「 $g_1, \dots, g_b$ の整数係数の一次結合」の和に一意的に書ける (分裂という)。例えば $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ なら $G \cong \mathbb{Z}^2$ である。ただし右端が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のような有限群のときは分裂するとは限らない (第 10 章で見た $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$ が反例である)。

本書の符号規約

本書では, マイヤー・ヴィートリス完全系列に現れる写像

$$H_0(K_1 \cap K_2) \longrightarrow H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$$

を, 包含から来る二つの写像の差として

$$x \longmapsto (x, -x)$$

と書く規約を採用する。したがって, 交わりの一点が両方の成分へ入るとき, 生成元はしばしば $(1, -1)$ に送られる。別の符号規約を採る文献もあるが, 完全系列から得られるホモロジー群そのものは同型を除いて変わらない。

H_0 の写像の核に注意する

マイヤー・ヴィートリス完全系列では, しばしば $H_0(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ という写像が現れる。この写像の核は, 交わり $K_1 \cap K_2$ の連結成分が, K_1 側と K_2 側でどのように同一視されるかによって変わる。

例えば, $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ がすべて連結である場合を考える。このとき $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}$, $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であり, 上の符号規約のもとで写像は $1 \mapsto (1, -1)$ となる。したがって核は 0 である。この場合には, 後続の完全系列で現れる H_0 側の写像は単射である。

一方, K_1 と K_2 は連結であるが, 交わり $K_1 \cap K_2$ が 2 点 $\{p, q\}$ からなる場合には様子が変わる。このとき $H_0(K_1 \cap K_2) = \mathbb{Z}\langle [p], [q] \rangle$ である。しかし, p と q は K_1 の中では同じ連結成分に属し, また K_2 の中でも同じ連結成分に属する。そのため $[p]$ と $[q]$ はどちらも同じ元 $(1, -1)$ に写る。したがって $[p] - [q]$ は 0 に写り, $\text{Ker } \iota_* = \mathbb{Z}\langle [p] - [q] \rangle \cong \mathbb{Z}$ となる。

つまり, 交わりの中では別々の成分である p と q が, K_1 側でも K_2 側でもつながってしまうため, その差 $[p] - [q]$ が核に残る。

同じ考え方は一般の場合にも使える。 K_1 と K_2 が連結であり, 交わり $K_1 \cap K_2$ が k 個の連結成分 $C_1, \dots, C_k$ からなるとする。各成分から 1 点ずつ $p_1, \dots, p_k$ を取ると, $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}\langle [p_1], \dots, [p_k] \rangle$ である。一方, K_1 と K_2 は連結なので, すべての $[p_i]$ は $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ の中で同じ元 $(1, -1)$ に写る。したがって, $[p_i] - [p_1]$ はすべて核に入る。実際, 核は

$$\text{Ker } \iota_* = \mathbb{Z}\langle [p_2] - [p_1], \dots, [p_k] - [p_1] \rangle \cong \mathbb{Z}^{k-1}$$

である。

したがって、核が常に 0 または $\mathbb{Z}$ に限られるわけではない。交わりが連結なら $k = 1$ なので $\text{Ker } \iota_* = 0$ となり、交わりが 2 成分なら $k = 2$ なので $\text{Ker } \iota_* \cong \mathbb{Z}$ となる。本書で扱う基本例では主にこの二つの場合が現れるが、一般には交わりの連結成分数に応じて $\mathbb{Z}^{k-1}$ が現れる。この違いが、次の円周 S^1 の計算で重要になる。

11.8 例：円周 S^1

円周 S^1 を 4 本の辺からなる単体的複体 K として表す。上半分の 2 辺を K_1 、下半分の 2 辺を K_2 とする。

このとき、 $K_1 \simeq *$ 、 $K_2 \simeq *$ である。また、交わりは 2 点からなる。これを $K_1 \cap K_2 = \{p, q\}$ と書く。

復習: 可縮な空間のホモロジー群

第 10 章のホモトピー不変性より、 $X \simeq *$ (可縮) ならば

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_n(X) = 0 \quad (n \geq 1)$$

である。弧 (線分に同相な複体)、円板、円錐はいずれも可縮である。本章の計算では「 $K_1 \simeq *$ 」と分かった瞬間に、 K_1 のホモロジー群をすべて書き込んでよい。ここでは上半分の弧 K_1 は 1 点に変形レトラクトするので可縮であり、 $H_1(K_1) = 0$ 、 $H_0(K_1) \cong \mathbb{Z}$ である。

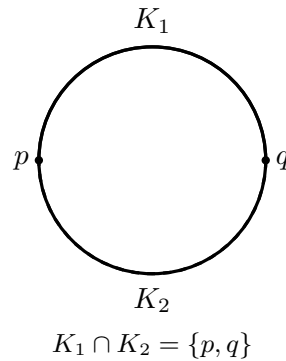


図 11.2 円周を二つの弧に分ける分解。交わりは二つの点である。

したがって $H_1(K_1) = H_1(K_2) = 0$ 、 $H_0(K_1) \cong \mathbb{Z}$ 、 $H_0(K_2) \cong \mathbb{Z}$ 、 $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}^2$ 。
マイヤー・ヴィートリス完全系列の低次元部分は

$$0 \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\delta} H_0(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\iota_*} H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) \xrightarrow{j_*} H_0(S^1) \rightarrow 0$$

となる。

直観: 列の左端に 0 を書ける理由

長完全系列そのものは、この部分の左側に

$$\cdots \rightarrow H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow \cdots$$

と続いている。いま二つの弧は可縮なので $H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) = 0$ であり、この 0 を書き込んだものが上の列である。左端が 0 なので、完全性より次の写像 $\delta: H_1(S^1) \rightarrow H_0(K_1 \cap K_2)$ は単射になる。「まず 0 になる群を書き込み、そこで系列を切り出す」のが計算の第一歩である。

ここで $H_0(K_1 \cap K_2) = \mathbb{Z}\langle [p], [q] \rangle$ と書く。これは、 $K_1 \cap K_2$ が二つの連結成分、すなわち二つの点 p, q からなるためである。したがって、 $H_0(K_1 \cap K_2)$ の任意の元は $a[p] + b[q]$, $a, b \in \mathbb{Z}$, の形に一意的に書ける。

一方、 K_1 は連結なので、 p と q は K_1 の中では同じ 0 次ホモロジー類を表す。つまり、 $H_0(K_1) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を u と書けば、 $[p]$ も $[q]$ も u に写る。同様に、 K_2 も連結なので、 $H_0(K_2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を v と書けば、 $[p]$ も $[q]$ も v に写る。

マイヤー・ヴィートリス完全系列に現れる写像 $\iota_*: H_0(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ は、符号の約束の一つ選ぶと、包含写像によって $[r] \mapsto ([r]_{K_1}, -[r]_{K_2})$ と送る写像である。したがって、基底を u, v で同一視すれば $\iota_*([p]) = (u, -v)$, $\iota_*([q]) = (u, -v)$ である。簡単に書けば、どちらも $(1, -1)$ に写る。

したがって、一般の元 $a[p] + b[q]$ に対して

$$\iota_*(a[p] + b[q]) = a(u, -v) + b(u, -v) = (a + b)(u, -v)$$

となる。これが 0 になるための条件は $a + b = 0$ である。すなわち $b = -a$ であり、 $a[p] + b[q] = a([p] - [q])$ と書ける。

よって $\text{Ker } \iota_* = \mathbb{Z}\langle [p] - [q] \rangle \cong \mathbb{Z}$ である。この生成元 $[p] - [q]$ は、二つの交点 p, q の差を表しており、円周を二つの弧で貼り合わせたときに残る 1 次元の穴に対応している。

完全性より $\text{Im } \delta = \text{Ker } \iota_*$. また、この部分では $0 \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\delta} \text{Ker } \iota_*$ となるので、 $H_1(S^1) \cong \text{Ker } \iota_* \cong \mathbb{Z}$.

さらに S^1 は連結なので $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

したがって $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ が得られる。

この計算の意味

円周を 2 本の弧に分けると、それぞれの弧は可縮である。したがって、それぞれ単独では穴を持たない。

しかし、交わりが 2 点に分かれるため、 $[p] - [q]$ という H_0 の情報が現れる。この非連結性が、円周全体の H_1 を生み出している。

11.9 例：球面 S^2

次に球面 S^2 を計算する。

球面を北半球と南半球に分ける。対応する部分複体を K_1, K_2 とする。それぞれ円板に変形レトラクトするので $K_1 \simeq *$, $K_2 \simeq *$ である。

交わりは赤道に対応し, $K_1 \cap K_2 \simeq S^1$ である。

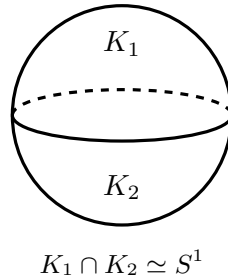


図 11.3 球面を北半球と南半球に分ける分解。交わりは赤道である。

したがって $H_1(K_1) = H_1(K_2) = 0$, $H_2(K_1) = H_2(K_2) = 0$, また $H_1(K_1 \cap K_2) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.
マイヤー・ヴィートリス完全系列の一部は

$$0 \rightarrow H_2(S^2) \xrightarrow{\delta} H_1(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) \rightarrow H_1(S^2) \rightarrow \dots$$

である。

ここで $H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) = 0$ なので, $0 \rightarrow H_2(S^2) \xrightarrow{\delta} H_1(S^1) \rightarrow 0$ が得られる。したがって $H_2(S^2) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

次に $H_1(S^2)$ を求める。完全系列の次の部分を見ると, $0 \rightarrow H_1(S^2) \rightarrow H_0(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ となる。

ここで $K_1 \cap K_2 \simeq S^1$ は連結なので $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}$. また, $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. 写像 $H_0(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ は $1 \mapsto (1, -1)$ であり, 単射である。したがってその核は 0 である。

完全性より $H_1(S^2) = 0$.

直観: $H_1(S^2)$ が消える導出を二段に分ける

上の議論は, 「完全系列から未知の群を決める三つの型」の型 B そのものである。段階を分けて書くと次のようになる。まず, $H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) = 0$ が左隣にあるので $\delta : H_1(S^2) \rightarrow H_0(K_1 \cap K_2)$ は単射であり, $H_1(S^2) \cong \text{Im } \delta$ である。次に, 完全性より $\text{Im } \delta = \text{Ker } \iota_*$ であり, ι_* は $1 \mapsto (1, -1)$ の単射だから $\text{Ker } \iota_* = 0$. あわせて $H_1(S^2) = 0$ となる。
円周 S^1 のときとの違いは, 交わりの連結性である。 S^1 では交わりが 2 点で $[p] - [q]$ が核に残ったのに対し, S^2 では交わり (赤道) が連結なので核に残る元がなく, H_1 が消える。

さらに S^2 は連結なので $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

以上より $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(S^2) = 0$, $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

二つの円板を境界で貼り合わせる

球面 S^2 は, 二つの円板を境界円周に沿って貼り合わせた空間と見ることができる。すなわち,

$$S^2 = D_+^2 \cup D_-^2, \quad D_+^2 \cap D_-^2 = S^1$$

である。ここで D_+^2 は上半球, D_-^2 は下半球と思えばよい。二つの円板の共通部分は、赤道にあたる円周 S^1 である。

それぞれの円板 D_+^2, D_-^2 は可縮なので,

$$H_n(D_+^2) = H_n(D_-^2) = 0 \quad (n \geq 1), \quad H_0(D_+^2) \cong H_0(D_-^2) \cong \mathbb{Z}$$

である。一方、共通部分は円周なので,

$$H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}, \quad H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

である。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の高次元部分を見ると,

$$0 \rightarrow H_2(S^2) \xrightarrow{\delta} H_1(S^1) \rightarrow H_1(D_+^2) \oplus H_1(D_-^2) \rightarrow \cdots$$

となる。ここで

$$H_1(D_+^2) \oplus H_1(D_-^2) = 0$$

であるから,

$$0 \rightarrow H_2(S^2) \xrightarrow{\delta} H_1(S^1) \rightarrow 0$$

が得られる。したがって

$$H_2(S^2) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

この計算は、直感的には次のように理解できる。二つの円板それぞれには穴はない。しかし、それらを境界円周 S^1 に沿って貼り合わせると、境界が消え、閉じた二次元の面ができる。この閉じた面が球面 S^2 であり、その基本類が $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ として現れる。

つまり、球面の二次元ホモロジーは、二つの円板そのものから直接出てくるのではなく、二つの円板の交わりである円周

$$D_+^2 \cap D_-^2 = S^1$$

の一次元ホモロジー

$$H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

が、マイヤー・ヴィートリス完全系列の接続準同型によって一つ次元を上げられて現れたものと見ることができる。

11.10 例：高次元球面への応用

同じ考え方で、高次元球面のホモロジーも理解できる。

帰納法としての見方

高次元球面の計算では、 S^n を二つの n 次元円板に分ける。その交わりは赤道にあたる S^{n-1} である。したがって、マイヤー・ヴィートリス完全系列は、 S^n の最上次元ホモロジーを S^{n-1} の一つ低いホモロジーへ結びつける。

これは一回で終わる計算ではなく,

$$S^n, S^{n-1}, S^{n-2}, \dots, S^1$$

へと次元を下げていく帰納的な計算である。最終的に $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ に到達するため, $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ が得られる。

$n \geq 2$ とし, S^n を上半球と下半球に分ける。それぞれを K_1, K_2 とすると, $K_1 \simeq *, K_2 \simeq *$ であり, $K_1 \cap K_2 \simeq S^{n-1}$ である。

マイヤー・ヴィートリス完全系列より, 高次元では $H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1})$ が得られる。

これを繰り返すと, $H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ となる。

したがって $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

また, $0 < k < n$ では $H_k(S^n) = 0$ となる。

具体例: 中間次元で $H_k(S^n)$ が消えることの確認

この主張も同じ完全系列から従う。 $2 \leq k$ のとき, 半球は可縮なので, 完全系列の

$$0 = H_k(K_1) \oplus H_k(K_2) \rightarrow H_k(S^n) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(K_1) \oplus H_{k-1}(K_2) = 0$$

という部分から $H_k(S^n) \cong H_{k-1}(S^{n-1})$ が得られる ($k-1 \geq 1$ が必要なことに注意)。これを繰り返すと

$$H_k(S^n) \cong H_{k-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong H_1(S^{n-k+1})$$

となり, $k < n$ より $n-k+1 \geq 2$ である。あとは $m \geq 2$ で $H_1(S^m) = 0$ を見ればよいが, このとき赤道 S^{m-1} は連結なので, S^2 のときとまったく同じ議論 (型 B) で $H_1(S^m) = 0$ となる。

具体的に $n = 3$ で確かめると, $H_1(S^3) = 0$ (赤道 S^2 が連結だから), $H_2(S^3) \cong H_1(S^2) = 0$ である。

つまり, 球面 S^n のホモロジー群は

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0), \\ \mathbb{Z} & (k = n), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

球面の穴

S^n は n 次元の穴を 1 つ持つ。そのことが $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ として表れる。

一方, $0 < k < n$ の次元には穴がないため, $H_k(S^n) = 0$ となる。

懸垂のホモロジー

空でない連結な空間 X に対して、その懸垂を ΣX と書く。直感的には、 X の上側に北極、下側に南極を付け、 X から北極・南極へ向かって円錐状につぶした空間である。

この空間は、二つの円錐の和として

$$\Sigma X = C_+X \cup C_-X$$

と書ける。ここで C_+X は X から北極へ向かう円錐、 C_-X は X から南極へ向かう円錐である。二つの円錐はいずれも頂点へ縮められるので可縮であり、

$$H_k(C_+X) = H_k(C_-X) = 0 \quad (k \geq 1), \quad H_0(C_+X) \cong H_0(C_-X) \cong \mathbb{Z}$$

である。また、二つの円錐の共通部分は、もとの空間 X であるから、

$$C_+X \cap C_-X = X$$

である。

マイヤー・ヴィートリス完全系列を

$$\cdots \rightarrow H_n(C_+X) \oplus H_n(C_-X) \rightarrow H_n(\Sigma X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(X) \rightarrow H_{n-1}(C_+X) \oplus H_{n-1}(C_-X) \rightarrow \cdots$$

に適用する。 $n \geq 2$ のとき、両端の円錐のホモロジーは消えるので、

$$0 \rightarrow H_n(\Sigma X) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(X) \rightarrow 0$$

が得られる。したがって

$$H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X) \quad (n \geq 2)$$

である。

これは、 X の $(n-1)$ 次元サイクルが、懸垂をとることによって n 次元サイクルになる、ということを表している。たとえば、 $X = S^1$ とすると、

$$\Sigma S^1 \cong S^2$$

であるから、

$$H_2(S^2) \cong H_2(\Sigma S^1) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

となる。これは、前の例で見た

$$H_2(S^2) \cong H_1(S^1)$$

という計算と同じ現象である。

さらに、 S^n は S^{n-1} の懸垂と見ることができるので、

$$S^n \cong \Sigma S^{n-1}$$

である。したがって、帰納的に

$$H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \cdots \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

が得られる。

低次元についても確認しておく。 X が連結であれば、完全系列の低次元部分は

$$0 \rightarrow H_1(\Sigma X) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(C_+X) \oplus H_0(C_-X)$$

となる。ここで

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_0(C_+X) \oplus H_0(C_-X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

であり、写像は生成元を $(1, -1)$ に送るので単射である。したがってその核は 0 であり、完全性より

$$H_1(\Sigma X) = 0$$

である。また ΣX は連結なので、

$$H_0(\Sigma X) \cong \mathbb{Z}$$

である。

まとめると、空でない連結な空間 X について、懸垂 ΣX のホモロジーは

$$H_0(\Sigma X) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma X) = 0, \quad H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X) \quad (n \geq 2)$$

となる。

次元が一つ上がる理由

懸垂では、 X の各点から北極と南極に向かって線分を張る。そのため、 X の中にある $(n-1)$ 次元サイクルは、上側の円錐と下側の円錐によって挟まれ、 ΣX の中で n 次元のサイクルを作る。

マイヤー・ヴィートリス完全系列では、この対応が接続準同型

$$H_n(\Sigma X) \cong H_{n-1}(X)$$

として現れる。つまり、交わり $X = C_+X \cap C_-X$ にある $(n-1)$ 次元のホモロジーが、貼り合わせた全体 ΣX では一つ次元の高いホモロジーとして現れるのである。

11.11 例：くさび和

次に、くさび和を考える。

2 つの部分複体 K_1, K_2 が 1 点だけで交わっているとする。すなわち、 $K = K_1 \vee K_2$ であり、 $K_1 \cap K_2 = \{v\}$ とする。

このとき $H_n(K_1 \cap K_2) = 0$ ($n \geq 1$) である。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の $n \geq 2$ の部分を見ると、 $0 \rightarrow H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \rightarrow H_n(K) \rightarrow 0$ となる。したがって $H_n(K) \cong H_n(K_1) \oplus H_n(K_2)$ ($n \geq 2$)。

$n = 1$ についても、低次元部分を確認すると、交わりが 1 点なので余分な H_0 の核は出ない。したがって $H_1(K) \cong H_1(K_1) \oplus H_1(K_2)$ である。

よって $H_n(K_1 \vee K_2) \cong H_n(K_1) \oplus H_n(K_2)$ ($n \geq 1$) が成り立つ。

例：8 の字グラフ

8 の字グラフは $S^1 \vee S^1$ である。したがって $H_1(S^1 \vee S^1) \cong H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. また、連結なので $H_0(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z}$.

具体例:8 の字グラフで低次元部分を書き下す

本文の「交わりが 1 点なので余分な H_0 の核は出ない」を、実際に系列を書いて確認しよう。
 $K = S^1 \vee S^1$, $K_1 = K_2 = S^1$, $K_1 \cap K_2 = \{v\}$ とすると、低次元部分は

$$0 = H_1(\{v\}) \rightarrow H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) \xrightarrow{j_*} H_1(K) \xrightarrow{\delta} H_0(\{v\}) \xrightarrow{\iota_*} H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$$

となる。まず ι_* は生成元 $[v]$ を $(1, -1)$ に送るので単射であり、 $\text{Ker } \iota_* = 0$. 完全性より $\text{Im } \delta = \text{Ker } \iota_* = 0$, すなわち δ は零写像である。すると $H_1(K)$ での完全性より $\text{Im } j_* = \text{Ker } \delta = H_1(K)$ となり、 j_* は全射。さらに左端が 0 なので $\text{Ker } j_* = \text{Im } \iota_* = 0$ となり、 j_* は単射。よって j_* は同型であり、

$$H_1(S^1 \vee S^1) \cong H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

が得られる。生成元は、左右それぞれの円周を 1 周するサイクルである。

くさび和の計算で注意する点

くさび和では、二つの空間は一点だけで交わる。そのため、交わりの高次ホモロジーは消え、正の次数のホモロジーは単純に直和になる。

これに対して、球面の例では交わりが円周であり、懸垂の例では交わりがもとの空間 X である。交わりが一点より複雑になると、そのホモロジーが一つ高い次元のホモロジーを生むことがある。この違いが、マイヤー・ヴィートリス完全系列を使う際の重要な観察点である。

11.12 ファン・カンペンの定理との違い

基本群を計算するファン・カンペンの定理では、通常、 $U \cap V$ が弧状連結であることを仮定する。

これは、基本群が基点に依存するためである。交わりが分断されていると、基点をどう動かすかが問題になる。

一方、ホモロジー群では、交わりが非連結であっても問題なく扱える。なぜなら、 H_0 が連結成分の個数を記録してくれるからである。

円周の例では、 $S^1 = K_1 \cup K_2$ と分けたとき、 $K_1 \cap K_2 = \{p, q\}$ は 2 点からなる非連結な空間であった。この非連結性は $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}^2$ として記録され、その核から $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ が得られた。

このように、マイヤー・ヴィートリス完全系列は、交わりが複数成分に分かれる状況を自然に扱える。

11.13 計算の型

マイヤー・ヴィートリス完全系列を使う典型的な型をまとめる。

型 1：二つの可縮な部分の交わりから穴が生まれる

$K = K_1 \cup K_2$ で $K_1 \simeq *$, $K_2 \simeq *$ のとき, 全体のホモロジーは交わり $K_1 \cap K_2$ に強く支配される。

典型例は $S^2 = D_+^2 \cup D_-^2$, $D_+^2 \cap D_-^2 = S^1$ である。

このとき $H_2(S^2) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ となる。

型 2：交わりが 1 点なら高次ホモロジーは直和になる

$K = K_1 \vee K_2$ のように, $K_1 \cap K_2 = \{v\}$ であれば, $H_n(K) \cong H_n(K_1) \oplus H_n(K_2)$ ($n \geq 1$) となる。

型 3：交わりが非連結なら H_0 が重要になる

円周の例では, $K_1 \cap K_2 = \{p, q\}$ であり, $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}^2$ であった。

この $\mathbb{Z}^2$ の中の $[p] - [q]$ が, 円周の 1 次ホモロジーの生成元に対応する。

補足: 簡約ホモロジー群と H_0 の帳簿づけ

H_0 回りの計算を見通しよくする道具として, **簡約ホモロジー群**を紹介しておく。各頂点のホモロジー類を 1 に送る準同型 $\varepsilon: H_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ を考え,

$$\tilde{H}_0(K) = \text{Ker } \varepsilon, \quad \tilde{H}_n(K) = H_n(K) \quad (n \geq 1)$$

と定める。 K が c 個の連結成分を持てば $\tilde{H}_0(K) \cong \mathbb{Z}^{c-1}$ であり, 特に 2 点 $\{p, q\}$ では $\tilde{H}_0(\{p, q\}) = \mathbb{Z}\langle [p] - [q] \rangle \cong \mathbb{Z}$ となる。これはまさに, 円周の計算で $\text{Ker } \iota_*$ として現れた群である。

交わり $K_1 \cap K_2$ が空でなければ, マイヤー・ヴィートリス完全系列は簡約ホモロジーでもそのまま成り立つ。可縮な空間では $\tilde{H}_n = 0$ が**すべての** $n \geq 0$ で成り立つので, 円周の例では系列が

$$0 \rightarrow \tilde{H}_1(S^1) \rightarrow \tilde{H}_0(\{p, q\}) \rightarrow 0$$

まで縮み, 直ちに $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ が読み取れる。本書では以後も通常のホモロジーで計算を進めるが, 「 H_0 の核として残るのは成分の個数から 1 を引いた分」という数え方の背景として知っておくとよい。

11.14 よくある注意点

注意 1: K_1 と K_2 は簡単に選ぶ

マイヤー・ヴィートリス完全系列を使うときは、 K_1 , K_2 , $K_1 \cap K_2$ のホモロジー群が分かりやすいように分割することが重要である。

特に、 $K_1 \simeq *$, $K_2 \simeq *$ となるように選べると、計算が簡単になる。

注意 2: 交わりも簡単である必要がある

K_1 と K_2 が簡単でも、交わり $K_1 \cap K_2$ が複雑だと、完全系列の計算は難しくなる。

したがって、 K_1 , K_2 , $K_1 \cap K_2$ の三つがすべて扱いやすいように分けるのが理想である。

注意 3: 低次元では H_0 を丁寧に見る

特に H_1 を求めるとき、長完全系列の中で $H_1(K) \rightarrow H_0(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ が現れる。

したがって、 H_1 の計算には H_0 の写像が関係する。これは、交わりの連結成分の情報が 1 次元の穴を生むことがあるためである。

11.15 まとめ

マイヤー・ヴィートリス完全系列は、ホモロジー論における貼り合わせ公式である。

単体的複体 $K = K_1 \cup K_2$ に対して、 K_1 , K_2 , $K_1 \cap K_2$ のホモロジー群を用いて、 K のホモロジー群を調べる。

基本となる長完全系列は

$$\cdots \rightarrow H_n(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \rightarrow H_n(K) \rightarrow H_{n-1}(K_1 \cap K_2) \rightarrow \cdots$$

である。

この完全系列を使うと、 S^1 , S^2 , S^n , $S^1 \vee S^1$ などのホモロジー群を、空間の分割から計算できる。本章の重要な考え方は次の通りである。

- 全体を簡単な 2 つの部分に分ける。
- それぞれの部分と交わりのホモロジー群を調べる。
- 長完全系列を書き、0 になる群を消す。
- 完全性を使って未知のホモロジー群を決める。
- 低次元では H_0 の写像を丁寧に見る。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の強みは、交わりが非連結でも自然に扱える点にある。これは、ホモロジー群が H_0 によって連結成分の情報を記録しているためである。

練習問題 (標準)

1. 開円環を 2 つの細長い帯状部分に分け、それぞれが可縮で、交わりが 2 つの可縮成分を持つようにする。マイヤー・ヴィートリス完全系列から、開円環の H_1 を求めよ。
2. 2 つの円板を、境界上の 2 本の互いに交わらない弧に沿って貼り合わせた空間を考える。この空間に 1 次元の穴が生じる理由を、交わりの連結成分に注目して説明せよ。
3. $S^2 \vee S^1$ を、球面部分と円周部分の和として見る。交わりが 1 点であることを用いて、 H_2 と H_1 を求めよ。
4. S^2 と S^2 を 1 点で貼り合わせた空間 $S^2 \vee S^2$ のホモロジー群を、マイヤー・ヴィートリス完全系列の考え方から求めよ。
5. 2 つの部分空間 K_1, K_2 がどちらも可縮であっても、 $K_1 \cap K_2$ が非連結ならば、和 $K_1 \cup K_2$ に 1 次元ホモロジーが現れ得る。この理由を説明せよ。
6. 交わり $K_1 \cap K_2$ が空でない 1 点だけからなる場合、高次のホモロジーについて

$$H_n(K_1 \cup K_2) \cong H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \quad (n \geq 1)$$

が期待できる理由を説明せよ。

7. マイヤー・ヴィートリス完全系列で、

$$H_0(K_1 \cap K_2)$$

が計算に影響する典型的な状況を説明せよ。

8. つなぎ準同型は、どのような「貼り合わせのずれ」を測っていると考えられるか説明せよ。
9. ファン・カンペンの定理では基本群を扱い、マイヤー・ヴィートリス完全系列ではホモロジー群を扱う。この違いを、計算対象の性質の違いとして説明せよ。
10. マイヤー・ヴィートリス完全系列を使うために、 $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ のホモロジーが簡単であることが望ましい理由を説明せよ。

練習問題 (発展)

1. S^n を二つの n 次元円板の和として表すと、交わりが S^{n-1} になる。マイヤー・ヴィートリス完全系列から $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ が得られる流れを説明せよ。
2. 二つの可縮空間 K_1, K_2 の交わりが m 個の点からなる場合、 $K_1 \cup K_2$ の H_1 の階数を予想せよ。
3. くさび和 $X \vee Y$ の高次ホモロジーが、 X と Y の高次ホモロジーの直和になる理由を、マイヤー・ヴィートリス完全系列から説明せよ。

第 12 章

ホモロジー群の計算 (2) 完全系列の利用

12.1 この章で学ぶこと

- マイヤー・ヴィートリス完全系列を用いて具体的な空間のホモロジー群を計算する。
- グラフに円板を貼り付ける空間のホモロジー群を、完全系列から求める。
- トーラス、射影平面、クラインの壺のホモロジー群を統一的に計算する。
- 結び目補空間の第一ホモロジー群が $\mathbb{Z}$ になる理由を理解する。
- 基本群の可換化と第一ホモロジー群の関係を具体例で確認する。
- 向き付け可能性と H_2 の関係を理解する。

学習の指針

この章は「計算練習の章」である。前提となるのは、第 10 章の完全性 $\text{Im} = \text{Ker}$ の使い方と、第 11 章のマイヤー・ヴィートリス完全系列 (定理 11.1) である。初出の道具は、余核 $\text{Coker } \varphi = B / \text{Im } \varphi$ と、基本群の可換化を H_1 に結びつけるポアンカレ・フレヴィッツの定理の二つだけである。各計算例では、「貼り付け円周が $H_1(G)$ のどの元に写るか」を自分の手で確かめながら読み進めるとよい。

この章の計算について

第 8 章から第 9 章では、単体的ホモロジーを定義に基づいて計算した。第 10 章では完全系列の基礎を学び、第 11 章ではマイヤー・ヴィートリス完全系列を導入した。

この章では、完全系列を具体的な空間の計算に用いる。実際には、トーラスやクラインの壺を適当に細分して、円板や円周、くさび和に変形レトラクトする部分複体を選んでいく。

したがって本文中の $K_1 \simeq S^1 \vee S^1$, $K_1 \cap K_2 \simeq S^1$ のような記述は、厳密には「適当な細分の後、そのようなホモトピー型をもつ部分複体を選ぶ」という意味で理解する。

12.2 前章の要点

前章で導入したマイヤー・ヴィートリス完全系列は、 $K = K_1 \cup K_2$ のホモロジー群を K_1 , K_2 , $K_1 \cap K_2$ のホモロジー群と写像から求める道具である。本章では、完全性 $\text{Im} = \text{Ker}$ を実際の計算に用いる。

12.3 完全系列を用いた計算の基本手順

マイヤー・ヴィートリス完全系列を使う計算は、次の手順で行う。

1. 空間 K を $K = K_1 \cup K_2$ と分ける。
2. $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ のホモロジー群を求める。
3. マイヤー・ヴィートリス完全系列の必要な部分を書き出す。
4. 0 になる群を消して、短い系列にする。
5. 写像がどのような準同型かを調べる。
6. 完全性から未知のホモロジー群を求める。

特に重要なのは、写像 $H_n(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_n(K_1) \oplus H_n(K_2)$ が具体的に何をしているかを理解することである。

この写像が 0 であるか、単射であるか、またはどの部分群を像にもつかによって、結果が変わる。

復習: 完全系列から群を読み取る三つの型

第 10 章で学んだ次の三つの読み方を、この章では繰り返し使う。

- $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ が完全ならば、 $\text{Ker } f = \text{Im}(0 \rightarrow A) = 0$ なので f は単射である。
- $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ が完全ならば、 $\text{Im } f = \text{Ker}(B \rightarrow 0) = B$ なので f は全射である。
- $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ が完全ならば、 f は単射かつ全射、すなわち同型 $A \cong B$ である。

例えば第 11 章の球面の計算では、 $0 \rightarrow H_2(S^2) \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow 0$ という部分から第三の型により $H_2(S^2) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ を得た。「両端に 0 を作って同型を読む」のが計算の定石である。

12.4 球面のホモロジーの復習

第 11 章で、球面 S^n のホモロジー群を求めた。結果は

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, n), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

特に $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(S^2) = 0$, $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

この $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元は、球面全体を向き付きで一回覆う 2 次元サイクルである。

一方、 $H_1(S^2) = 0$ は、球面上の閉曲線がホモロジー的には境界になることを表している。

12.5 グラフに円板を貼る計算

円板を貼ると何が変わるか

グラフには 1 次元の閉路があり、それが H_1 を作る。その閉路を境界として円板を貼り付けると、閉路は円板の境界になる。

ホモロジーでは、境界として現れるサイクルは 0 とみなされる。したがって、円板を貼り付ける操作は、対応する H_1 の生成元を消す操作として働く。基本群で言えば、2 セルの貼り付けが関係式を加えることに対応している。

本章の中心となる計算は、次の形である。

1 次元複体、すなわちグラフ G に、円板 D^2 を境界円周に沿って貼り付けて空間 X を作る。これを $X = G \cup D^2$ と書く。マイヤー・ヴィートリス完全系列を適用するには、章の冒頭の注意のとおり、 X を適当に細分して、貼り付けた円板の中の少し小さい同心円板 K_2 と、その内部を除いた残りの部分 K_1 とに分ける。 K_1 は G に円環（円板の縁の部分）を付けたもので、円環を外側へ押しつぶすことにより G に変形レトラクトする。また $K_1 \cap K_2$ は小さい円板の境界円周である。以下では記号を簡単にするため、 K_1 を G 、 K_2 を D^2 、 $K_1 \cap K_2$ を S^1 と同一視して書く。すなわち、交わりは貼り付ける境界円周に平行な円周であり、 $G \cap D^2 \simeq S^1$ である。また、 $D^2 \simeq *$ である。したがって、 $H_1(D^2) = 0$ 、 $H_2(D^2) = 0$ である。さらに、 G は 1 次元複体なので $H_2(G) = 0$ であり、 S^1 についても $H_2(S^1) = 0$ である。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の一部は

$$0 \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\iota_*} H_1(G) \oplus H_1(D^2) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_0(S^1) \rightarrow H_0(G) \oplus H_0(D^2)$$

となる。

ここで $H_1(D^2) = 0$ なので、 $H_1(G) \oplus H_1(D^2) \cong H_1(G)$ である。したがって、写像 ι_* は、貼り付ける境界円周 S^1 の基本サイクルが、グラフ G の中でどの 1 次元ホモロジー類を表すかを記録する写像と見なせる。

また、 G, D^2, S^1 が連結である場合には、 $H_0(S^1) \rightarrow H_0(G) \oplus H_0(D^2)$ は単射である。実際、 $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 、 $H_0(G) \cong \mathbb{Z}$ 、 $H_0(D^2) \cong \mathbb{Z}$ であり、この写像は符号の約束を除けば $1 \mapsto (1, -1)$ という形になる。したがって核は 0 である。

完全性より、 $H_1(X) \rightarrow H_0(S^1)$ の像は、次の写像 $H_0(S^1) \rightarrow H_0(G) \oplus H_0(D^2)$ の核に等しい。しかしこの核は 0 であるから、 $H_1(X) \rightarrow H_0(S^1)$ は零写像である。そのため、直前の写像 $H_1(G) \rightarrow H_1(X)$ は全射である。

したがって、重要な部分は

$$0 \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{\iota_*} H_1(G) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0$$

である。さらに $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ なので、完全系列

$$0 \rightarrow H_2(X) \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota_*} H_1(G) \rightarrow H_1(X) \rightarrow 0$$

が得られる。

ここで、一般に準同型 $\varphi: A \rightarrow B$ に対して、その核と余核をそれぞれ

$$\text{Ker } \varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}, \quad \text{Coker } \varphi = B / \text{Im } \varphi$$

で定義する。すなわち、余核とは、終域 B を φ の像 $\text{Im } \varphi$ で割った商群である。

具体例: 核と余核の計算

写像 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = 2n$ を考える。 $2n = 0$ となる整数は $n = 0$ だけなので $\text{Ker } \varphi = 0$ である。一方、 $\text{Im } \varphi = 2\mathbb{Z}$ (偶数全体) なので

$$\text{Coker } \varphi = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

である。次に $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $\psi(n) = (2n, 0)$ を考える。やはり $\text{Ker } \psi = 0$ であり、

$$\text{Coker } \psi = \mathbb{Z}^2 / \langle (2, 0) \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$$

となる。第 1 成分だけが 2 の倍数で割られ、第 2 成分はそのまま残ることに注意する。最後に零写像 $0: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ では、 $\text{Ker} = \mathbb{Z}$, $\text{Coker} = \mathbb{Z}^2$ である。この三つの型が、以下の射影平面・クラインの壺・トーラスの計算にそのまま対応する。

上の完全系列で、 $H_1(S^1) \rightarrow H_1(G)$ を ι_* と書く。完全性より、 $H_2(X) \rightarrow H_1(S^1)$ の像は $\text{Ker } \iota_*$ に等しい。しかも左端が $0 \rightarrow H_2(X)$ なので、 $H_2(X)$ はその像と同一視できる。したがって $H_2(X) \cong \text{Ker } \iota_*$ である。

同様に、 $H_1(G) \rightarrow H_1(X)$ を q と書くと、完全性より $\text{Ker } q = \text{Im } \iota_*$ である。また、右端が $H_1(X) \rightarrow 0$ なので、 q は全射である。したがって準同型定理より

$$H_1(X) \cong H_1(G) / \text{Ker } q = H_1(G) / \text{Im } \iota_* = \text{Coker } \iota_*.$$

つまり、円板を貼り付けると、その境界円周が表していた $H_1(G)$ のサイクルが境界として消える。そのため、 $H_1(X)$ は $H_1(G)$ を ι_* の像で割った群になる。特に、この場合 $\text{Coker } \iota_* = H_1(G) / \text{Im } \iota_*$ である。

学習の指針: この章の基本公式

以下の計算はすべて、いま導いた二つの公式

$$H_2(X) \cong \text{Ker } \iota_*, \quad H_1(X) \cong \text{Coker } \iota_* = H_1(G) / \text{Im } \iota_*$$

の適用である。したがって、各例で実際にやるべき作業は「貼り付け円周の像 $\iota_*(1) \in H_1(G)$ を求めること」の一点に尽きる。像が 0 なら $H_2 \cong \mathbb{Z}$ が残り、像が 0 でなければ $H_2 = 0$ となってその分 H_1 に商 (関係式) が生じる。この対応を意識して読むと、トーラス・射影平面・クラインの壺の計算が同じ一つの手続きに見えてくる。

12.6 トーラスのホモロジー

トーラスの二つの 1 次元サイクル

トーラスには、子午線方向と経線方向の二つの本質的なループがある。一方を a 、他方を b と書くと、これらはどちらも円板の境界としては消えない。したがって $H_1(T^2)$ には二つの独立な生成元が残り、

$$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$$

となる。

また、トーラスは向き付け可能な閉曲面なので、全体を一枚の閉じた 2 次元サイクルとして見ることができる。この基本類が

$$H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$$

を与える。

トーラス T^2 は、1 点で交わる 2 つの円周 $S^1 \vee S^1$ に 1 枚の円板を貼り付けた空間として表せる。2 つの円周に対応するループを a, b とする。このとき $G = S^1 \vee S^1$ とおけば $H_1(G) \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$ 。

トーラスは、正方形の辺を $aba^{-1}b^{-1}$ の順に同一視して得られる。したがって、貼り付ける円板の境界は、グラフ G の中で $aba^{-1}b^{-1}$ というループに対応する。

第一ホモロジー群では、基本群を可換化して見るので、 $aba^{-1}b^{-1}$ は $a + b - a - b = 0$ に対応する。

復習: 語の可換化は指数の和で計算できる

生成元 a, b の語を可換化するとき、積を和に、逆元をマイナスに読み替えればよい。その結果は、各生成元の指数（現れた回数を符号付きで数えたもの）の和だけで決まる。

- $aba^{-1}b^{-1}$: a の指数和は $1 - 1 = 0$, b の指数和も $1 - 1 = 0$ 。よって 0。
- a^2 : a の指数和は 2。よって $2a$ 。
- $aba^{-1}b$: a の指数和は $1 - 1 = 0$, b の指数和は $1 + 1 = 2$ 。よって $2b$ 。
- a^2b^3 : よって $2a + 3b$ 。

以下の射影平面・クラインの壺の計算や練習問題では、この読み替えを繰り返し使う。

したがって $\iota_* : H_1(S^1) \rightarrow H_1(G)$ は $1 \mapsto 0$ である。

つまり $\iota_* = 0$ 。

先ほどの一般論より $H_2(T^2) \cong \text{Ker } \iota_*$ 。ここで $\text{Ker } \iota_* = \mathbb{Z}$ なので $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ 。

また $H_1(T^2) \cong \text{Coker } \iota_*$ 。 $\iota_* = 0$ だから $\text{Coker } \iota_* \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$ 。したがって $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ 。

トーラスは連結なので $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$ 。

以上より $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$ 。

トーラスで H_2 が残る理由

トーラスの貼り付け円周は、 $H_1(S^1 \vee S^1)$ の中で 0 に写る。そのため、貼り付け円板の境界はホモロジー的には消えており、円板全体が 2 次元サイクルとして残る。
これが $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ として現れる。

12.7 射影平面のホモロジー

なぜ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が現れるのか

実射影平面では、2 セルの境界が 1 セルを二回まわる形で貼り付く。ホモロジーの言葉では、境界写像が

$$\partial_2(e^2) = 2e^1$$

となる。

したがって、1 次元サイクル e^1 は 0 ではないが、二倍すると境界になる。つまり

$$2[e^1] = 0$$

であり、 $[e^1]$ は位数 2 の元になる。これが

$$H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

の直感的な理由である。

次に、射影平面 $\mathbb{RP}^2$ を計算する。

射影平面は、1 つの円周 S^1 に 1 枚の円板を貼り付けた空間として表せる。貼り付け写像は、境界円周が S^1 を 2 回まわる写像である。

つまり $G = S^1$ とすると $H_1(G) \cong \mathbb{Z}a$ 。

貼り付ける境界は a^2 に対応する。ホモロジーでは a^2 は $2a$ に対応する。

したがって $\iota_* : H_1(S^1) \rightarrow H_1(G)$ は $1 \mapsto 2a$ である。

この写像は $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $1 \mapsto 2$ であるから単射である。したがって $H_2(\mathbb{RP}^2) \cong \text{Ker } \iota_* = 0$ 。

また $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \text{Coker } \iota_*$ だから $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/\langle 2a \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。

さらに $\mathbb{RP}^2$ は連結なので $H_0(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}$ 。

以上より $H_2(\mathbb{RP}^2) = 0$, $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_0(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}$ 。

具体例: 商群 $\mathbb{Z}/\langle 2a \rangle$ の元を列挙する

$H_1(G) \cong \mathbb{Z}a$ の元は $\dots, -2a, -a, 0, a, 2a, \dots$ である。これを部分群 $\langle 2a \rangle = \{\dots, -2a, 0, 2a, \dots\}$ で割ると、剰余類は

$$\bar{0} = \{\dots, -2a, 0, 2a, \dots\}, \quad \bar{a} = \{\dots, -a, a, 3a, \dots\}$$

のちょうど二つである。つまり $H_1(\mathbb{RP}^2)$ の元は「境界になるサイクル $\bar{0}$ 」と「境界にならないサイクル $\bar{a}$ 」の二つしかなく、 $\bar{a} + \bar{a} = \overline{2a} = \bar{0}$ が成り立つ。これが $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の意味である。

初めて現れるねじれ

射影平面では $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ という有限巡回群が現れる。これは**ねじれ**と呼ばれる現象である。

直感的には、あるループを 2 回まわると境界になるが、1 回だけでは境界にならないことを表している。

12.8 クラインの壺のホモロジー

クラインの壺でねじれが出る理由

クラインの壺では、一方の方向のループは通常の円周のように残るが、もう一方の方向には向きの反転が含まれる。そのため、2 セルの境界関係から、ある 1 次元サイクルの二倍が 0 になる。

結果として、第一ホモロジー群には自由な部分と位数 2 のねじれ部分が現れ、

$$H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

となる。この $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は、クラインの壺が向き付け不可能であることと深く関係している。

クラインの壺を K と書く。

クラインの壺も、くさび和 $S^1 \vee S^1$ に 1 枚の円板を貼り付けた空間として表せる。

2 つのループを a, b とする。このとき $G = S^1 \vee S^1$, $H_1(G) \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$.

クラインの壺の基本多角形では、境界語は $aba^{-1}b$ である。したがって貼り付ける境界円周は、 G の中で $aba^{-1}b$ に対応する。

ホモロジーでは可換化するので、 $aba^{-1}b$ は $a + b - a + b = 2b$ に対応する。

したがって $\iota_* : H_1(S^1) \rightarrow H_1(G)$ は $1 \mapsto 2b$ である。

この写像は単射である。したがって $H_2(K) \cong \text{Ker } \iota_* = 0$.

また $H_1(K) \cong \text{Coker } \iota_*$. よって $H_1(K) \cong (\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b)/\langle 2b \rangle$. したがって $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

復習: $\mathbb{Z}^2/\langle(p, q)\rangle$ の形の商群

上の最後の同型は、次のように確かめられる。 $(\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b)/\langle 2b \rangle$ では、 a 方向は何も割られないので $\mathbb{Z}$ がそのまま残り、 b 方向だけが $2b = 0$ という関係を受けて $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ になる。したがって $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

一般に、 $d = \gcd(p, q)$ とすると

$$\mathbb{Z}^2/\langle(p, q)\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

が成り立つ (基底の取り替え, すなわち Smith 標準形を用いる。巻末付録参照)。例えば $\mathbb{Z}^2/\langle(0, 2)\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (クラインの壺) である。 $\gcd(p, q) = 1$ のときは $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = 0$ なので、商は $\mathbb{Z}$ になることにも注意する。この形の商群は、章末の練習問題でも繰り返し現れる。

さらにクラインの壺は連結なので $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

以上より

$$H_2(\mathcal{K}) = 0, H_1(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_0(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}.$$

トーラスとの違い

トーラスでは貼り付け語 $aba^{-1}b^{-1}$ がホモロジーでは 0 になった。そのため $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ が現れた。

一方、クラインの壺では貼り付け語 $aba^{-1}b$ がホモロジーでは $2b$ になる。そのため $H_2(\mathcal{K}) = 0$ となり、代わりに $H_1(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ というねじれが現れる。

12.9 トーラス・射影平面・クラインの壺の比較

ここまでの計算をまとめる。

空間	貼り付け語	H_2	H_1
T^2	$aba^{-1}b^{-1}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$
$\mathbb{RP}^2$	a^2	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathcal{K}$	$aba^{-1}b$	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

この表から分かるように、貼り付け語をホモロジーで見たときの情報が、 H_2 と H_1 を決定している。

特に、貼り付け語がホモロジーで 0 になると、2 次元の基本サイクルが残る。一方、貼り付け語が非自明な元になると、その関係式によって H_1 に商が生じる。

学習の指針: この表の読み方

表は左から右へ「計算の流れ」の順に並んでいる。まず貼り付け語を指数和で可換化し（第 2 列）、その結果が 0 かどうかで H_2 が決まり（第 3 列、0 なら $\mathbb{Z}$ 、非自明なら 0）、最後に $H_1(G)$ を可換化した語で割って H_1 を得る（第 4 列）。自分でこの表を白紙に再現できれば、本章前半の内容は身についたと言ってよい。

12.10 基本群の可換化と第一ホモロジー群

前半では基本群を用いてループを調べ、後半ではホモロジー群を用いてサイクルを調べてきた。この二つは、1 次元では次の定理によって直接結びつく。

定理 12.1 (ポアンカレ・フレヴィッツの定理 (1 次元)). 連結な空間 X に対して、自然な同型

$$H_1(X) \cong \pi_1(X)^{\text{ab}}$$

が成り立つ。ここで $\pi_1(X)^{\text{ab}}$ は、基本群 $\pi_1(X)$ の可換化である。

復習: 可換化 G^{ab}

群 G の交換子とは $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ の形の元であり、交換子全体が生成する部分群を交換子部分群 $[G, G]$ という。可換化とは商群

$$G^{\text{ab}} = G/[G, G]$$

のことである。 $[g, h] = 1$ とみなすことは $gh = hg$ とみなすことと同じなので、 G^{ab} はアーベル群であり、 G から作れる「最大の」アーベル群である。ミニ例として、 a, b の自由群 $F(a, b)$ の可換化は $\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \cong \mathbb{Z}^2$ である。また、 G がはじめてからアーベル群なら $[G, G] = \{1\}$ なので $G^{\text{ab}} = G$ である。

この定理は、基本群で記録されるループの情報を、可換な量として見たものが第一ホモロジー群であることを述べている。したがって、前半で計算した基本群を可換化すると、後半で現れる第一ホモロジー群が得られる。

ここで $\pi_1(X)^{\text{ab}}$ とは、基本群 $\pi_1(X)$ においてすべての元が可換になるようにした群である。

例えばトーラスでは $\pi_1(T^2) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$. 可換化すると、関係式 $aba^{-1}b^{-1} = 1$ は自動的に成り立つ。したがって $\pi_1(T^2)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^2$. これは $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ と一致する。

クラインの壺では $\pi_1(\mathcal{K}) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$. 可換化すると $a + b - a + b = 2b = 0$ という関係が残る。したがって

$$\pi_1(\mathcal{K})^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b / \langle 2b \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

これも $H_1(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と一致する。

具体例: 射影平面での確認

射影平面では

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \langle a \mid a^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

であった (第 5 章)。この群ははじめてからアーベル群なので、可換化しても変わらず

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

である。これは本章で計算した $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と一致する。基本群が非可換な場合 (種数 2 以上の閉曲面 Σ_g など) でも、可換化さえ計算すれば H_1 が得られる点がこの定理の便利なところである。

12.11 向き付け可能性と H_2

閉曲面に対して、 H_2 は向き付け可能性と深く関係している。

向き付け可能な閉曲面では、曲面全体を一貫した向きで足し合わせることができる。そのため、曲面全体が 2 次元サイクルを作り、 $H_2 \cong \mathbb{Z}$ となる。

一方、向き付け不可能な閉曲面では、面全体に一貫した向きを付けることができない。そのため、整数係数ホモロジーでは 2 次元の基本サイクルが残らず、 $H_2 = 0$ となる。

実際、 $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ であるのに対し、 $H_2(\mathbb{RP}^2) = 0$, $H_2(\mathcal{K}) = 0$ である。

直観: 向き付け不可能だと H_2 が消える理由

2次元サイクルの候補は、すべての2単体に向きをそろえて足し合わせた鎖である。向き付け可能なら、隣り合う2単体の共有辺が逆向きに二回現れて打ち消し合い、境界が0になる。これが基本類である。

一方、射影平面では、どのように2単体の向きを選んでも打ち消しは完全には起こらず、たとえば $\partial_2(e^2) = 2e^1 \neq 0$ のように境界が残ってしまう。つまり $\text{Ker } \partial_2 = 0$ となり、2次元サイクルが一つも存在しない。これが整数係数で $H_2 = 0$ となる理由である。

12.12 向き付け可能閉曲面の一般式

種数 g の向き付け可能閉曲面を Σ_g と書く。

これは、 $2g$ 個のループをもつさび和 $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ に1枚の円板を貼り付けた空間として表せる。

ループを $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ とすると、貼り付け語は $[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_g, b_g]$ である。ここで $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ である。

ホモロジーでは可換化するため、各交換子 $[a_i, b_i]$ は0になる。したがって、貼り付け円周は H_1 では0に写る。

よって $H_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$ であり、 $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ 。また連結なので $H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$ 。

したがって

$$H_k(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0, 2), \\ \mathbb{Z}^{2g} & (k=1), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

オイラー標数も $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ となり、 $\text{rank } H_0 - \text{rank } H_1 + \text{rank } H_2 = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ と一致する。

具体例: 種数 2 の閉曲面

$g=2$ の場合を最後まで計算してみる。 $G = S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$ のループを a_1, b_1, a_2, b_2 とすると

$$H_1(G) \cong \mathbb{Z}a_1 \oplus \mathbb{Z}b_1 \oplus \mathbb{Z}a_2 \oplus \mathbb{Z}b_2 \cong \mathbb{Z}^4$$

である。貼り付け語は $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ であり、各生成元の指数和はすべて $1 - 1 = 0$ である。したがって $\iota_*(1) = 0$ 、すなわち $\iota_* = 0$ となり、

$$H_2(\Sigma_2) \cong \text{Ker } \iota_* \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma_2) \cong \text{Coker } \iota_* \cong \mathbb{Z}^4$$

を得る。オイラー標数は $1 - 4 + 1 = -2 = 2 - 2 \cdot 2$ で、公式と一致する。

12.13 向き付け不可能閉曲面の一般式

参考として、向き付け不可能閉曲面の場合も述べる。

射影平面を r 個連結和した閉曲面を N_r と書く。これは、 r 個のループ $a_1, \dots, a_r$ をもつくさび和に、境界語 $a_1^2 a_2^2 \cdots a_r^2$ で円板を貼り付けた空間として表せる。

ホモロジーでは、この境界語は $2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_r$ に対応する。したがって $H_1(N_r) \cong \mathbb{Z}^r / \langle 2(a_1 + \cdots + a_r) \rangle$ 。これは $H_1(N_r) \cong \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型である。

具体例: 基底の取り替えでねじれを取り出す

$\mathbb{Z}^2 / \langle 2(a_1 + a_2) \rangle$ を計算する。関係式 $2a_1 + 2a_2$ は基底 a_1, a_2 の両方にまたがっているの
で、新しい基底

$$c_1 = a_1 + a_2, \quad c_2 = a_2$$

を取る。 $a_1 = c_1 - c_2$, $a_2 = c_2$ と戻せるので、これは確かに $\mathbb{Z}^2$ の基底である。この基底では
関係式は $2c_1$ と書けるから、

$$\mathbb{Z}^2 / \langle 2(a_1 + a_2) \rangle = (\mathbb{Z}c_1 \oplus \mathbb{Z}c_2) / \langle 2c_1 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}$$

となる。これはクラインの壺 $N_2 = K$ の $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を再現している。一般の r でも、
 $c_1 = a_1 + \cdots + a_r$ を新しい基底の一つに取れば、同じ計算で $\mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が得られる。

また $H_2(N_r) = 0$, $H_0(N_r) \cong \mathbb{Z}$ 。

特に $N_1 = \mathbb{RP}^2$ では $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, また $N_2 = K$ では $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が得られる。

12.14 結び目補空間の第一ホモロジー群

次に、結び目補空間の第一ホモロジー群を計算する。

結び目 $K \subset S^3$ の正則近傍を $N(K)$ とし、結び目補空間を $X_K = S^3 \setminus \text{Int } N(K)$ とする。

このとき $S^3 = X_K \cup N(K)$ であり、 $X_K \cap N(K) = \partial N(K) \cong T^2$ である。

また、 $N(K)$ はソリッドトーラスであるから $H_1(N(K)) \cong \mathbb{Z}$ 。一方、 $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ 。

復習: ソリッドトーラスとそのホモロジー

ソリッドトーラスとは、円板と円周の直積 $D^2 \times S^1$ のことである。ドーナツの表面だけでなく
中身まで含めた立体と思えばよい。円板 D^2 を中心の 1 点につぶす変形により、 $D^2 \times S^1$ は芯
の円周 $\{0\} \times S^1$ に変形レトラクトする。したがって

$$H_1(D^2 \times S^1) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

であり、生成元は芯の円周である。一方、境界トーラス上の円周 $\partial D^2 \times \{pt\}$ (メリディアン)
は、円板 $D^2 \times \{pt\}$ の境界なので、ソリッドトーラスの中ではホモロジー的に 0 である。この
「芯は残り、メリディアンは消える」という事実を、以下の計算で使う。

S^3 のホモロジー群は $H_1(S^3) = 0$, $H_2(S^3) = 0$ 。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の一部は $H_2(S^3) \rightarrow H_1(T^2) \rightarrow H_1(X_K) \oplus H_1(N(K)) \rightarrow H_1(S^3)$
である。ここで $H_2(S^3) = 0$, $H_1(S^3) = 0$ なので、 $0 \rightarrow H_1(T^2) \rightarrow H_1(X_K) \oplus H_1(N(K)) \rightarrow 0$ と
なる。

したがって $H_1(T^2) \cong H_1(X_K) \oplus H_1(N(K))$ 。

境界トラス $\partial N(K)$ 上には、標準的な 2 つの曲線がある。

- メリディアン μ ：結び目のまわりを一回まわる小円（管状近傍の円板ファイバーの境界）。
- 優先ロンジチュード λ ：結び目に沿って走り、補空間側でホモロジー的に自明になる曲線。

したがって $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}\langle\mu\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle\lambda\rangle$.

$N(K)$ 側では、メリディアン μ は円板を張るので $\mu \mapsto 0$ である。一方、ロンジチュード λ はソリッドトラスの芯に対応するので、 $H_1(N(K)) \cong \mathbb{Z}$ の生成元に写る。

補空間 X_K 側では、優先ロンジチュード λ はザイフェルト曲面の境界として現れるため、 $\lambda \mapsto 0$ である。

したがって μ の像が $H_1(X_K)$ の生成元になる。

よって $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$.

結び目補空間の第一ホモロジー群

任意の結び目 $K \subset S^3$ に対して、 $H_1(S^3 \setminus \text{Int } N(K)) \cong \mathbb{Z}$. その生成元はメリディアンである。

これは、第 6 章で見た $G(K)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ という事実と一致している。ここで $G(K) = \pi_1(S^3 \setminus K)$ は結び目群である。

12.15 結び目群の可換化との対応

結び目群の Wirtinger 表示では、各生成元は弧に対応するメリディアンである。交点から得られる関係式は、可換化すると、すべてのメリディアンが同じ元になることを意味する。

そのため、結び目群の可換化は $G(K)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ となる。

一方、基本的な事実として $H_1(X_K) \cong \pi_1(X_K)^{\text{ab}}$ である。したがって $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$ である。

この $\mathbb{Z}$ の生成元は、幾何的にはメリディアンである。

12.16 計算結果の比較

この章で使った完全系列の基本形を整理する。

グラフ G に円板を貼り付けて $X = G \cup D^2$ を作る時、 $G \cap D^2 \simeq S^1$ である。

このとき、 $H_2(X) \cong \text{Ker}\{H_1(S^1) \rightarrow H_1(G)\}$, $H_1(X) \cong \text{Coker}\{H_1(S^1) \rightarrow H_1(G)\}$.

つまり、貼り付け円周が $H_1(G)$ の中で何になるかを調べればよい。

X	G	貼り付け円周の像	$H_1(X)$
T^2	$S^1 \vee S^1$	0	$\mathbb{Z}^2$
$\mathbb{RP}^2$	S^1	$2a$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\mathcal{K}$	$S^1 \vee S^1$	$2b$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

また、 H_2 は、貼り付け円周の像が 0 になる場合に $\mathbb{Z}$ が現れ、像が非自明なら消える。

12.17 まとめ

本章の計算は、すべて次の二点に集約される。

- グラフに円板を貼るときは、境界円周が $H_1(G)$ のどの元に写るかを調べる。
- 第一ホモロジー群は基本群の可換化に一致し、最上次元ホモロジーは曲面の向き付け可能性を反映する。

前節の表は、トーラス、射影平面、クラインの壺に対するこの原理の具体例である。

練習問題（標準）

1. 円周に円板を 3 回巻き付けて貼った空間を考える。この空間の H_1 を求めよ。
2. 2 つの円周のブーケに、貼り付け語 a^2b^3 に沿って円板を 1 枚貼る。第一ホモロジー群を

$$\mathbb{Z}^2 / \langle 2a + 3b \rangle$$

として計算せよ。

3. 2 つの円周のブーケに、貼り付け語 a^2 に沿って円板を 1 枚貼る。得られる空間の H_1 を求めよ。
4. 種数 3 の向き付け可能閉曲面 Σ_3 について、 H_2, H_1, H_0 を求めよ。
5. 向き付け不可能閉曲面 $N_3 = \#^3 \mathbb{RP}^2$ について、 H_2, H_1, H_0 を求めよ。
6. $S^1 \vee \mathbb{RP}^2$ の第一ホモロジー群を求めよ。
7. $S^2 \vee S^1$ と T^2 はどちらも連結であるが、ホモロジー群により区別できる。どの次数を見ればよいか説明せよ。
8. 向き付け可能閉曲面では最上次元のホモロジーが $\mathbb{Z}$ になるのに対し、向き付け不可能閉曲面では消える。この違いを説明せよ。
9. 任意の結び目補空間 X_K について、 $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$ となることを、メリディアン役割から説明せよ。
10. 基本群の可換化では交換子が消える。このことが、曲面の貼り付け語から第一ホモロジー群を求める際にどのように使われるか説明せよ。

練習問題（発展）

1. $S^1 \vee S^1$ に、貼り付け語 $a^p b^q$ に沿って 2 セルを貼る。第一ホモロジー群を $\mathbb{Z}^2 / \langle pa + qb \rangle$ として表し、 $\gcd(p, q)$ によって場合分けせよ。
2. 向き付け可能閉曲面の貼り付け語では、交換子が可換化で消える。このことから $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ を説明せよ。
3. 向き付け不可能閉曲面の貼り付け語 $a_1^2 \cdots a_g^2$ から、 $H_1(N_g)$ に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 型のねじれが現れる理由を説明せよ。

第 13 章

ホモロジー群の応用

13.1 この章で学ぶこと

- ベッチ数とオイラー標数の関係を理解する。
- オイラー・ポアンカレの定理を、鎖群とホモロジー群の階数の関係から理解する。
- ホモロジー群を用いて空間を区別する方法を学ぶ。
- 写像度の定義と基本性質を理解する。
- 写像度を用いて球面上の写像を調べる。
- 写像度を用いて代数学の基本定理を証明する考え方を理解する。
- Brouwer の不動点定理を、ホモロジー群を用いて証明する考え方を理解する。

学習の指針

この章は「計算した不変量を使う」章である。前提となるのは、第 8～9 章のホモロジー群の定義と計算、第 12 章の閉曲面のホモロジー、そして「連続写像 f が誘導準同型 f_* を与え、ホモトピックな写像は同じ f_* を与える」という事実である。初出の概念はベッチ数と写像度の 2 つであり、第 9 章で定義したオイラー標数は、ここでベッチ数の言葉で捉え直される。前半 (ベッチ数・オイラー標数) は線形代数の計算、後半 (写像度・不動点定理) は $r_* \circ i_* = \text{id}$ という 1 行の等式が主役なので、つまずいたら誘導準同型の性質 (第 10 章) に戻るとよい。

13.2 ホモロジー群の応用とは何か

これまで、単体的ホモロジー群を定義し、円周、球面、トーラス、クラインの壺、射影平面などの例を計算してきた。

ホモロジー群は、単に空間に付随する群を計算するだけではなく、空間や写像に関するさまざまな情報を引き出すために使われる。

例えば、ホモロジー群を使うと、次のようなことが分かる。

- 2 つの空間が同相でないことを示せる。
- 曲面の穴の数を代数的に数えられる。
- 写像が球面を何回巻き付けるかを測れる。

- 複素多項式が零点を持つことを証明できる。
- 円板から円板への連続写像が必ず不動点を持つことを証明できる。

この章では、ホモロジー群の代表的な応用として、オイラー標数、ベッチ数、写像度、代数学の基本定理、Brouwer の定理を扱う。

13.3 係数体を用いたホモロジー

これまで主に整数係数ホモロジー $H_n(X; \mathbb{Z})$ を考えてきた。特に断りがない場合、本書では $H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z})$ と略記する。

一方、オイラー標数やベッチ数を扱うときには、係数体として有理数体 $\mathbb{Q}$ を用いることが多い。このとき得られるホモロジーを $H_n(X; \mathbb{Q})$ と書く。

整数係数ホモロジー $H_n(X; \mathbb{Z})$ は一般にはアーベル群であり、自由部分とねじれ部分を含むことがある。例えば、 $\mathbb{Z}^r$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ のような形が現れる。

これに対して、有理数係数ホモロジー $H_n(X; \mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間になる。したがって、その次元 $\dim_{\mathbb{Q}} H_n(X; \mathbb{Q})$ を考えることができる。

定義 13.1. 空間 X に対し、 $b_n(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H_n(X; \mathbb{Q})$ を X の n 次ベッチ数という。

復習：有限生成アーベル群の自由部分とねじれ部分

有限生成アーベル群 A は、

$$A \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\text{有限巡回群の直和})$$

の形に分解できる (有限生成アーベル群の構造定理)。 $\mathbb{Z}^r$ の部分を**自由部分**、有限位数の元からなる部分を**ねじれ部分**といい、 r を A の階数 ($\text{rank } A$) という。ミニ例： $A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ では自由部分が $\mathbb{Z}$ 、ねじれ部分が $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ で、 $\text{rank } A = 1$ である。係数を $\mathbb{Q}$ にするとねじれ部分は消え、ベクトル空間 $\mathbb{Q}^r$ だけが残る。本文の言葉でいえば $b_n(X) = \text{rank } H_n(X; \mathbb{Z})$ である。

有理数係数を用いる理由は、整数係数ホモロジーに含まれるねじれ部分を無視し、自由部分の階数を取り出せるからである。本書で扱う有限単体複体の範囲では、ベッチ数は整数係数ホモロジーの自由部分の階数を表している。

例えば $H_1(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ であるから $H_1(T^2; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^2$ であり、 $b_1(T^2) = 2$ である。

一方、 $H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であるが、これはねじれ部分だけからなる。有理数係数にするとねじれ部分は消えるため、 $H_1(\mathbb{RP}^2; \mathbb{Q}) = 0$ である。したがって $b_1(\mathbb{RP}^2) = 0$ となる。

なぜ $\mathbb{Q}$ を用いるのか

有理数係数を用いると、ホモロジー群はベクトル空間になる。そのため、次元を用いて穴の数を数えることができる。

ただし、 $\mathbb{Q}$ 係数ホモロジーは、整数係数ホモロジーのすべての情報を保つわけではない。特に、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のようなねじれ部分は、 $\mathbb{Q}$ 係数では見えなくなる。

したがって、ベッチ数は重要な不変量であるが、整数係数ホモロジー群よりも情報は少ない。

13.4 ベッチ数の例

ベッチ数の読み方

ベッチ数 b_n は, n 次元ホモロジー群の自由部分のランクである。直感的には, n 次元の独立な穴の個数を数えている。

たとえば, 連結な空間では $b_0 = 1$ である。円周では 1 次元の穴が一つあるので $b_1 = 1$ である。トーラスでは独立な 1 次元ループが二つあるので $b_1 = 2$, さらに閉じた向き付け可能な面としての 2 次元基本類があるので $b_2 = 1$ である。

円周

円周 S^1 では $H_0(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. したがって $H_0(S^1; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$, $H_1(S^1; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$. よって $b_0(S^1) = 1$, $b_1(S^1) = 1$.

球面

n 次元球面 S^n では

$$H_k(S^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, n), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。したがって

$$b_k(S^n) = \begin{cases} 1 & (k = 0, n), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

である。

特に S^2 では $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

トーラス

トーラス T^2 では $H_0(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2(T^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. したがって $b_0(T^2) = 1$, $b_1(T^2) = 2$, $b_2(T^2) = 1$.

クラインの壺

クラインの壺 $\mathcal{K}$ では

$$H_0(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, H_1(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, H_2(\mathcal{K}; \mathbb{Z}) = 0.$$

したがって, 有理数係数ではねじれ部分が消えて $H_1(\mathcal{K}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$. よって $b_0(\mathcal{K}) = 1$, $b_1(\mathcal{K}) = 1$, $b_2(\mathcal{K}) = 0$.

13.5 オイラー標数とオイラー・ポアンカレの定理

有限単体的複体 K に対して, f_n を n 単体の個数とする。このとき

$$\chi(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n f_n$$

を K のオイラー標数という。例えば, 三角形分割された球面では $\chi(S^2) = f_0 - f_1 + f_2$ である。

定理 13.2 (オイラー・ポアンカレの定理). 有限単体的複体 K に対して,

$$\chi(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n(K) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \dim_{\mathbb{Q}} H_n(K; \mathbb{Q})$$

が成り立つ。

この定理により, 単体の個数から定義したオイラー標数はホモロジー群だけで決まり, したがって位相的不変量である。

復習：階数・退化次数の定理

次節の証明では, 線形代数の次の事実を使う。有限次元ベクトル空間の間の線形写像 $\varphi: V \rightarrow W$ に対して,

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$$

が成り立つ (階数・退化次数の定理)。ミニ例: $\varphi: \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, y + z)$ では $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{Q}^2$ (次元 2), $\operatorname{Ker} \varphi = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{Q}\}$ (次元 1) であり, 確かに $3 = 1 + 2$ である。証明ではこれを境界写像 ∂_n に適用する。

13.6 オイラー・ポアンカレの定理の証明

ここでは, 係数を $\mathbb{Q}$ にして考える。すると各鎖群 $C_n(K; \mathbb{Q})$ は有限次元ベクトル空間である。

また $\dim_{\mathbb{Q}} C_n(K; \mathbb{Q}) = f_n$ である。

境界写像を $\partial_n: C_n(K; \mathbb{Q}) \rightarrow C_{n-1}(K; \mathbb{Q})$ とする。

サイクル群とバウンダリ群を $Z_n = \operatorname{Ker} \partial_n$, $B_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ と書く。

このとき $H_n(K; \mathbb{Q}) = Z_n/B_n$ であるから $b_n(K) = \dim Z_n - \dim B_n$ である。

一方, 線形代数の階数・退化次数の関係より, $\dim C_n = \dim \operatorname{Ker} \partial_n + \dim \operatorname{Im} \partial_n$ である。すなわち $f_n = \dim Z_n + \dim B_{n-1}$ 。

ここで交代和をとると,

$$\sum_n (-1)^n f_n = \sum_n (-1)^n \dim Z_n + \sum_n (-1)^n \dim B_{n-1}.$$

第二項の添字をずらすと

$$\sum_n (-1)^n \dim B_{n-1} = - \sum_n (-1)^n \dim B_n.$$

したがって

$$\sum_n (-1)^n f_n = \sum_n (-1)^n (\dim Z_n - \dim B_n).$$

右辺は $\sum_n (-1)^n b_n(K)$ である。

よって $\chi(K) = \sum_n (-1)^n b_n(K)$ が得られる。

証明のスケッチ

オイラー・ポアンカレの定理の本質は、鎖群の階数の交代和とホモロジー群の階数の交代和が一致することである。

途中に現れるバウンダリ群の次元が、交代和の中で打ち消し合うためである。

具体例：円周でオイラー・ポアンカレの定理を確かめる

円周 S^1 を三角形の周として三角形分割する。頂点 v_0, v_1, v_2 と辺 $[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_0, v_2]$ があるので $f_0 = 3, f_1 = 3$ であり、 $\chi(S^1) = 3 - 3 = 0$ である。一方、 $\mathbb{Q}$ 係数で $\dim C_1 = 3$ であり、 ∂_1 の像は $v_1 - v_0, v_2 - v_1$ で張られるので $\dim B_0 = 2$ 、したがって $\dim Z_1 = \dim C_1 - \dim B_0 = 3 - 2 = 1$ である。また $\dim Z_0 = \dim C_0 = 3$ 、 ∂_2 は存在しないので $\dim B_1 = 0$ である。よって $b_0 = \dim Z_0 - \dim B_0 = 3 - 2 = 1$ 、 $b_1 = \dim Z_1 - \dim B_1 = 1 - 0 = 1$ となり、 $b_0 - b_1 = 1 - 1 = 0 = \chi(S^1)$ が確かめられる。

13.7 例：閉曲面のオイラー標数

向き付け可能な種数 g の閉曲面を Σ_g と書く。

第 12 章で計算したように、

$$H_0(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}, H_2(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

したがって $b_0 = 1, b_1 = 2g, b_2 = 1$ 。よって $\chi(\Sigma_g) = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$ 。

特に $\chi(S^2) = 2, \chi(T^2) = 0, \chi(\Sigma_2) = -2$ 。

例：トーラス

トーラスでは $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1$ 。したがって $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0$ 。これは、正方形 1 枚に辺の同一視を入れて得られる CW 分割の計算 $1 - 2 + 1 = 0$ と一致する。

例：クラインの壺

クラインの壺では $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 0$ 。したがって $\chi(K) = 1 - 1 + 0 = 0$ 。トーラスとクラインの壺はどちらもオイラー標数は 0 である。しかし、ホモロジー群は $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}, H_2(K) = 0$ で異なる。したがって、オイラー標数だけでは両者を区別できない。

13.8 ホモロジー群による空間の識別

直観：不変量で空間を区別する手順

2つの空間 X, Y を区別したいときは、 $H_0, H_1, H_2, \dots$ を次数ごとに比べ、どこか1つの次数で群として同型でなければ「同相ではない」と結論できる。比べるときは群の同型類を見ることが大切で、例えば $\mathbb{Z}^2$ と $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は、階数は違うしねじれの有無も違うので同型ではない。巻末付録「主要な空間の不変量一覧」の表は、この比較を行うための一覧表として使える。ただし、すべての不変量が一致しても同相とは限らないことに注意する(本節末の注意を参照)。

ホモロジー群は位相的不変量である。したがって、2つの空間のホモロジー群が異なれば、それらは同相ではない。

S^2 と T^2

球面では $H_1(S^2) = 0$ である。一方、トーラスでは $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ である。したがって S^2 と T^2 は同相ではない。

T^2 とクラインの壺

トーラスでは $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$ である。一方、クラインの壺では $H_2(K) = 0$ である。したがって T^2 と K は同相ではない。

また、 $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ に対し、 $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることから区別できる。

S^2 と $\mathbb{RP}^2$

球面では $H_1(S^2) = 0$ 。射影平面では $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 。したがって S^2 と $\mathbb{RP}^2$ は同相ではない。

不変量の限界

ホモロジー群が異なれば、空間は同相ではない。しかし、ホモロジー群が同じでも、同相であるとは限らない。

不変量は空間を区別するための道具であるが、すべてを完全に分類できるとは限らない。

13.9 写像度

写像度の直感

写像度は、向き付けられた閉多様体が写像によって何回巻き付くかを表す整数である。円周から円周への写像 $z \mapsto z^m$ では、写像度は m である。球面から球面への写像でも、同様に基本類が何倍に送られるかを測る。

ホモロジーで書くと、写像 $f: M \rightarrow N$ が最上次元ホモロジーに誘導する写像

$$f_*: H_n(M) \rightarrow H_n(N)$$

が、生成元を何倍に送るかが写像度である。したがって、写像度は幾何学的な巻き付き回数を、ホモロジー群上の整数倍として表したものといえる。

次に、ホモロジー群を使って写像を調べる。

n 次元球面の n 次ホモロジー群は $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ である。

したがって、連続写像 $f: S^n \rightarrow S^n$ は、誘導準同型 $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ を与える。

これは $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ の準同型である。したがって、ある整数 d が存在して、 $f_*(1) = d$ と書ける。

定義 13.3. 連続写像 $f: S^n \rightarrow S^n$ に対し、誘導準同型 $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ が整数 d 倍写像であるとき、この整数 d を f の**写像度**といい、 $\deg(f) = d$ と書く。

直感的には、写像度は S^n が自分自身に何回巻き付けられているかを表す整数である。

本書での写像度

写像度は、一般には同じ次元の向き付け可能閉多様体の間の写像に対して定義できる。ただし、本書ではホモロジー群の応用を最小限の範囲で扱うため、球面の自己写像 $S^n \rightarrow S^n$ に限定して定義する。この場合、 $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ であるため、写像度は誘導準同型が生成元を何倍に送るかとして直接読める。

13.10 写像度の例

恒等写像

恒等写像 $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$ は、ホモロジー群上でも恒等写像を誘導する。したがって $\deg(\text{id}) = 1$ 。

定値写像

定値写像 $c: S^n \rightarrow S^n$ は、 S^n 全体を 1 点に潰す写像である。この写像は n 次元の基本サイクルを 1 点に潰すので、 $c_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ は零写像である。したがって $\deg(c) = 0$ 。

S^1 上の写像 $z \mapsto z^m$

複素数平面で $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ と見る。

写像 $f: S^1 \rightarrow S^1$, $f(z) = z^m$ を考える。これは円周を m 回巻き付ける写像である。

したがって、基本 1-サイクルは m 倍に送られ、 $f_*: H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1)$ は $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $1 \mapsto m$ である。よって $\deg(f) = m$ 。

特に、 $z \mapsto z^2$ は写像度 2, $z \mapsto z^{-1}$ は写像度 -1 である。

具体例： $z \mapsto z^2$ を径数表示で見る

円周を $z = e^{2\pi it}$ ($0 \leq t \leq 1$) と径数表示する。 t が 0 から 1 まで動くとき、 z は円周を 1 周する。これが基本 1-サイクル (生成元) を 1 回たどることに対応する。一方、 $f(z) = z^2$ では $f(e^{2\pi it}) = e^{4\pi it}$ であるから、 t が 0 から 1 まで動く間に像は円周を 2 周する。つまり、生成元を 1 回たどるサイクルが、生成元を 2 回たどるサイクルに送られる。これが $f_*(1) = 2$ 、すなわち $\deg(f) = 2$ の意味である。一般の $z \mapsto z^m$ でも同じ計算で $\deg = m$ が読み取れる。

反射写像

球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ で、1 つの座標を反転する写像 $r(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ を考える。この写像は向きを反転するので $\deg(r) = -1$ である。

対蹠写像

対蹠写像 $A : S^n \rightarrow S^n$, $A(x) = -x$ を考える。これは $\mathbb{R}^{n+1}$ のすべての座標を反転する写像である。

その写像度は $\deg(A) = (-1)^{n+1}$ である。

例えば S^1 では対蹠写像は回転に相当するので $\deg(A) = 1$ 。一方、 S^2 では $\deg(A) = -1$ 。

具体例：対蹠写像の写像度の計算

対蹠写像は反射写像の合成として書ける。 r_k を第 k 座標だけを反転する反射写像とすると、

$$A = r_0 \circ r_1 \circ \cdots \circ r_n$$

であり、各 r_k の写像度は -1 である。次節で示す合成公式 $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$ を使えば、座標は全部で $n+1$ 個あるから

$$\deg(A) = (-1)^{n+1}$$

が得られる。実際、 S^1 では $\deg(A) = (-1)^2 = 1$ (対蹠写像は 180° 回転で恒等写像とホモトピック)、 S^2 では $\deg(A) = (-1)^3 = -1$ となり、本文の値と一致する。

13.11 写像度の基本性質

命題 13.4. 連続写像 $f : S^n \rightarrow S^n$, $g : S^n \rightarrow S^n$ に対して、 $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$ が成り立つ。

Proof. ホモロジーの関手性より $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ である。

もし f_* が $\deg(f)$ 倍写像であり、 g_* が $\deg(g)$ 倍写像であれば、合成 $g_* \circ f_*$ は $\deg(g) \deg(f)$ 倍写像である。したがって $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$ である。□

復習：誘導準同型の関手性

「関手性」とは、次の 2 つの性質のことである。

- $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_n(X)}$ (恒等写像は恒等準同型を誘導する)。
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ (合成写像の誘導準同型は誘導準同型の合成)。

つまり「写像の合成」と「準同型の合成」が対応する、という約束である。ミニ例： S^1 上で $f(z) = z^2$, $g(z) = z^3$ とすると $(g \circ f)(z) = z^6$ であり、写像度でも $6 = 3 \times 2 = \deg(g) \deg(f)$ と対応している。

命題 13.5. ホモトピックな写像 $f, g : S^n \rightarrow S^n$ は同じ写像度を持つ。すなわち、 $f \simeq g$ ならば $\deg(f) = \deg(g)$ である。

Proof. ホモトピックな写像は、ホモロジー群上で同じ誘導準同型を与える。したがって $f_* = g_*$ である。よって $\deg(f) = \deg(g)$ となる。 $\square$

写像度の意味

写像度はホモトピー不変量である。したがって、写像度が異なる 2 つの写像はホモトピックではない。

例えば $S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z$ と $S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^2$ は、写像度がそれぞれ 1 と 2 なのでホモトピックではない。

13.12 代数学の基本定理への応用

写像度は、複素解析の基本定理にも位相的な証明を与える。

定理 13.6 (代数学の基本定理). 定数でない複素係数多項式

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n \neq 0, n \geq 1)$$

は、複素平面上に少なくとも一つ零点を持つ。

Proof. p が零点を持たないと仮定する。十分大きな $R > 0$ に対し、

$$\varphi_R : S_R \longrightarrow S^1, \quad \varphi_R(z) = \frac{p(z)}{|p(z)|}, \quad S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$$

を考える。

零点がないという仮定により、 φ_R は閉円板 $D_R = \{z \mid |z| \leq R\}$ 上へ同じ式で延長できる。包含写像 $i : S_R \hookrightarrow D_R$ を通じて誘導準同型は

$$(\varphi_R)_* : H_1(S_R) \xrightarrow{i_*} H_1(D_R) \longrightarrow H_1(S^1)$$

と分解する。 $H_1(D_R) = 0$ であるから $(\varphi_R)_* = 0$ 、したがって

$$\deg(\varphi_R) = 0.$$

他方, $p(z) = a_n z^n + q(z)$ と書くと, R を十分大きく取ること

$$|q(z)| < |a_n z^n| \quad (|z| = R)$$

とできる。このとき

$$H(z, t) = \frac{a_n z^n + tq(z)}{|a_n z^n + tq(z)|} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

の分母は零にならない。よって φ_R は

$$z \mapsto \frac{a_n z^n}{|a_n z^n|}$$

とホモトピックである。この写像は, 円周を原点のまわりに n 回巻き付けるので, その写像度は n である。したがって

$$\deg(\varphi_R) = n.$$

これは $n \geq 1$ と $\deg(\varphi_R) = 0$ に矛盾する。ゆえに p は零点を持つ。 $\square$

巻き付き数を検出するホモロジー

この証明では, 大きな円周上での多項式の値の巻き付き数を $H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ が検出している。零点がなければその写像は円板へ延長でき, 巻き付き数は 0 になるはずである。一方, 最高次項は円周を n 回巻き付ける。この矛盾が零点の存在を導く。

具体例：多項式 $z^2 + z$ で証明の評価を確かめる

$p(z) = z^2 + z$ に対して, $a_n z^n = z^2$, $q(z) = z$ である。 $|z| = R$ のとき $|q(z)| = R$, $|z^2| = R^2$ であるから, $R = 2$ ととれば $|q(z)| = 2 < 4 = |z^2|$ となり, 証明中の評価が満たされる。このとき $|z^2 + tq(z)| \geq |z^2| - t|q(z)| \geq 4 - 2 = 2 > 0$ なので, ホモトピー $H(z, t)$ の分母は消えない。したがって φ_R は $z \mapsto z^2/|z^2|$ とホモトピックで, 写像度は 2 である。実際 $p(z) = z(z+1)$ の零点 $0, -1$ は 2 個とも円板 $|z| < 2$ の中にある。

13.13 写像度による応用

写像度を用いると, 球面上の写像について多くのことが分かる。

定値写像と恒等写像はホモトピックでない

恒等写像の写像度は 1 であり, 定値写像の写像度は 0 である。したがって, 恒等写像と定値写像はホモトピックではない。

これは, 球面 S^n が一点に可縮でないことを意味している。

写像度が ± 1 の写像

写像 $f: S^n \rightarrow S^n$ の写像度が $\deg(f) = \pm 1$ であるとき, f_* は $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ 上の同型である。

したがって, 写像度 ± 1 の写像は, 最高次ホモロジーに関しては情報を失わない写像である。

13.14 レトラクションとホモロジー

第1章で定義したように, $A \subset X$ へのレトラクション $r: X \rightarrow A$ は包含写像 $i: A \hookrightarrow X$ に対して $r \circ i = \text{id}_A$ を満たす。したがってホモロジー群上でも

$$r_* \circ i_* = \text{id}_{H_n(A)}$$

となる。この単純な関係が, 円板から境界球面へのレトラクションの非存在を導く。

復習：レトラクション

部分空間 $A \subset X$ に対し, 連続写像 $r: X \rightarrow A$ がレトラクションであるとは, A 上では何もしないこと, すなわち $r(a) = a$ ($a \in A$) が成り立つことをいう (包含写像 $i: A \hookrightarrow X$ を使えば $r \circ i = \text{id}_A$)。ミニ例: $r(x) = x/|x|$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ から S^{n-1} へのレトラクションである。実際, $|x| = 1$ ならば $r(x) = x$ である。これから問題にするのは「 D^n から S^{n-1} へのレトラクションはあるか」であり, 答えは「存在しない」である。

13.15 円板から境界球面へのレトラクションは存在しない

証明の考え方 (直感)

もしレトラクション $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ が存在すれば, 包含写像 $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ との合成は

$$r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$$

となる。

これをホモロジーに移すと,

$$r_* \circ i_* = (\text{id}_{S^{n-1}})_*$$

が成り立つはずである。しかし, D^n は可縮なので

$$H_{n-1}(D^n) = 0$$

であり, i_* は $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ から 0 への写像になる。その後に r_* を合成しても 0 にしかない。これは恒等写像にはなり得ない。この矛盾により, レトラクションは存在しない。

命題 13.7. $n \geq 1$ に対し, 円板 D^n から境界球面 $S^{n-1} = \partial D^n$ へのレトラクションは存在しない。

Proof. レトラクション $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ が存在すると仮定する。

包含写像を $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ とする。

レトラクションの条件より $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ である。

ホモロジー群をとると, 関手性により $r_* \circ i_* = (\text{id}_{S^{n-1}})_*$ となる。

すなわち $r_* \circ i_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$ 。

ところが $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ である一方, $H_{n-1}(D^n) = 0$ である。

したがって $i_*: H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(D^n)$ は $\mathbb{Z} \rightarrow 0$ であり, 零写像である。すると $r_* \circ i_*$ も零

写像になる。

しかし、これは $\text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})}$ と等しくなければならない。 $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像は零写像ではないので矛盾する。

したがって、そのようなレトラクションは存在しない。 □

直感

円板 D^n は穴を持たない。一方、境界球面 S^{n-1} は $(n-1)$ 次元の穴を持つ。
もし円板全体を境界球面へ連続的に潰し、境界を固定できるなら、円板の中に境界球面の穴がそのまま残ることになる。これはホモロジー群と矛盾する。

13.16 Brouwer の不動点定理

定理 13.8 (Brouwer の不動点定理). 任意の連続写像 $f : D^n \rightarrow D^n$ は不動点を持つ。すなわち、ある $x \in D^n$ が存在して $f(x) = x$ となる。

Proof. 不動点が存在しないと仮定する。つまり、すべての $x \in D^n$ について $f(x) \neq x$ であるとする。

このとき、各点 x に対し、 $f(x)$ から x を通る半直線を考える。この半直線は境界球面 $S^{n-1} = \partial D^n$ とただ 1 点で交わる。その交点を $r(x)$ と定める。

不動点がないと仮定し、
 $f(x)$ から x の方向へ境界まで伸ばす

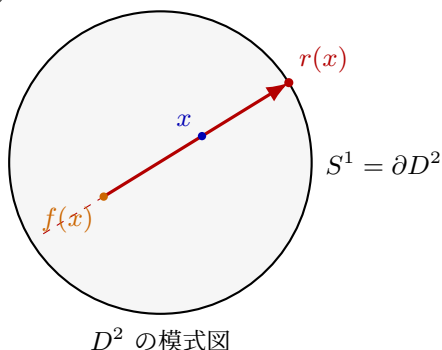


図 13.1 Brouwer の不動点定理の証明で用いるレトラクションの構成。図は $n = 2$ の場合を表している。

すると $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ という連続写像が得られる。

ここで r が連続であることも確認しておく。不動点がないという仮定により、 $x - f(x)$ は 0 ベクトルにならない。 $r(x)$ は半直線

$$f(x) + t(x - f(x)) \quad (t \geq 0)$$

が境界球面 ∂D^n と交わる点である。交点を与える正の係数 t は、方程式

$$\|f(x) + t(x - f(x))\| = 1$$

の解として x と $f(x)$ に連続的に依存する。したがって、 $r(x)$ も x の連続関数である。

さらに、もし $x \in S^{n-1}$ であれば、半直線はすでに境界上の点 x を通るので $r(x) = x$ となる。

したがって $r|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ である。

つまり $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ はレトラクションである。

しかし、前節で示したように、円板 D^n から境界球面 S^{n-1} へのレトラクションは存在しない。これは矛盾である。したがって、任意の連続写像 $f: D^n \rightarrow D^n$ は不動点を持つ。 $\square$

直観：Brouwer の定理の背理法の構造

証明の骨格は次の一本道である。

- 仮定：すべての x で $f(x) \neq x$ (不動点がない)。
- 構成： $f(x)$ から x へ向かう半直線で $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ を作る。境界上では $r(x) = x$ 。
- 帰結： r は D^n から S^{n-1} へのレトラクションである。
- 矛盾：前節の命題より、そのようなレトラクションは存在しない。

図式でまとめると

不動点なし $\implies r$ が構成できる $\implies r_* \circ i_* = \text{id}_{H_{n-1}(S^{n-1})} \implies \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ が恒等写像

となり、最後が不可能なので仮定が否定される。位相的な議論 (半直線の構成) と代数的な議論 (ホモロジー) の分担を意識して読み直すとよい。

不動点定理の意味

Brouwer の不動点定理は、解析や幾何に現れる定理であるが、その背後にはホモロジー群による障害がある。

もし不動点がなければ、円板をその境界にレトラクトできてしまう。しかし、ホモロジー群はそのようなレトラクションの存在を禁止する。

13.17 低次元の場合の直感

$n = 1$ の場合

$D^1 = [-1, 1]$ である。Brouwer の不動点定理は、任意の連続写像 $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ が不動点を持つことを主張する。

これは中間値の定理からも分かる。実際、 $g(x) = f(x) - x$ とおくと、 $g(-1) = f(-1) + 1 \geq 0$ 、 $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ である。したがって、ある x で $g(x) = 0$ となり、 $f(x) = x$ である。

$n = 2$ の場合

D^2 は円板であり、境界は S^1 である。

Brouwer の不動点定理は、円板から円板への任意の連続写像が不動点を持つことを主張する。

もし不動点がなければ、円板内の各点 x に対して、 $f(x)$ から x を通る半直線を境界まで伸ばすことで、円板を境界円周に潰すレトラクション $D^2 \rightarrow S^1$ ができてしまう。

しかし $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ 、 $H_1(D^2) = 0$ なので、そのようなレトラクションは存在しない。

写像度から見た同じ矛盾

もし $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ がレトラクションなら、 $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ の写像度は 1 である。一方、この写像は可縮な D^n を経由するため、最上次ホモロジー上では零写像となり、写像度は 0 である。したがって、同じ非存在性を写像度の言葉でも表せる。

13.18 まとめ

この章では、ホモロジー群の応用を学んだ。

- ベッチ数は $b_n(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H_n(X; \mathbb{Q})$ で定義される。
- オイラー・ポアンカレの定理により、 $\chi(X) = \sum_n (-1)^n b_n(X)$ が成り立つ。
- オイラー標数はホモロジー群から計算できる位相的不変量である。
- ホモロジー群が異なれば、空間は同相ではない。
- 球面の自己写像には写像度 $\deg(f)$ が定義される。
- 写像度は合成で積になり、ホモトピーで不変である。
- 大きな円周上の写像度を調べることで、代数学の基本定理を証明できる。
- 円板から境界球面へのレトラクションは存在しない。
- Brouwer の不動点定理は、この非存在性から導かれる。

ホモロジー群は、空間の穴を数えるだけでなく、写像の性質や不動点の存在を導く場面でも用いられる。

学習の指針：不変量の使い分けの整理

この章に現れた不変量は、情報量の順に並べると次のようになる。

- オイラー標数 χ : 1 個の整数。最も粗い。 T^2 とクラインの壺はともに $\chi = 0$ で区別できない。
- ベッチ数 $b_0, b_1, b_2, \dots$: 各次数の自由部分の階数。 χ はベッチ数の交代和として復元できる。
- 整数係数ホモロジー群 $H_n(X; \mathbb{Z})$: ねじれ部分まで含む。 $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ と $H_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を区別できる。

問題を解くときは、まず粗い不変量 (χ やベッチ数) で試し、区別できなければねじれ部分を含む整数係数ホモロジー群を比べる、という順で考えると見通しがよい。

練習問題 (標準)

1. 空間 $S^2 \vee S^1$ のベッチ数 b_0, b_1, b_2 を求めよ。
2. 種数 3 の向き付け可能閉曲面 Σ_3 のベッチ数とオイラー標数を求めよ。
3. 向き付け不可能閉曲面 N_3 の整数係数ホモロジー群から、ベッチ数 b_0, b_1, b_2 を求めよ。
4. $S^2 \vee S^2$ のオイラー標数を、ベッチ数から計算せよ。
5. $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ のオイラー標数を求めよ。

6. 写像

$$f : S^1 \rightarrow S^1, \quad f(z) = z^m$$

の写像度を求めよ。

7. 写像

$$g : S^2 \rightarrow S^2$$

の写像度が 2 であるとする。 $g_* : H_2(S^2) \rightarrow H_2(S^2)$ はどのような準同型か答えよ。

8. 写像度が異なる 2 つの写像 $S^n \rightarrow S^n$ はホモトピックでない。この理由を説明せよ。

9. 定数でない複素係数多項式 $p(z)$ が零点を持たないと仮定する。 $z \mapsto p(z)/|p(z)|$ を大きな円周に制限した写像について、円板への延長から得られる写像度と、最高次項から得られる写像度をそれぞれ答えよ。

10. S^{n-1} が D^n のレトラクトであったと仮定すると、ホモロジー群上でどのような矛盾が生じるか説明せよ。

11. Brouwer の不動点定理を $n = 1$ の場合で考え、閉区間 $[0, 1]$ からそれ自身への連続写像が不動点を持つことを、直感的に説明せよ。

練習問題 (発展)

1. 対蹠写像 $A : S^n \rightarrow S^n$, $A(x) = -x$ の写像度が $(-1)^{n+1}$ であることを、低次元の例から確かめよ。
2. S^n 上の写像 f が恒等写像にホモトピックであるなら、 $\deg(f) = 1$ である。この対偶を用いて、写像度がホモトピーを区別する例を作れ。
3. Brouwer の不動点定理の証明で、円板から境界球面へのレトラクションの非存在がどこで使われているかを説明せよ。

付録：群論と線形代数の要点

この付録では、本書で繰り返し用いる代数的な言葉を簡単に整理する。詳細な群論・線形代数の復習ではなく、本文を読むための最小限の確認である。

商群

正規部分群 $N \triangleleft G$ に対して、 G の元を N の違いを無視して同一視した群を商群 G/N という。 $g, h \in G$ が同じ剰余類を定めるとは、 $g^{-1}h \in N$ となることである。群の表示

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

は、自由群 $F(a_1, \dots, a_n)$ を、関係式 $r_i = 1$ を満たすように正規閉包で割った商群として理解できる。

自由アーベル群

$\mathbb{Z}^n$ は n 個の基底 $e_1, \dots, e_n$ を持つ自由アーベル群である。任意の元は

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

の形に一意的に書ける。鎖群 $C_n(K)$ は、向き付き n 単体を基底とする自由アーベル群である。したがって、単体的ホモロジーの計算では、鎖群を $\mathbb{Z}^n$ と見なし、境界写像を整数行列として扱うことが多い。

行列の階数と核・像

準同型 $\varphi: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$ は、定義域と値域の基底を固定すれば整数行列 A で表される。行列の第 j 列は、定義域の第 j 基底ベクトルの像の座標である。したがって

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in \mathbb{Z}^m \mid Ax = 0\}, \quad \text{Im } \varphi = \mathbb{Z}\text{-span}\{A \text{ の列ベクトル}\}$$

である。 $\mathbb{Q}$ 上の行基本変形は階数や有理解空間を調べるには便利だが、 $\mathbb{Z}$ と $2\mathbb{Z}$ の違いを失う。整数係数の商群やねじれまで求めるには、行列の整数格子としての像を保ち、必要に応じて Smith 標準形を用いる。ホモロジー群

$$H_n = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

は、まず核の整数基底を求め、次に像の生成元をその基底で表して商を取ることで計算する。

群，準同型，核，像

群 G は，積，単位元，逆元を持つ集合である。写像 $f : G \rightarrow H$ が群準同型であるとは，任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

が成り立つことをいう。核と像は

$$\text{Ker } f = \{g \in G \mid f(g) = 1\}, \quad \text{Im } f = \{f(g) \mid g \in G\}$$

である。

自由群と群の表示

生成元 $a_1, \dots, a_n$ からなる自由群は， a_i と a_i^{-1} を並べた語を，隣り合う $a_i a_i^{-1}$ や $a_i^{-1} a_i$ の消去だけで同一視して得られる群である。群の表示

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$$

は，自由群から出発して，関係式 $r_1 = 1, \dots, r_m = 1$ を課した群を表す。

可換化

群 G の可換化 G^{ab} は，すべての交換子

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$$

を単位元とみなして得られるアーベル群である。閉曲面や結び目補空間では，第一ホモロジー群 H_1 が基本群の可換化として現れる。

完全系列の読み方

アーベル群と準同型の列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が B で完全であるとは，

$$\text{Im } f = \text{Ker } g$$

が成り立つことをいう。つまり， B に入ってくる像と， B から出ていく写像で 0 になる部分が一致する。

階数と商群

自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ の階数は n である。たとえば

$$\mathbb{Z}^2 / \langle (p, q) \rangle$$

を調べるときは、整数行列の行基本変形・列基本変形、すなわち Smith 標準形を用いる。特に $d = \gcd(p, q)$ とすると

$$\mathbb{Z}^2 / \langle (p, q) \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

である。

付録：主要な空間の不変量一覧

空間 X	$\pi_1(X)$	$H_0(X)$	$H_1(X)$	$H_2(X)$
点 $*$	1	$\mathbb{Z}$	0	0
S^1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
S^2	1	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
T^2	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{RP}^2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0
$\mathcal{K}$	$\langle a, b \mid aba^{-1}b = 1 \rangle$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0
Σ_g	$\langle a_i, b_i \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^{2g}$	$\mathbb{Z}$

付録：練習問題のヒント

ここでは、詳しい模範解答を見る前に自分で考えるための出発点だけを示す。解答を書くときは、定義、写像、核と像、または関係式を明示するとよい。

第1章

同相かどうかは逆写像と連続性を確認する。変形レトラクトでは、縮め先の点に変形中ずっと固定されることを確かめる。

第2章

道の積では、前半と後半のパラメータを分ける。円周の基本群では、ループの巻き数が整数になることを用いる。

第3章

ファン・カンペンの定理では、 $U, V, U \cap V$ の弧状連結性を先に確認する。くさび和では $U, V, U \cap V$ が何に変形レトラクトするかを見て、2 セルを貼る問題では、貼り付け写像が 1 骨格の基本群のどの語を表すかを読む。

第4章

連結グラフでは極大木を一点に縮める。残った辺の本数が自由群の階数になる。

第5章

多角形表示の境界語を読む。可換化では交換子が消えるので、第一ホモロジー群の計算につながる。

第6章

ヴィルティンガー表示では、各交点で上側の弧による共役関係を書く。可換化すると、結び目の場合はすべてのメリディアンが同じ生成元になる。

第7章

単体的複体かどうかは、「面をすべて含むか」「共通部分が共通の面か」を確認する。

第8章

境界作用素の計算では、頂点を一つずつ取り除き、符号 $(-1)^i$ を付ける。 $\partial^2 = 0$ は同じ面が逆符号で二度出ることに対応する。

第9章

各鎖群の基底と順序を固定し、各基底単体の境界を列に並べて境界行列を作る。 $D_n x = 0$ の整数解から $Z_n = \text{Ker } D_n$ を求め、 D_{n+1} の列の整数係数一次結合から $B_n = \text{Im } D_{n+1}$ を求める。最後に $H_n = Z_n / B_n$ を計算する。グラフでは H_1 の階数は、独立な輪の数を数えて検算できる。

第10章

完全系列では各場所で $\text{Im} = \text{Ker}$ を使う。短完全系列では、左の写像は単射、右の写像は全射

である。

第 11 章

マイヤー・ヴィートリス完全系列では、まず $K_1, K_2, K_1 \cap K_2$ のホモロジーを調べる。特に $H_0(K_1 \cap K_2) \rightarrow H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ の核を計算し、どの段階で $\text{Im} = \text{Ker}$ を使っているかを明示する。

第 12 章

2 セルの貼り付け語は、第一ホモロジーでは可換化された関係式になる。曲面では向き付け可能性と H_2 の有無を対応させる。

第 13 章

ベッチ数はホモロジー群の自由部分の階数である。写像度は $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ 上の掛け算として読む。

付録：記号一覧表

記号	意味	主な登場箇所
$X \approx Y$	X と Y が同相であること	第 1 章
$X \simeq Y$	X と Y がホモトピー同値であること	第 1 章
id_X	X 上の恒等写像	第 1 章
$\pi_1(X, x_0)$	基点 x_0 をもつ空間 X の基本群	第 2 章
$[\alpha]$	道またはループ α のホモトピー類	第 2 章
$\alpha * \beta$	道の積。まず α , 次に β を進む	第 2 章
$\bar{\alpha}$	道 α を逆向きにたどる道	第 2 章
$\bigvee$	くさび和。複数の空間を基点で貼り合わせた空間	第 3 章
G^{ab}	群 G の可換化	第 5 章, 第 12 章
$C_n(K)$	単体的複体 K の n 次鎖群	第 8 章
∂_n	n 次境界作用素 $C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$	第 8 章
$Z_n(K)$	n 次サイクル群。 $\text{Ker } \partial_n$	第 8 章, 第 9 章
$B_n(K)$	n 次バウンダリ群。 $\text{Im } \partial_{n+1}$	第 8 章, 第 9 章
$H_n(K)$	n 次ホモロジー群。 $Z_n(K)/B_n(K)$	第 8 章, 第 9 章
$H_n(X; \mathbb{Z})$	整数係数ホモロジー群。通常は $H_n(X)$ と略記する	第 8 章
$H_n(X; \mathbb{Q})$	有理数係数ホモロジー群	第 13 章
$\tilde{H}_n(X)$	簡約ホモロジー群	第 11 章
$\chi(X)$	オイラー標数	第 9 章, 第 13 章
$b_n(X)$	第 n ベッチ数	第 13 章
$\deg f$	球面から球面への写像 f の写像度	第 13 章
$K_1 \cap K_2$	マイヤー・ヴィートリス完全系列で現れる二つの部分複体の交わり	第 11 章
ι_*	マイヤー・ヴィートリス系列で、交わりから二つの部分への包含の差で定まる写像	第 11 章
j_*	二つの部分のホモロジー類を全体空間の中で足し合わせる写像	第 11 章
δ	マイヤー・ヴィートリス完全系列のつなぎ準同型	第 11 章

付録：主要用語索引

ホモトピー

第 1 章，第 2 章。連続写像を連続的に変形する考え方。

変形レトラクト

第 1 章。空間を部分空間へ縮めるホモトピーで，縮め先を固定するもの。

基本群 第 2 章。基点付きループのホモトピー類から作る群。

ファン・カンペンの定理

第 3 章。空間を二つの部分に分けて基本群を計算する定理。

自由群 第 3 章，第 4 章。余分な関係式を持たない生成元から作られる群。

普遍被覆 第 4 章，第 5 章。被覆空間の中で単連結なもの。

ヴィルティンガー表示

第 6 章。結び目図式から結び目群の表示を得る方法。

単体的複体

第 7 章。点，線分，三角形などの単体を面に沿って貼り合わせた複体。

鎖群 第 8 章。単体を形式的に足し合わせたアーベル群。

境界作用素

第 8 章。単体にその境界を対応させる準同型。

ホモロジー群

第 8 章，第 9 章。サイクルをバウンダリで割って得られる群。

完全系列 第 10 章。各場所で像と核が一致する準同型の列。

マイヤー・ヴィートリス完全系列

第 11 章，第 12 章。空間を二つの部分に分けてホモロジー群を計算する系列。

境界作用素の符号規約

第 8 章。 $\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ とする約束。

優先ロンジチュード

第 6 章，第 12 章。ザイフェルト曲面に沿って結び目を境界トラス上へ押し出して得るロンジチュード。

マイヤー・ヴィートリスの符号規約

第 11 章。 H_0 側の写像を差として読み，生成元を $(1, -1)$ に送る約束。

ベッチ数 第 13 章。ホモロジー群の自由部分の階数。

写像度 第 13 章。球面から球面への写像が最上次元ホモロジーに誘導する整数。

付録：さらに学びたい読者へ

各章の内容は、次のような発展的話題につながっている。第 1 章から第 2 章のホモトピーと基本群は、被覆空間論とホモトピー群へつながる。第 3 章から第 5 章のファン・カンペンの定理と曲面の基本群は、曲面の分類定理や群表示の幾何学へつながる。第 6 章の結び目群は、結び目不変量、アレキサンダー多項式、周辺構造、3 次元多様体論へつながる。第 7 章から第 10 章の単体的ホモロジーは、特異ホモロジー、ホモロジー代数、コホモロジーへつながる。第 11 章から第 13 章の完全系列、写像度、不動点定理は、代数的位相幾何の標準的な応用の入口である。

参考文献

- [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [2] 松本幸夫, トポロジー入門, 岩波書店.
- [3] 田村一郎, トポロジー, 岩波全書.
- [4] 阿原一志, 計算で身につくトポロジー, 共立出版, 2013.
- [5] 村杉邦男, 結び目理論とその応用, 日本評論社, 1993.
- [6] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer.

第 II 部

模範解答編

はじめに

本編は、各章末の「練習問題（標準）」と「練習問題（発展）」に対する模範解答である。問題文は本文側にまとめ、ここでは解答と考え方に集中する。計算結果だけでなく、どの定義・定理を用いるか、どの核と像を調べるかをできるだけ明示した。

位相幾何学では、最終的な答えだけでなく、なぜ変形レトラクトできるのか、どの写像がどの準同型を誘導するのか、完全系列のどの部分を用いているのかを確認することが重要である。

読み方

各解答では、必要に応じて「考え方」「計算」「結論」を分けている。ホモロジー計算では、 $Z_n = \text{Ker } \partial_n$, $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$, $H_n = Z_n/B_n$ の順に確認すると見通しがよい。

本文参照と記号の約束

ファン・カンペンの定理（第3章）、ヴィルティンガー表示（第6章）、境界作用素（第8章）、マイヤー・ヴィートリス完全系列（第11章）、写像度（第13章）は、必要に応じて本文を参照する。境界作用素の符号は

$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

とし、マイヤー・ヴィートリス完全系列の H_0 側では $(1, -1)$ の規約を用いる。

第 1 章

位相空間とホモトピー

1.1 練習問題（標準）

問題 1

解答

一点 $\{3\}$ への写像 $r: [2, 5] \rightarrow \{3\}$ を $r(x) = 3$ と定める。また包含写像を $i: \{3\} \hookrightarrow [2, 5]$ とする。すると $r \circ i = \text{id}_{\{3\}}$ である。一方, $i \circ r: [2, 5] \rightarrow [2, 5]$ は定値写像 $x \mapsto 3$ である。これが恒等写像にホモトピックであることを示せばよい。

ホモトピーを $H: [2, 5] \times [0, 1] \rightarrow [2, 5]$, $H(x, t) = (1 - t)x + 3t$ と定める。 $t = 0$ では $H(x, 0) = x$, $t = 1$ では $H(x, 1) = 3$ である。さらに $[2, 5]$ は凸集合なので, $(1 - t)x + 3t$ は常に $[2, 5]$ に属する。したがって $\text{id}_{[2, 5]} \simeq i \circ r$ であり, $[2, 5]$ と $\{3\}$ はホモトピー同値である。

問題 2

解答

中央の直線を $A = \mathbb{R} \times \{1/2\}$ とおく。レトラクション $r: B \rightarrow A$ を $r(x, s) = (x, 1/2)$ と定める。これは A 上では恒等写像である。

変形レトラクションを与えるホモトピーは $H((x, s), t) = (x, (1 - t)s + t/2)$ とすればよい。 $t = 0$ で $H((x, s), 0) = (x, s)$, $t = 1$ で $H((x, s), 1) = (x, 1/2) = r(x, s)$ である。また $(x, 1/2) \in A$ に対しては $H((x, 1/2), t) = (x, 1/2)$ となり, 中央の直線上の点は変形中ずっと固定される。よって B は A に変形レトラクトする。

問題 3

解答

写像 $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \tan(\pi x/2)$ と定める。 x が -1 から 1 に動くと、 $\pi x/2$ は $-\pi/2$ から $\pi/2$ に動く。この区間で $\tan$ は連続かつ狭義単調増加で、値域は全実数である。したがって f は連続な全単射である。

逆写像は $g : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $g(y) = \frac{2}{\pi} \arctan y$ である。 $\arctan$ は連続なので g も連続である。よって f は同相写像であり、 $(-1, 1) \approx \mathbb{R}$ である。

問題 4

解答

$D^2 \setminus \{0\}$ は単位円周 S^1 と同じホモトピー型を持つ。実際、点 $x \neq 0$ を半径方向に $x/\|x\|$ へ押し出す写像 $r(x) = x/\|x\|$ を考える。これは $D^2 \setminus \{0\}$ から S^1 へのレトラクションである。ホモトピーは $H(x, t) = ((1-t) + t/\|x\|)x$ と書ける。 $t=0$ では $H(x, 0) = x$, $t=1$ では $H(x, 1) = x/\|x\|$ である。また $x \in S^1$ なら $H(x, t) = x$ なので、 S^1 上の点は固定される。したがって $D^2 \setminus \{0\}$ は S^1 に変形レトラクトする。

問題 5

解答

可縮であるとは、恒等写像が定値写像にホモトピックであることをいう。 $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $H(x, t) = (1-t)x$ と定める。これは連続で、 $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = 0$ である。したがって $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ は原点への定値写像にホモトピックである。よって $\mathbb{R}^n$ は可縮である。

問題 6

解答

区間 $[0, 1]$ は連結である。連続写像は連結集合を連結集合に写すので、 $r([0, 1])$ は $\{0, 1\}$ の連結部分集合でなければならない。しかし、 $\{0, 1\}$ の連結部分集合は一点集合 $\{0\}$ または $\{1\}$ だけであり、 $\{0, 1\}$ 全体は連結でない。

もし $r(0) = 0$ かつ $r(1) = 1$ なら、像は $\{0, 1\}$ 全体を含むので連結でない。これは連続性に反する。したがってそのような r は存在しない。

$\{0, 1\}$ が $[0, 1]$ のレトラクトなら、 $r|_{\{0, 1\}} = \text{id}$ を満たす連続写像 $r : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ が存在し、特に $r(0) = 0, r(1) = 1$ となる。これは上の結論に反するので、 $\{0, 1\}$ は $[0, 1]$ のレトラクトではない。

問題 7

解答

X が A に変形レトラクトするなら、包含 $A \hookrightarrow X$ とレトラクション $X \rightarrow A$ により $X \simeq A$ である。同様に、 A が B に変形レトラクトするなら $A \simeq B$ である。ホモトピー同値は推移的なので、 $X \simeq A \simeq B$ から $X \simeq B$ が従う。

直感的には、まず X を A まで縮め、次に A を B まで縮めれば、 X 全体を B と同じホモトピー型に置き換えられる。

問題 8

解答

この円環領域は円周 S^1 と同じホモトピー型を持つ。例えば半径 3 の円周へ半径方向に変形レトラクトできる。写像 $r(x) = 3x/\|x\|$ を考えると、すべての点を同じ方向の半径 3 の点へ移す。ホモトピーは $H(x, t) = (1-t)x + t3x/\|x\|$ で与えられる。各時刻で半径は 2 以上 5 以下に保たれるので、円環内にとどまる。したがって円環領域のホモトピー型は S^1 である。

問題 9

解答

同相は空間の局所的な形まで保つ強い同一視である。 S^1 は 1 次元的な曲線であるのに対し、開円環は 2 次元的な広がりを持つ領域である。局所的に見ると、 S^1 の点の近くは开区間のようにあり、開円環の点の近くは平面の開円板のようである。厳密には、第 1 章の本文で円柱と円周を区別したのと同じ議論が使える。すなわち、 S^1 からは相異なる 2 点を除くと必ず非連結になるが、開円環からはどの 2 点を除いても連結のままである。同相写像は「2 点を除いた空間」どうしの同相写像も誘導するので、両者は同相ではない。

一方、ホモトピー型では、厚みのある部分を縮めることを許す。開円環は半径方向に縮めて円周に変形レトラクトできるので、穴の情報だけを見れば S^1 と同じである。よって両者は同相ではないが、ホモトピー同値である。

問題 10

解答

変形レトラクトはホモトピー同値を与えるので、ホモトピー不変量は保たれる。本書で扱う代表的な不変量として、基本群、ホモロジー群、ベッチ数、オイラー標数などがある。例えば穴のあいた平面は S^1 に変形レトラクトするので、基本群もホモロジー群も S^1 と同じになる。ただし同相型は保たれるとは限らない。開円環と円周はホモトピー同値であるが同相ではない。

したがって、変形レトラクトは「穴に関する情報」を保ち、厚みや余分な可縮部分は取り除く操作と考えるとよい。

1.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

平面から 2 つの穴を開けた空間は、2 つの穴の周りを回る 2 本の独立なループを持つ。余分な 2 次元の厚みを縮めると、2 つの円周を 1 点で貼り合わせた空間 $S^1 \vee S^1$ に変形レトラクトすると考えられる。これは 8 の字空間とも呼ばれる。

直感的には、各穴の周りに 1 本ずつ円周を残し、その 2 つの円周を外側の通路で 1 点に集める。この空間の基本群は自由群 F_2 であり、2 つの穴に対応する 2 つの生成元を持つ。

発展問題 2

解答

$S^1 \vee S^1$ には、左の円周を 1 周するループと右の円周を 1 周するループがある。それぞれは空間の中で一点に縮めることができない。実際、この空間の基本群は自由群 F_2 であり、自明群ではない。

もし $S^1 \vee S^1$ が一点に可縮なら、基本群は一点空間の基本群と同型になり、自明群になるはずである。しかし実際には非自明なループが残るので、可縮ではない。

発展問題 3

解答

球面から 2 点を除くと、円柱または開円環と同相な空間が得られる。例えば北極と南極を除けば、残りは $S^1 \times \mathbb{R}$ のように見える。これは半径方向に縮めることで円周 S^1 に変形レトラクトする。

したがって S^2 から 2 点を除いた空間のホモトピー型は S^1 である。

発展問題 4

解答

例として、円板 D^2 と一点空間 $\{0\}$ を考える。円板は中心点に変形レトラクトするので、 D^2 と $\{0\}$ はホモトピー同値である。しかし円板は無限個の点を持ち、内部と境界を持つ 2 次元的な空間である。一点空間とは同相ではない。

したがって、変形レトラクトやホモトピー同値は、同相より粗い同一視である。

第 2 章

基本群の定義

2.1 練習問題（標準）

問題 1

解答

α_m は円周を m 回まわるループ, α_n は円周を n 回まわるループである。道の積 $\alpha_m * \alpha_n$ は, 前半の時間で α_m を進み, 後半の時間で α_n を進むループである。したがって全体として円周を $m + n$ 回まわる。

被覆写像 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(s) = e^{2\pi i s}$ を用いると, α_m の持ち上げは $\tilde{\alpha}_m(t) = mt$, α_n の持ち上げは nt である。積の持ち上げは終点が $m + n$ になるので, 巻き数は $m + n$ である。したがって $[\alpha_m][\alpha_n] = [\alpha_{m+n}]$ に対応する。

問題 2

解答

逆ループは $\bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(1 - t)$ である。計算すると $\bar{\alpha}_n(t) = e^{2\pi i n(1-t)} = e^{-2\pi i n t}$ である。ここで $e^{2\pi i n} = 1$ を用いた。これは円周を反対向きに n 回まわるループである。したがって巻き数は $-n$ である。基本群では, このことは $[\bar{\alpha}_n] = [\alpha_n]^{-1}$ に対応する。

問題 3

解答

$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ では, 生成元は円周を正の向きに 1 周するループ $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$ で表される。このループに f を合成すると, $f(\alpha(t)) = (e^{2\pi i t})^k = e^{2\pi i k t}$ である。これは円周を k 回まわるループである。したがって f_* は生成元 1 を k に送る。よって $\mathbb{Z}$ 上の写像としては $n \mapsto kn$ である。

問題 4

解答

開円環 A は、例えば半径 2 の円周 $S^1_2 = \{\|x\| = 2\}$ に半径方向に変形レトラクトする。したがって $A \simeq S^1$ である。基本群はホモトピー同値で保たれるから、 $\pi_1(A) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である。生成元は円環の穴の周りを 1 周するループである。

問題 5

解答

このループは中心 $(2, 0)$ 、半径 1 の円である。原点からの距離を見ると、最も原点に近い点は $(1, 0)$ であり、原点は円の外側にある。したがってこの円は原点を囲まない。

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の基本群では、原点の周りを何回まわるかが巻き数である。このループは原点を囲まないで、巻き数は 0 である。実際、原点を避けたままループを一点へ縮めることができる。

問題 6

解答

η は原点の周りを正の向きに 1 周するループであり、 $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を表す。 η^3 はこのループを 3 回続けて進むことを表すので、巻き数は 3 である。したがって基本群の元としては $3 \in \mathbb{Z}$ に対応する。

問題 7

解答

X が弧状連結なので、 x_0 と x_1 を結ぶ道 γ が存在する。この道を用いると、基点変更同型 $\Phi_\gamma: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ が得られる。具体的には、 x_0 を基点とするループを、 x_1 から x_0 へ行き、そのループを回り、また x_1 へ戻るループに変換する。

Φ_γ は群同型である。したがって $\pi_1(X, x_0)$ が自明群なら、同型な $\pi_1(X, x_1)$ も自明群である。

問題 8

解答

$x_0 \in X$ を基点とし, α を x_0 を基点とするループとする。合成写像 $g \circ f$ が誘導する準同型では, $[\alpha]$ は $[(g \circ f) \circ \alpha]$ に送られる。一方, まず f_* を作用させると $[\alpha]$ は $[f \circ \alpha]$ になる。次に g_* を作用させると, これは $[g \circ (f \circ \alpha)]$ になる。

写像の合成の結合律により $(g \circ f) \circ \alpha = g \circ (f \circ \alpha)$ である。したがって各ループのホモトピー類に対して同じ値を与えるので, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ である。

問題 9

解答

凸集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ と基点 $x_0 \in C$ を考える。 x_0 を基点とする任意のループ $\alpha : [0, 1] \rightarrow C$ に対し, $H(s, t) = (1-t)\alpha(s) + tx_0$ と定める。凸性により, $\alpha(s)$ と x_0 を結ぶ線分はすべて C に含まれるので, H は C 内のホモトピーである。

$t = 0$ で $H(s, 0) = \alpha(s)$, $t = 1$ で $H(s, 1) = x_0$ となる。また $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ なので, $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ である。したがって基点を固定したまま α は定値ループに縮む。よって凸集合の基本群は自明である。

問題 10

解答

$\mathbb{R}^2$ は可縮であるため, 任意のループは一点に縮められる。したがって $\pi_1(\mathbb{R}^2) \cong 1$ である。一方, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ では原点が取り除かれているため, 原点の周りを 1 周するループを原点を避けたまま一点に縮めることができない。このループの巻き数が整数として記録され, $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ となる。

この違いは, 基本群が「ループが穴の周りに巻き付いているか」を検出する不変量であることを示している。

2.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

標準的なループ $e^{2\pi i n t}$ は巻き数 n を表す。ここでは $e^{6\pi i t} = e^{2\pi i(3)t}$ なので、円周を正の向きに 3 回まわる。したがって $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ の元としては 3 に対応する。

発展問題 2

解答

複素共役写像 $c(z) = \bar{z}$ は、円周の向きを反転する写像である。生成ループ $\alpha(t) = e^{2\pi i t}$ に合成すると、 $c(\alpha(t)) = e^{-2\pi i t}$ となる。これは巻き数 -1 のループである。したがって誘導準同型は $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto -n$ である。

発展問題 3

解答

可縮空間は一点空間とホモトピー同値である。基本群はホモトピー不変量なので、 $\pi_1(X)$ は一点空間の基本群と同型である。一点空間には定値ループしかないため、基本群は自明である。したがって任意の基点で $\pi_1(X)$ は自明になる。

また直接的には、可縮性を与えるホモトピーにより、任意のループを一点に縮めることができる。

発展問題 4

解答

球面 S^2 は単連結なので $\pi_1(S^2) = 1$ （自明群）である。つまり、 S^2 上の任意のループは一点に縮められる。しかし S^2 は可縮ではない。なぜなら、 S^2 には 2 次元の穴を表す非自明なホモロジー $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ があるからである。

基本群は 1 次元のループだけを見ている。不変量としては重要だが、高次元の穴をすべて検出するわけではない。したがって $\pi_1(X)$ が自明でも、空間が可縮とは限らない。

第 3 章

ファン・カンペンの定理（導入）

3.1 練習問題（標準）

問題 1

解答

2つの円周のくさび和 $S^1 \vee S^1$ の基本群は自由群 F_2 である。ここに同じ一点から出て戻らない 1 本の弧を付け加えても、その弧は可縮な枝であり、空間全体は元のくさび和に変形レトラクトする。したがって基本群は変わらず、 $\pi_1 \cong F_2$ である。

問題 2

解答

n 個の円周のブーケの基本群は階数 n の自由群である。これは各円周を 1 周するループが独立な生成元になるためである。したがって 4 個の円周のブーケについては $\pi_1(\bigvee_{i=1}^4 S^1) \cong F_4 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ である。

問題 3

解答

関係式 $ab = 1$ から $b = a^{-1}$ が従う。したがって生成元 b は a で表せるので、群は 1 つの生成元 a だけで生成される。他に a に関する関係式はない。よってこの群は無限巡回群 $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 4

解答

関係式 $a = b^2$ により, a は b だけで表される。したがって生成元 a を消去できる。残る関係式は $b^3 = 1$ である。よって群は $\langle b \mid b^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。

問題 5

解答

U と V が単連結なので, $\pi_1(U) = 1$, $\pi_1(V) = 1$ (自明群) である。ファン・カンペンの定理では, $\pi_1(X)$ は $\pi_1(U)$ と $\pi_1(V)$ を, 交わりから来る関係で貼り合わせた群として得られる。しかし両方が自明群なので, 貼り合わせても自明群である。したがって $\pi_1(X)$ は自明であり, X は単連結である。

問題 6

解答

1 つの円周の基本群は $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ である。2 セルを境界が円周を 3 回まわる写像で貼ると, 基本群に関係式 $a^3 = 1$ が加わる。したがって基本群は $\langle a \mid a^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。

問題 7

解答

2 つの円周のブーケの基本群は $F_2 = \langle a, b \rangle$ である。2 セルを境界語 ab に沿って貼ると, 関係式 $ab = 1$ が加わる。したがって基本群は $\langle a, b \mid ab = 1 \rangle$ である。問題 3 と同じく, $b = a^{-1}$ となるので, この群は $\mathbb{Z}$ と同型である。

問題 8

解答

融合積では, A から G への準同型と A から H への準同型が与えられている。 A の元 a は, G の中では $i(a)$ として, H の中では $j(a)$ として見える。融合積 $G *_A H$ では, これらを同じ元とみなす。つまり関係式 $i(a) = j(a)$ をすべての $a \in A$ について加える。

位相的には, $U \cap V$ のループを U 側から見たものと V 側から見たものは, 和空間 $U \cup V$ の中では同じループを表す, という意味である。

問題 9

解答

ファン・カンペンの定理では、基点を $U \cap V$ に取る必要がある。交わりが空なら共通の基点を選べず、 U 側と V 側の基本群を同じ基点で比較できない。また、交わりから来る準同型も定義できない。

さらに、交わりが空の場合、 $U \cup V$ は少なくとも 2 つの離れた部分に分かれる可能性があり、単純な群の貼り合わせとして基本群を計算する状況ではなくなる。

問題 10

解答

2 セルは円板であり、その境界は円周である。境界円周を既存の空間の中のループに沿って貼り付けると、そのループは新しく貼った円板の内部を使って縮められるようになる。つまり、そのループは基本群で単位元になる。

したがって、貼り付け写像が表す語を w とすると、基本群に関係式 $w = 1$ を加えることになる。これが 2 セルの貼り付けが群表示において関係式として現れる理由である。

3.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

2 つの円周のブーケの基本群は自由群 $\langle a, b \rangle$ である。境界語 a^2b^{-3} に沿って 2 セルを貼ると、この語が単位元になる。したがって基本群は $\langle a, b \mid a^2b^{-3} = 1 \rangle$ 、または同値に $\langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle$ である。

発展問題 2

解答

可換化では x と y を可換な元として扱う。加法記法に直すと、関係式 $x^2 = y^3$ は $2x = 3y$ 、すなわち $2x - 3y = 0$ である。したがって可換化は $\mathbb{Z}^2 / \langle (2, -3) \rangle$ である。 $(2, -3)$ は成分の最大公約数が 1 なので、この商は自由アーベル群 $\mathbb{Z}$ になる。よって可換化は $\mathbb{Z}$ である。

発展問題 3

解答

$X \vee Y$ を X 側と Y 側の近傍で覆うと、交わりは基点近くの可縮な部分と考えられる。したがって交わりの基本群は自明である。ファン・カンペンの定理では、 $\pi_1(X \vee Y)$ は $\pi_1(X)$ と $\pi_1(Y)$ の自由積を、交わりから来る関係で割ったものになる。しかし交わりの基本群が自明なので、追加される関係はない。よって $\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$ である。

第 4 章

基本群の計算 (1) グラフと自由群

4.1 練習問題 (標準)

問題 1

解答

K_4 は 4 個の頂点の任意の 2 点を辺で結んだグラフである。頂点数は $V = 4$, 辺数は $E = \binom{4}{2} = 6$ である。連結グラフの基本群は階数 $E - V + 1$ の自由群なので, 階数は $6 - 4 + 1 = 3$ である。したがって $\pi_1(K_4) \cong F_3$ である。

問題 2

解答

各三角形は 1 つの独立な閉路を持つ。2 つの三角形が 1 つの頂点でだけ接しているので, グラフ全体は 2 つの円周のブーケと同じホモトピー型である。したがって基本群の階数は 2 であり, $\pi_1 \cong F_2$ である。

数で確認してもよい。頂点数は共有頂点を 1 つと数えるので $3 + 3 - 1 = 5$, 辺数は $3 + 3 = 6$ である。階数は $E - V + 1 = 6 - 5 + 1 = 2$ である。

問題 3

解答

連結グラフの基本群は階数 $E - V + 1$ の自由群である。ここでは $E - V + 1 = 11 - 8 + 1 = 4$ である。したがって $\pi_1(G) \cong F_4$ である。

問題 4

解答

木は閉路を持たないので基本群は自明である。木に辺を 1 本付け加えると、その辺は極大木に含まれない 1 本の辺になり、独立な閉路を 1 つ作る。3 本付け加えると独立な閉路が 3 つ増える。したがって基本群の階数は 3 であり、 $\pi_1 \cong F_3$ である。

問題 5

解答

このグラフは頂点数 $V = 4$ 、辺数 $E = 5$ である。連結グラフなので、極大木は $V - 1 = 3$ 本の辺を持つ。残る辺は $E - (V - 1) = 5 - 3 = 2$ 本である。したがって自由生成元の個数は 2 で、基本群は F_2 である。幾何的には、対角線によって正方形が 2 つの三角形に分かれ、2 つの独立な閉路が現れる。

問題 6

解答

2 つの円周をつなぐ線分は可縮な通路であり、閉路を増やさない。このグラフは、通路を縮めると 2 つの円周のブーケ $S^1 \vee S^1$ になる。したがって基本群は階数 2 の自由群 F_2 である。

問題 7

解答

基本群は基点から出発して基点に戻るループを考える。ループは連続写像 $[0, 1] \rightarrow G$ であり、区間 $[0, 1]$ は連結なので、その像は基点を含む連結成分の中にとどまる。したがって他の連結成分は基本群に影響しない。

例えば、 G が 1 つの円周と 1 本の線分の直和であるとする。基点を円周成分に取れば基本群は $\mathbb{Z}$ である。基点を線分成分に取ればその成分は可縮なので基本群は自明である。

問題 8

解答

連結グラフにおける $E - V + 1$ は独立な閉路の数であり、基本群の自由群としての階数である。 $E - V + 1 = 0$ なら独立な閉路がない。連結で閉路を持たないグラフは木である。逆に、木は頂点数 V に対して辺数 $E = V - 1$ を持つので、 $E - V + 1 = 0$ である。したがって連結グラフでは、 $E - V + 1 = 0$ であることと木であることは同値である。

問題 9

解答

極大木は可縮であり、グラフの中で閉路を含まない部分である。極大木を 1 点に潰す操作は、グラフのホモトピー型を変えず、閉路を表す辺だけを残す操作と考えられる。潰した後の空間は、極大木に含まれなかった辺の本数だけの円周のブーケになる。
この操作により独立な閉路の数は変わらないので、基本群も同型である。したがって極大木を潰すことは、基本群計算を簡単にするためのホモトピー同値な置き換えである。

問題 10

解答

連結グラフ G の極大木 T を選ぶと、 T は頂点をすべて含み、辺数は $V - 1$ である。 T に含まれない辺は $E - (V - 1) = E - V + 1$ 本ある。各残りの辺を T に加えると、ちょうど 1 つの閉路ができる。これらの閉路は互いに独立な基本ループを与える。
したがって G は $E - V + 1$ 個の円周のブーケと同じホモトピー型を持ち、基本群は階数 $E - V + 1$ の自由群である。この階数が独立な閉路の数である。

4.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

次数の総和は辺数の 2 倍である。各頂点の次数が 3 で、頂点数が 10 なので、次数の総和は 30 である。したがって $2E = 30$ 、よって $E = 15$ である。連結グラフの基本群の階数は $E - V + 1 = 15 - 10 + 1 = 6$ である。したがって $\pi_1(G) \cong F_6$ である。

発展問題 2

解答

2つの連結グラフ G_1, G_2 を1点で貼り合わせると、閉路は G_1 内の閉路と G_2 内の閉路から独立に現れる。共有点は新しい閉路を作らず、単に基点として働く。したがって G_i の基本群が F_{r_i} なら、くさび和の基本群は自由積 $F_{r_1} * F_{r_2} \cong F_{r_1+r_2}$ である。よって自由群の階数は足し算になる。

発展問題 3

解答

連結グラフ G の基本群は自由群 F_{E-V+1} である。1次元のフレヴィッツの定理により、第一ホモロジー群は基本群の可換化である。自由群 F_r の可換化は自由アーベル群 $\mathbb{Z}^r$ になる。したがって $H_1(G; \mathbb{Z}) \cong F_{E-V+1}^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$ である。

第 5 章

基本群の計算 (2) 閉曲面の基本群

5.1 練習問題 (標準)

問題 1

解答

種数 g の向き付け可能閉曲面の基本群は $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$ である。ここで $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ である。したがって $g = 3$ の場合は $\pi_1(\Sigma_3) \cong \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \mid [a_1, b_1][a_2, b_2][a_3, b_3] = 1 \rangle$ である。

問題 2

解答

可換化ではすべての生成元が可換になる。そのため各交換子 $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ は自動的に 1 になる。したがって関係式 $[a_1, b_1][a_2, b_2][a_3, b_3] = 1$ は可換化では何も新しい関係を与えない。生成元は $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ の 6 個で、関係式は残らない。よって可換化は $\mathbb{Z}^6$ である。

問題 3

解答

種数 g の閉曲面では生成元が $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ の $2g$ 個ある。唯一の関係式は交換子積 $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1$ である。可換化ではすべての交換子が 1 になるので、この関係式は自動的に満たされる。したがって可換化では $2g$ 個の自由な生成元が残る。よって $\pi_1(\Sigma_g)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ である。

問題 4

解答

向き付け不可能閉曲面 N_k の標準表示は $\pi_1(N_k) \cong \langle x_1, \dots, x_k \mid x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 = 1 \rangle$ である。したがって $k = 3$ では $\pi_1(N_3) \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 1 \rangle$ である。

問題 5

解答

可換化では加法記法で考えると、関係式 $x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 1$ は $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ になる。したがって可換化は $\mathbb{Z}^3 / \langle 2(x_1 + x_2 + x_3) \rangle$ である。新しい基底を $u = x_1 + x_2 + x_3$, $v = x_2$, $w = x_3$ のように取ると、関係式は $2u = 0$ だけになる。したがって可換化は $\mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cdot u \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

問題 6

解答

種数 1 の向き付け可能閉曲面はトーラス T^2 であり、基本群の可換化は $\mathbb{Z}^2$ である。種数 2 の向き付け可能閉曲面 Σ_2 では、可換化は $\mathbb{Z}^4$ である。同相な空間は基本群が同型であり、したがってその可換化も同型でなければならない。しかし $\mathbb{Z}^2$ と $\mathbb{Z}^4$ は階数が異なるので同型でない。よって T^2 と Σ_2 は同相ではない。

問題 7

解答

種数 g で境界成分を 1 つ持つ向き付け可能曲面の基本群は自由群 F_{2g} である。境界がある場合、閉曲面で現れる 1 つの関係式が消え、自由な生成元だけが残る。したがって $g = 2$ の場合、基本群は階数 4 の自由群 F_4 である。

問題 8

解答

レンズ空間 $L(p, q)$ の基本群は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ である。 q は空間のより細かい貼り合わせ方に関係するが、基本群には p だけが現れる。したがって $L(5, 2)$ の基本群は $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ である。

問題 9

解答

閉曲面は、多角形の辺を貼り合わせることで得られる。この構成では、1 骨格は円周のブーケのようなグラフになり、最後に多角形の内部である 1 枚の 2 セルを貼り付ける。2 セルを貼ることは、その境界が表すループを基本群で自明にする操作である。

2 セルが 1 枚だけなので、基本群にはその境界語に対応する関係式が 1 つだけ加わる。これが閉曲面の標準表示に関係式が 1 つだけ現れる理由である。

問題 10

解答

レンズ空間 $L(p, q)$ の基本群は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であり、 q には依存しない。したがって、同じ p を持つ複数のレンズ空間は同じ基本群を持つ。しかしレンズ空間の同相型は一般には q にも依存する。例えば $L(p, q)$ と $L(p, q')$ が同じ基本群を持っても、同相とは限らない。このことから、基本群は重要な不変量だが、レンズ空間を完全に分類するには不十分であることが分かる。

5.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

N_k の基本群は $\langle x_1, \dots, x_k \mid x_1^2 \cdots x_k^2 = 1 \rangle$ である。可換化して加法記法で書くと、関係式は $2x_1 + \cdots + 2x_k = 0$ 、つまり $2(x_1 + \cdots + x_k) = 0$ である。 $u = x_1 + \cdots + x_k$ とし、残りに $k-1$ 個の自由な生成元を取ると、関係式は $2u = 0$ のみになる。したがって可換化は $\mathbb{Z}^{k-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。1 次元フレヴィッツの定理により、これは $H_1(N_k; \mathbb{Z})$ と同型である。

発展問題 2

解答

閉曲面 Σ_g は、 $2g$ 個の生成元を持つ 1 骨格に 1 枚の 2 セルを貼って得られる。この 2 セルの貼り付けが、閉曲面の基本群の唯一の関係式を生む。開円板を 1 つ取り除くと、この 2 セルの内部を取り除いた曲面になり、境界を持つ曲面になる。この場合、貼り付けによる関係式は消え、1 骨格の自由群が残る。したがって基本群は $2g$ 個の生成元を持つ自由群 F_{2g} である。

発展問題 3

解答

向き付け可能閉曲面では、貼り付け語は交換子の積 $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$ になる。これは各ハンドルが互いに反対向きに現れる辺の組で記述されることを反映している。

一方、向き付け不可能閉曲面では、貼り付け語は $x_1^2 \cdots x_k^2$ になる。これは同じ向きに辺が貼り合わされる部分があり、向きが全体として整合しないことを反映している。可換化すると、向き付け可能な場合は交換子が消えて自由部分だけが残るのに対し、向き付け不可能な場合は $2(x_1 + \cdots + x_k) = 0$ という関係から $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のねじれが現れる。

第 6 章

結び目群

6.1 練習問題（標準）

問題 1

解答

可換化では加法記法を用いると、関係式 $x^2 = y^5$ は $2x = 5y$, すなわち $2x - 5y = 0$ となる。したがって可換化は $\mathbb{Z}^2 / \langle (2, -5) \rangle$ である。2 と 5 は互いに素なので、この商は $\mathbb{Z}$ である。よって可換化は $\mathbb{Z}$ である。

問題 2

解答

可換化では x, y を可換な生成元と見て、加法記法で $2x = 3y$ を得る。したがって $G^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^2 / \langle (2, -3) \rangle$ である。 $(2, -3)$ の成分の最大公約数は 1 なので、この 1 本の関係式は自由アーベル群の階数を 1 つ下げるだけで、ねじれは生じない。よって $G^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 3

解答

可換化ではすべての生成元が可換になる。関係式 $b = aca^{-1}$ は、可換化すると $b = a + c - a = c$ となる。また $c = bab^{-1}$ は $c = b + a - b = a$ となる。したがって $b = c$ かつ $c = a$ であり、 $a = b = c$ である。これは結び目群の可換化が 1 つのメリディアンで生成されることと一致している。

問題 4

解答

ヴィルティンガー表示では、結び目図式を交点で区切った各弧に 1 つの生成元を割り当てる。したがって生成元の数、図式の弧の数と等しい。各生成元は、その弧の近くを小さく一周するメリディアンを表している。交点ごとに、これらの生成元の間関係式が 1 つずつ得られる。

問題 5

解答

交点でのヴィルティンガー関係式は、典型的には $z = xyx^{-1}$ の形をしている。ここで x は上を通る弧に対応し、 y, z は下を通る弧の交点前後に対応する。可換化では $xyx^{-1} = y$ となる。したがって関係式は $z = y$ となり、下側の弧の前後の生成元を同一視するだけになる。結び目図式全体でこれを繰り返すと、すべての弧の生成元が同じになる。

問題 6

解答

結び目 K の管状近傍を考えると、その境界はトーラスである。メリディアンとは、この管状近傍の各断面円に対応する曲線であり、結び目を横方向に一回取り囲む小さな円である。幾何的には、結び目の近くで結び目に垂直な小さな円を取ると、その円は結び目と絡み数 ± 1 を持つ。これが結び目補空間の基本群や第一ホモロジー群の基本的な生成元になる。

問題 7

解答

境界トーラス上には 2 種類の基本的な方向がある。1 つは結び目を横方向に一回まわるメリディアンであり、もう 1 つは結び目に沿って進む方向である。優先ロンジチュードは後者に対応し、結び目の向きに沿って境界トーラス上を一周する曲線である。

メリディアンは結び目と絡み数 ± 1 を持つが、優先ロンジチュードは結び目との絡み数が 0 になるように選ばれる（本文の定義では、ザイフェルト曲面に沿って押し出した曲線である）。このため、メリディアンとロンジチュードは境界トーラス上の異なる基本曲線である。

問題 8

解答

可換化は群の非可換な情報を捨てて、すべての元が可換になるようにしたものである。任意の結び目では結び目群の可換化は $\mathbb{Z}$ になるため、可換化だけでは結び目を区別できない。しかし結び目群そのものは非可換な関係式を含んでおり、交点の構造や結び目補空間の情報をより多く保持している。

したがって、可換化が同じでも、非可換群としての結び目群が異なれば、結び目を区別できる可能性がある。

問題 9

解答

可換化とは、群にすべての交換関係 $xy = yx$ を追加して得られる最大のアーベル商である。したがって可換化を計算するときは、まずすべての生成元が可換であると仮定してよい。その上で、元の群表示にある関係式をアーベル群の関係式として読み直す。

例えば $z = xyx^{-1}$ は、可換化では $z = y$ になる。このように、非可換な共役関係は可換化では線形な関係に単純化される。

問題 10

解答

結び目そのものは S^1 と同相であり、位相空間として見るだけではすべて同じである。しかし、結び目が S^3 の中にどのように埋め込まれているかは、補空間 $S^3 \setminus K$ に反映される。

補空間の基本群や境界トラス上のメリディアン・ロンジチュードを調べることで、結び目の絡まり方を代数的に記録できる。したがって結び目を区別するには、結び目そのものではなく補空間を調べることが有効である。

6.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

可換化では加法記法により、関係式は $px = qy$ ，すなわち $px - qy = 0$ となる。したがって可換化は $\mathbb{Z}^2 / \langle (p, -q) \rangle$ である。 $\gcd(p, q) = 1$ なので、ベズーの等式により $(p, -q)$ は $\mathbb{Z}^2$ の原始元である。原始元 1 本で割ると、商は階数 1 の自由アーベル群になる。したがって可換化は $\mathbb{Z}$ である。

発展問題 2

解答

結び目が 1 成分の場合、補空間の第一ホモロジー群はメリディアン 1 つで生成され、 $\mathbb{Z}$ になる。2 成分リンクでは、各成分の周りにそれぞれメリディアンがある。通常、これら 2 つのメリディアンは独立な 1 次元ホモロジー類を与える。したがって第一ホモロジー群は $\mathbb{Z}^2$ になると予想できる。

ただし、より精密な情報は成分どうしの絡み数などに現れるが、第一ホモロジーの自由部分としては成分数に対応する生成元が現れる。実際には、 n 成分リンクの補空間の第一ホモロジー群は、マイヤー・ヴィートリス完全系列による帰納的議論や Alexander 双対を用いると、絡み数に関係なく $\mathbb{Z}^n$ になることが証明できる。この時点ではまだその証明道具を学んでいないため、ここではメリディアンの個数から予想する問題として扱っている。

発展問題 3

解答

結び目群だけを見ると、群の抽象同型として同じであっても、どの元が幾何的にメリディアンやロンジチュードに対応するかを忘れてしまう。しかし結び目補空間の境界トーラスには、メリディアンとロンジチュードという幾何的に意味のある曲線がある。

これらの元を群の中で指定すると、補空間の境界構造を含めた情報を保持できる。そのため、単なる抽象群よりも、結び目の埋め込み方をより精密に区別できる。

第 7 章

単体的複体と多面体

7.1 小練習：単体の面

小練習 1

解答

4 単体は 5 個の頂点 $v_0, \dots, v_4$ を持つ。辺は 5 個の頂点から 2 個を選ぶことで決まるので、辺の本数は $\binom{5}{2} = 10$ 本である。

小練習 2

解答

3 単体は四面体であり、頂点は 4 個ある。境界の 2 単体は、4 個の頂点のうち 3 個を選ぶことで得られる三角形である。したがって個数は $\binom{4}{3} = 4$ 個である。

小練習 3

解答

3 単体を張るためには、4 点のアフィン独立でなければならない。しかし 4 点のうち 3 点が同一直線上にあると、その 3 点だけで既にアフィン従属である。したがって 4 点全体もアフィン独立にはならない。よってそれらは正の体積を持つ四面体、すなわち 3 単体を張らない。

7.2 練習問題（標準）

問題 1

解答

2次元単体複体のオイラー標数は $\chi = V - E + F$ で計算できる。ここでは $V = 6$, $E = 12$, $F = 8$ なので, $\chi = 6 - 12 + 8 = 2$ である。正八面体の境界は球面 S^2 と同相なので, $\chi(S^2) = 2$ と一致する。

問題 2

解答

抽象的単体複体であるためには, ある集合が含まれているなら, そのすべての部分集合も含まれていなければならない。 K には辺 $\{0, 1\}$ と $\{1, 2\}$ が含まれている。その部分集合である $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}$ はすべて K に含まれている。また頂点の部分集合も当然含まれている。したがって K は抽象的単体複体である。

問題 3

解答

L には $\{0, 1, 2\}$ が含まれている。抽象的単体複体なら, そのすべての部分集合, 例えば $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$ も含まれていなければならない。しかし L にはこれらの2点集合が含まれていない。したがって L は抽象的単体複体ではない。

問題 4

解答

頂点は五角形の5頂点と中心点の合計で6個である。辺は五角形の周の5本と, 中心から各頂点へ向かう5本の合計で10本である。2単体は中心点と五角形の各辺で作られる三角形で, 5枚ある。したがって $V = 6$, $E = 10$, $F = 5$ である。オイラー標数は $6 - 10 + 5 = 1$ で, 円板の値と一致する。

問題 5

解答

単体的複体では、2つの単体の共通部分は両方に共通する面でなければならない。辺の途中の一点で交わる場合、その点はある辺の頂点ではないため、共通部分が面として扱えない。そこで交点を新しい頂点として加え、その点で辺を分割する。必要なら三角形もその新しい頂点を含む小さい三角形に細分する。すると交わりは頂点や辺といった共通の面になり、単体的複体として扱えるようになる。

問題 6

解答

2 単体の境界公式は $\partial[v_i, v_j, v_k] = [v_j, v_k] - [v_i, v_k] + [v_i, v_j]$ である。したがって $\partial[v_1, v_3, v_2] = [v_3, v_2] - [v_1, v_2] + [v_1, v_3]$ である。向きをそろえて書けば $[v_3, v_2] = -[v_2, v_3]$ である。

問題 7

解答

向き付き単体では、頂点の順序が向きを表す。2つの頂点を入れ替えることは向きを反転する操作である。 $[v_0, v_2, v_1]$ は $[v_0, v_1, v_2]$ から v_1 と v_2 を入れ替えて得られるので、向きが反対になる。鎖群では反対向きの単体を負の符号で表すため、 $[v_0, v_2, v_1] = -[v_0, v_1, v_2]$ とみなす。

問題 8

解答

もとの1本の線分は頂点2個、辺1本なので、オイラー標数は $2 - 1 = 1$ である。3本の線分に細分すると、頂点は端点2個と内部の分割点2個で合計4個、辺は3本である。したがってオイラー標数は $4 - 3 = 1$ である。細分してもオイラー標数は変わらない。

問題 9

解答

同じ位相空間でも、どのように三角形分割するかは一通りではない。例えば円板は1枚の三角形としても表せるし、複数の三角形に細分しても表せる。これらは単体の数や組合せ構造は異なるが、貼り合わせて得られる多面体は同じ円板である。したがって、多面体として同じ空間を表す単体的複体は複数存在する。

問題 10

解答

ホモロジー計算では、 n 単体を基底とする鎖群 C_n と境界写像 ∂_n を調べる。単体的複体が有限なら、各鎖群は有限生成自由アーベル群になり、境界写像は整数行列で表せる。したがって、位相的な穴の問題を、核・像・商群を計算する代数の問題に置き換えられる。これが単体的複体を用いる大きな利点である。

7.3 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

五角形の周だけなので、頂点、周上の辺、空集合を含める。辺は $\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 0\}$ である。したがって抽象的単体複体は $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 0\}\}$ である。2 単体は含まれない。

発展問題 2

解答

五角形の周だけからなる複体は円周と同じホモトピー型を持つので、中心に 1 次元の穴がある。したがって $H_1 \cong \mathbb{Z}$ が現れる。一方、円板を 5 枚の三角形に分けた複体では、五角形の内部が 2 単体で埋められている。そのため周を一周するサイクルは 2 次鎖の境界となり、 H_1 は消える。つまり、周だけの複体には穴があり、円板の複体にはその穴がない。

発展問題 3

解答

四面体の境界は球面であり、細分しても位相空間としては球面のままである。局所的な細分では、例えば 1 本の辺の上に頂点を 1 つ加えると、頂点数が 1 増え、辺数も 1 増えるので $V - E + F$ は変わらない。また三角形を小三角形に分ける場合も、増える頂点・辺・面の数が組み合わさってオイラー標数を保つ。したがって細分後も $\chi = 2$ である。

発展問題 4

解答

三角形分割では、3次元多様体を四面体などの単純な部品に分ける。この分解を双対的に見ると、3単体には頂点、2単体には辺、1単体には面のような双対セルが対応する。この双対セル分解は、ハンドル分解に近い情報を持つ。つまり、単体分割は多様体を組合せ的に扱う方法であり、その双対構造を見ることで、多様体をハンドルで組み立てる見方につながる。厳密には、PL多様体の三角形分割から双対セル分解を作り、そのセルを次元ごとにまとめて厚くすることでハンドル分解が得られる、という流れで理解できる。本書の段階では直感を重視しているが、双対セル分解がハンドル分解の背後にある、という点を押さえておけば十分である。

第 8 章

単体的ホモロジー群の定義

8.1 練習問題（標準）

問題 1

解答

境界公式 $\partial[v_i, v_j, v_k] = [v_j, v_k] - [v_i, v_k] + [v_i, v_j]$ を用いる。まず $\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ である。また $\partial[v_0, v_2, v_3] = [v_2, v_3] - [v_0, v_3] + [v_0, v_2]$ である。したがって $\partial c = 2[v_1, v_2] - 2[v_0, v_2] + 2[v_0, v_1] - [v_2, v_3] + [v_0, v_3] - [v_0, v_2]$ である。同類項をまとめると、 $\partial c = 2[v_1, v_2] + 2[v_0, v_1] - 3[v_0, v_2] - [v_2, v_3] + [v_0, v_3]$ である。

問題 2

解答

1 単体の境界は $\partial[v_i, v_j] = [v_j] - [v_i]$ である。したがって $\partial c = ([v_1] - [v_0]) + ([v_2] - [v_1]) = [v_2] - [v_0]$ である。中間点 v_1 は一度終点、一度始点として現れるため打ち消し合う。

問題 3

解答

境界を計算する。 $\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$, $\partial[v_1, v_2] = [v_2] - [v_1]$, $\partial[v_0, v_2] = [v_2] - [v_0]$ である。したがって $\partial z = ([v_1] - [v_0]) + ([v_2] - [v_1]) - ([v_2] - [v_0]) = 0$ である。よって $z \in \text{Ker } \partial_1$ であり、 z は 1 サイクルである。

問題 4

解答

2 単体は 2 枚なので, $C_2 \cong \mathbb{Z}^2$ である。辺は正方形の 4 辺 $[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_3]$, $[v_0, v_3]$ と対角線 $[v_0, v_2]$ の合計 5 本である。したがって $C_1 \cong \mathbb{Z}^5$ である。頂点は v_0, v_1, v_2, v_3 の 4 個なので, $C_0 \cong \mathbb{Z}^4$ である。

問題 5

解答

境界を計算する。 $\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ である。また $\partial[v_0, v_2, v_3] = [v_2, v_3] - [v_0, v_3] + [v_0, v_2]$ である。足すと対角線 $-[v_0, v_2] + [v_0, v_2]$ が消える。よって境界は $[v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_3] - [v_0, v_3]$ である。これは正方形の外周を一周する 1 サイクルである。したがって外周サイクルは 2 次鎖の境界であり, ホモロジーでは 0 になる。

問題 6

解答

H_0 は連結成分の個数を記録する。1 本の線分は連結成分を 1 つ作り, 孤立点も別の連結成分を 1 つ作る。したがって連結成分は 2 つである。よって $H_0 \cong \mathbb{Z}^2$ である。それぞれの連結成分から 1 つずつ生成元を取ることができる。

問題 7

解答

整数係数では $\partial[v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$ であり, 符号が重要である。しかし $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数では $-1 = 1$ である。したがって $[v_1] - [v_0] = [v_1] + [v_0]$ と同じになる。このため, 向きを反転しても符号の違いが見えなくなり, 向きの区別が消える。

問題 8

解答

$B_n(K)$ は n 次バウンダリ全体であり, $B_n(K) = \text{Im } \partial_{n+1}$ である。したがって $b \in B_n(K)$ なら, ある $(n+1)$ 次鎖 c があって $b = \partial_{n+1}c$ と書ける。境界の境界は 0 なので, $\partial_n b = \partial_n \partial_{n+1}c = 0$ である。つまり $b \in \text{Ker } \partial_n = Z_n(K)$ である。よって $B_n(K) \subset Z_n(K)$ が成り立つ。

8.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

まず $\partial_2[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ である。さらに境界を取ると、 $\partial_1 \partial_2[v_0, v_1, v_2] = ([v_2] - [v_1]) - ([v_2] - [v_0]) + ([v_1] - [v_0])$ である。これを整理すると $[v_2] - [v_1] - [v_2] + [v_0] + [v_1] - [v_0] = 0$ である。したがって境界の境界は 0 である。

発展問題 2

解答

三角形の周だけからなる複体は円周と同じホモトピー型を持つ。周を一周する 1 サイクルは存在するが、それを境界とする 2 単体がないため、 $H_1 \cong \mathbb{Z}$ が残る。一方、内部を含む三角形では、周の 1 サイクルは 2 単体 $[v_0, v_1, v_2]$ の境界である。そのため周のサイクルはバウンダリとなり、 H_1 では 0 になる。したがって H_1 が消えるのは内部を含む三角形の複体である。

発展問題 3

解答

整数係数では $\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ である。 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数では $-1 = 1$ なので、負号は正号と同じになる。したがって境界式は $\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] + [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$ となる。この意味で、向きに由来する符号は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数では見えなくなる。

第 9 章

ホモロジー群の計算 (1) 定義に基づく計算

9.1 練習問題 (標準)

問題 1

解答

2 本の辺を直列につないだ複体は, 1 つの区間を細分したものと同一であり, 可縮である。したがって高次のホモロジーは消え, 連結成分は 1 つである。よって $H_1 = 0$, $H_0 \cong \mathbb{Z}$ である。定義から見ても, 1 サイクルは閉じたループを作らないため存在しない。

問題 2

解答

四角形の周だけからなるグラフは円周 S^1 と同じホモトピー型を持つ。連結なので $H_0 \cong \mathbb{Z}$ である。また周を一周する 1 サイクルが 1 つあり, それを境界とする 2 単体は存在しない。したがって $H_1 \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 3

解答

この複体は円板の三角形分割であり, 可縮である。したがって $H_1 = 0$ である。鎖の言葉では, 外周を一周する 1 サイクルは, 2 枚の三角形の和の境界になっている。つまり, 穴を表しているように見えるサイクルは 2 次元の面で埋められているため, ホモロジーでは 0 になる。

問題 4

解答

θ グラフは 2 つの頂点を 3 本の辺で結んだ連結グラフである。頂点数は $V = 2$ 、辺数は $E = 3$ である。連結グラフの第一ホモロジー群の階数は $E - V + 1$ なので、 $3 - 2 + 1 = 2$ である。したがって $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$ である。

問題 5

解答

このグラフは連結なので $H_0 \cong \mathbb{Z}$ である。2 つの円周がそれぞれ独立な 1 サイクルを与え、それらをつなぐ線分は新しいサイクルを作らない。したがって $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$ である。同じことは、線分を縮めて $S^1 \vee S^1$ に変形レトラクトすることからも分かる。

問題 6

解答

各三角形の境界は円周と同じホモトピー型を持つ。それが互いに交わらず 2 つあるので、連結成分は 2 つである。したがって $H_0 \cong \mathbb{Z}^2$ である。また各成分に 1 つずつ独立な 1 サイクルがあるので、 $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$ である。

問題 7

解答

一般のグラフでは、第一ホモロジー群の階数は $E - V + c$ である。ここでは $10 - 7 + 2 = 5$ である。したがって $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^5$ である。

問題 8

解答

四面体の境界は球面 S^2 と同相である。したがってホモロジー群は S^2 のものと同じである。すなわち $H_0 \cong \mathbb{Z}$ 、 $H_1 = 0$ 、 $H_2 \cong \mathbb{Z}$ であり、それ以外の次数では 0 である。 $H_2 \cong \mathbb{Z}$ は球面全体を表す 2 次元サイクルが存在することを表す。

問題 9

解答

三角形の周を表す 1 サイクルを z とする。内部の 2 単体 $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$ を貼ると、 $\partial\sigma = z$ となる向きで考えられる。つまり z は Z_1 の元であるだけでなく、 $B_1 = \text{Im } \partial_2$ の元にもなる。したがってホモロジー群 $H_1 = Z_1/B_1$ では $[z] = 0$ である。これが「穴が埋められる」ということの代数的表現である。

問題 10

解答

まず各次数の単体を数え、鎖群 C_n を決める。次に境界写像 $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ を書き下す。その後、サイクル群 $Z_n = \text{Ker } \partial_n$ とバウンダリ群 $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$ を求める。最後に商群 $H_n = Z_n/B_n$ を計算する。この手順により、幾何的な穴を代数的に求めることができる。

問題 11

解答

各辺の境界は

$$\partial e_{01} = v_1 - v_0, \quad \partial e_{02} = v_2 - v_0, \quad \partial e_{12} = v_2 - v_1$$

なので、指定された基底に関する境界行列は

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$x = (a, b, c)^\top$ とすると、 $D_1 x = 0$ は

$$-a - b = 0, \quad a - c = 0, \quad b + c = 0$$

である。したがって $b = -a$, $c = a$ であり、

$$\text{Ker } D_1 = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{Z} \langle e_{01} - e_{02} + e_{12} \rangle.$$

問題 12

解答

$\partial_2 \sigma = e_{12} - e_{02} + e_{01}$ なので

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

問題 11 の D_1 と掛けると

$$D_1 D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。 $D_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^3$ は零でない列ベクトルによる写像なので単射であり, $\text{Ker } D_2 = 0$ から $H_2 = 0$ である。また問題 11 より

$$\text{Ker } D_1 = \mathbb{Z} \langle e_{01} - e_{02} + e_{12} \rangle$$

であり, これは $\text{Im } D_2$ と一致するので $H_1 = 0$ である。複体は連結なので $H_0 \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 13

解答

$\sigma_1 = [v_0, v_1, v_2]$, $\sigma_2 = [v_0, v_2, v_3]$ とすると,

$$\partial \sigma_1 = e_{01} + e_{12} - e_{02}, \quad \partial \sigma_2 = e_{23} - e_{03} + e_{02}.$$

基底 $(e_{01}, e_{12}, e_{23}, e_{03}, e_{02})$ に関する列は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。二つを足すと

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, これは $e_{01} + e_{12} + e_{23} - e_{03}$, すなわち正方形の外周を表す。対角線 e_{02} の係数が $-1 + 1 = 0$ と打ち消し合う。

問題 14

解答

基底を

$$\mathcal{B}_1 = (e_{01}, e_{12}, e_{20}), \quad \mathcal{B}_0 = (v_0, v_1, v_2, v_3)$$

とする。ただし $e_{20} = [v_2, v_0]$ とする。境界行列は

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$D_1(a, b, c)^T = 0$ を解くと $a = b = c$ なので

$$\text{Ker } D_1 = \mathbb{Z}\langle e_{01} + e_{12} + e_{20} \rangle.$$

$C_2 = 0$ だから $H_1 \cong \mathbb{Z}$ である。また、三角形の周と孤立点の二つの連結成分があるので

$$H_0 \cong \mathbb{Z}^2.$$

行列でも、 D_1 の像の階数が 2 であり、 $\text{rank } C_0 = 4$ だから H_0 の階数は $4 - 2 = 2$ と分かる。

9.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

連結グラフ G の極大木 T を選ぶ。 T はすべての頂点を含み、辺数は $V - 1$ である。 G の辺のうち T に含まれないものは $E - (V - 1) = E - V + 1$ 本ある。 T を一点に縮めると、残った各辺が 1 つの円周を作る。したがって G は $E - V + 1$ 個の円周のブーケと同じホモトピー型を持つ。第一ホモロジー群は円周の個数だけ $\mathbb{Z}$ を持つので、 $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^{E-V+1}$ である。

発展問題 2

解答

各連結成分 G_i について、頂点数を V_i 、辺数を E_i とすると、その第一ホモロジーの階数は $E_i - V_i + 1$ である。全部で c 個の連結成分があるので、階数を足すと $\sum_i (E_i - V_i + 1) = E - V + c$ である。

例えば、互いに交わらない 2 つの円周を考えると、 $V = 6$ 、 $E = 6$ 、 $c = 2$ と三角形 2 つで実現できる。このとき $E - V + c = 6 - 6 + 2 = 2$ であり、実際 $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$ である。

発展問題 3

解答

四面体の境界複体は4枚の三角形, 6本の辺, 4個の頂点からなる。オイラー標数は $4-6+4=2$ で, 球面と同じである。また境界複体全体を向きをそろえて足し合わせると, 辺が互いに打ち消し合い, 2次元サイクルが1つ得られる。これは球面全体を表し, $H_2 \cong \mathbb{Z}$ を与える。一方, 1次元の閉路は三角形面によって埋められるため $H_1 = 0$ である。連結なので $H_0 \cong \mathbb{Z}$ である。したがって S^2 と同じホモロジー群を持つ。

発展問題 4

解答

φ_1 の像は $\mathbb{Z}$ 全体なので

$$\mathbb{Z}/\text{Im } \varphi_1 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$$

である。一方, φ_2 の像は偶数全体 $2\mathbb{Z}$ なので

$$\mathbb{Z}/\text{Im } \varphi_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

である。どちらの写像も $\mathbb{Q}$ 上に拡張すると非零な 1×1 行列であり, 階数は1である。しかし整数係数では, 像が格子全体か指数2の部分格子かという違いが商に残る。したがって, ねじれを求めるには階数だけでなく, 像の整数格子としての位置を調べる必要がある。

発展問題 5

解答

$D_2(x, y)^\top = (2x, 0)^\top$ なので

$$\text{Ker } D_2 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}\langle(0, 1)\rangle.$$

一つ上の群が0であるとすれば,

$$H_2 = \text{Ker } D_2 \cong \mathbb{Z}.$$

次の境界写像は零写像なので

$$\text{Ker } 0 = \mathbb{Z}^2.$$

一方,

$$\text{Im } D_2 = \mathbb{Z}\langle(2, 0)\rangle.$$

したがって

$$H_1 = \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}\langle(2, 0)\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

第1成分に位数2のねじれが残る, 第2成分は自由生成元として残る。

第 10 章

ホモロジー代数の基礎

10.1 練習問題（標準）

問題 1

解答

最初の写像 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ は $n \mapsto 2n$ であり、単射である。次の写像 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は自然な剰余写像と考える。この写像は全射である。また、剰余写像の核は偶数全体 $2\mathbb{Z}$ であり、これは前の写像の像と一致する。したがって各場所で「前の像＝次の核」が成り立ち、短完全系列である。

問題 2

解答

$i(n) = (n, 0)$ は $i(n) = 0$ なら $n = 0$ なので単射である。 $p(a, b) = b$ は任意の $b \in \mathbb{Z}$ に対して $p(0, b) = b$ なので全射である。また $\text{Ker } p = \{(a, b) \mid b = 0\} = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ であり、これは $\text{Im } i$ と一致する。したがってこの列は短完全系列である。

問題 3

解答

$C_1 = \mathbb{Z}$, $C_0 = \mathbb{Z}$, 境界写像は $\partial_1(n) = 3n$ である。まず $H_1 = \text{Ker } \partial_1$ である。 $3n = 0$ となる整数は $n = 0$ だけなので、 $H_1 = 0$ である。次に $H_0 = C_0 / \text{Im } \partial_1 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。したがってホモロジーは $H_1 = 0$, $H_0 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。

問題 4

解答

$Z_1 = \text{Ker } \partial$ は $\partial(a, b) = (0, 0)$ となる (a, b) 全体である。条件は $(a + b, 0) = (0, 0)$, すなわち $a + b = 0$ である。したがって $b = -a$ であり, $(a, b) = (a, -a) = a(1, -1)$ と書ける。よって $Z_1 \cong \mathbb{Z}$ で, 生成元は $(1, -1)$ である。

問題 5

解答

鎖写像であるためには $f_0 \partial_C = \partial_D f_1$ が成り立つ必要がある。左辺は $f_0(\partial_C(n)) = f_0(2n) = 4n$ である。右辺は $\partial_D(f_1(n)) = \partial_D(n) = 4n$ である。両者は一致するので, f_1, f_0 は鎖写像を定める。

問題 6

解答

z がサイクルであるとは $\partial z = 0$ であることをいう。 f が鎖写像なら $\partial f(z) = f \partial(z)$ が成り立つ。いま $\partial z = 0$ なので, $\partial f(z) = f(0) = 0$ である。したがって $f(z)$ もサイクルである。つまり鎖写像はサイクルをサイクルへ送る。

問題 7

解答

$A = 0$ なので, $A \rightarrow B$ の像は 0 である。完全性より, これは $B \rightarrow C$ の核に等しい。したがって $B \rightarrow C$ は単射である。また $D = 0$ なので, $C \rightarrow D$ の核は C 全体である。完全性より, これは $B \rightarrow C$ の像に等しい。したがって $B \rightarrow C$ は全射である。単射かつ全射なので, $B \rightarrow C$ は同型である。

問題 8

解答

変形レトラクトはホモトピー同値を与えるので, ホモロジー群は保たれる。したがって $H_n(X) \cong H_n(S^1)$ である。円周は連結なので $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$ であり, 1つの基本的な1サイクルを持つので $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ である。よって $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$ である。

10.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

$A = 0$ なので、 $A \rightarrow B$ の像は 0 である。完全性より、 $B \rightarrow C$ の核は 0 である。したがって $B \rightarrow C$ は単射である。また最後が $C \rightarrow 0$ なので、 $B \rightarrow C$ の像は C 全体である。したがって全射である。よって $B \rightarrow C$ は同型である。

発展問題 2

解答

b が C のバウンダリであるとする。するとある鎖 c があって $b = \partial c$ と書ける。鎖写像の条件より $f(b) = f(\partial c) = \partial f(c)$ である。したがって $f(b)$ は D の境界写像の像に属する。つまり f はバウンダリをバウンダリに送る。この性質により、鎖写像はホモロジー群上の準同型を誘導できる。

発展問題 3

解答

例として $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ を考える。ここで $i(n) = (n, 0)$, $p(a, b) = b$ とする。この列は短完全であり、 $B = \mathbb{Z}^2$ の中に $A = \mathbb{Z}$ が第 1 成分として埋め込まれ、商として $C = \mathbb{Z}$ が第 2 成分として現れる。

この例では $B \cong A \oplus C$ である。一般の短完全系列でも、 B は A を部分群として含み、 B/A が C になるという意味で、 A と C の情報を同時に持つ。

第 11 章

マイヤー・ヴィートリス完全系列

11.1 練習問題 (標準)

問題 1

解答

2つの部分を U, V とする。 U, V は可縮なので $H_1(U) = H_1(V) = 0$, $H_0(U) \cong H_0(V) \cong \mathbb{Z}$ である。交わり $U \cap V$ は2つの可縮成分を持つので, $H_0(U \cap V) \cong \mathbb{Z}^2$, $H_1(U \cap V) = 0$ である。

マイヤー・ヴィートリス完全系列の低次部分は $0 \rightarrow H_1(U \cup V) \rightarrow H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$ となる。写像 $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は, 2つの成分の生成元をどちらも同じ $(1, -1)$ に送るので, 核は $\mathbb{Z}$ である。ここで用いているのは, 完全性により $\text{Im } \delta = \text{Ker } \iota_*$ となることである。交わりの2成分の差が $\text{Ker } \iota_*$ を生成するため, $H_1(U \cup V) \cong \mathbb{Z}$ である。開円環の1つの穴がこの $\mathbb{Z}$ として現れる。

問題 2

解答

2つの円板を K_1, K_2 とする。各円板は可縮である。しかし交わり $K_1 \cap K_2$ が2本の互いに交わらない弧からなるなら, 交わりは2つの連結成分を持つ。マイヤー・ヴィートリス完全系列では, この非連結性が $H_1(K_1 \cup K_2)$ に現れる。

直感的には, 2本の弧で貼り合わせると, 2つの貼り合わせ部分の間に輪のような通り道ができる。代数的には $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}^2$ から $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) \cong \mathbb{Z}^2$ への写像に1次元の核が生じ, それが H_1 になる。

問題 3

解答

$K_1 = S^2$, $K_2 = S^1$ とし, 交わりは 1 点とする。交わりは可縮なので, 高次ホモロジーは 0 である。マイヤー・ヴィートリス完全系列では, 1 点で貼り合わせた場合, 高次ホモロジーは直和になる。したがって $H_2(S^2 \vee S^1) \cong H_2(S^2) \oplus H_2(S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus 0 \cong \mathbb{Z}$ である。また $H_1(S^2 \vee S^1) \cong H_1(S^2) \oplus H_1(S^1) \cong 0 \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 4

解答

2 つの球面を K_1, K_2 とし, 交わりは 1 点である。交わりは可縮なので, 高次ホモロジーには影響せず, 直和が得られる。各 S^2 は $H_2 \cong \mathbb{Z}$, $H_1 = 0$ を持つ。したがって $H_2(S^2 \vee S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_1(S^2 \vee S^2) = 0$ である。空間は連結なので $H_0 \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 5

解答

K_1, K_2 が可縮なら, それぞれ単独では穴を持たない。しかし交わりが複数の連結成分を持つと, 2 つの部分空間が複数箇所で貼り合わされることになる。この複数の貼り合わせの間に閉じた通路ができ, 1 次元のサイクルが生じることがある。

マイヤー・ヴィートリス完全系列では, $H_0(K_1 \cap K_2)$ から $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ への写像の核が, $H_1(K_1 \cup K_2)$ に対応する。交わりが非連結だとこの核が非自明になり得るため, H_1 が現れる。

問題 6

解答

交わりが 1 点なら, $K_1 \cap K_2$ は可縮である。したがって $n \geq 1$ では $H_n(K_1 \cap K_2) = 0$ である。マイヤー・ヴィートリス完全系列の高次部分では, 交わりのホモロジーが 0 なので, K_1 と K_2 のホモロジーがほぼそのまま直和として $K_1 \cup K_2$ に現れる。そのため $H_n(K_1 \cup K_2) \cong H_n(K_1) \oplus H_n(K_2)$ が期待できる。

問題 7

解答

$H_0(K_1 \cap K_2)$ は交わりの連結成分の個数を記録する。典型的には、 K_1 と K_2 がどちらも連結または可縮であっても、交わりが 2 つ以上の連結成分を持つ場合に重要になる。このとき $H_0(K_1 \cap K_2)$ から $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2)$ への写像に核が生じ、その核が $H_1(K_1 \cup K_2)$ と関係する。したがって、交わりが非連結な場合、 H_0 の情報から 1 次元の穴が検出される。

問題 8

解答

つなぎ準同型は、和空間 $K_1 \cup K_2$ のサイクルを K_1 側の鎖と K_2 側の鎖に分けたとき、その境界が交わり $K_1 \cap K_2$ 上にどのように残るかを測る写像である。サイクル全体では境界が 0 であっても、片方の鎖だけを見ると境界が残ることがある。その境界はもう一方の鎖の境界と反対向きに一致し、交わりの中のサイクルを作る。つなぎ準同型はこの交わり上のサイクルのホモロジー類を与える。

問題 9

解答

ファン・カンペンの定理は基本群を計算する定理であり、ループの合成を非可換な群として扱う。そのため、ループの通る順序や関係式の非可換性が重要になる。一方、マイヤー・ヴィートリス完全系列はホモロジー群を計算する定理であり、鎖やサイクルをアーベル群として扱う。ホモロジーでは足し算が可換なので、基本群より粗いが、完全系列により高次元の穴も系統的に計算できる。

問題 10

解答

マイヤー・ヴィートリス完全系列では、 $K_1 \cup K_2$ のホモロジーを、 K_1 , K_2 , $K_1 \cap K_2$ のホモロジーから求める。したがって、これら 3 つのホモロジーが分かりやすいほど、完全系列の未知部分を特定しやすくなる。例えばそれらが可縮、球面、円周などであれば、既知のホモロジーを代入して、核や余核から和空間のホモロジーを求められる。逆に部分空間自体のホモロジーが複雑だと、完全系列を読んでも未知量が多く残る。

11.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

$S^n = D_+^n \cup D_-^n$ と分けると、各 D^n は可縮であり、交わりは S^{n-1} と同じホモトピー型を持つ。 $n \geq 2$ とすると、完全系列の一部は $0 \rightarrow H_n(S^n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0$ の形になる。帰納的に $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ が分かっているならば、 $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ が従う。幾何的には、2つの円板を境界球面に沿って貼り合わせることで、1つの最上次元サイクルが作られる。

発展問題 2

解答

K_1, K_2 が可縮で連結とする。交わりが m 個の点なら、 $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}^m$ である。一方、 $H_0(K_1) \oplus H_0(K_2) \cong \mathbb{Z}^2$ である。写像 $\mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^2$ は各点の生成元を同じ $(1, -1)$ に送るので、核の階数は $m - 1$ である。完全系列より、この核が $H_1(K_1 \cup K_2)$ に対応する。したがって H_1 の階数は $m - 1$ と予想される。

発展問題 3

解答

$X \vee Y$ は X と Y を1点で貼り合わせた空間である。交わりは1点なので、 $n \geq 1$ では $H_n(X \cap Y) = 0$ である。マイヤー・ヴィートリス完全系列の高次部分では、交わりのホモロジーが0になるため、 $H_n(X) \oplus H_n(Y)$ から $H_n(X \vee Y)$ への写像が同型になる。したがって $n \geq 1$ で $H_n(X \vee Y) \cong H_n(X) \oplus H_n(Y)$ である。

第 12 章

ホモロジー群の計算 (2) 完全系列の利用

12.1 練習問題 (標準)

問題 1

解答

円周の第一ホモロジーは $\mathbb{Z}\langle a \rangle$ である。円板を境界が円周を 3 回まわるように貼ると、境界サイクル $3a$ がバウンダリとして 0 になる。したがって $H_1 \cong \mathbb{Z}/\langle 3a \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である。これは基本群の計算で関係式 $a^3 = 1$ を加えることのホモロジー版である。

問題 2

解答

2 つの円周のブーケの H_1 は $\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \cong \mathbb{Z}^2$ である。貼り付け語 a^2b^3 は、可換化・ホモロジーでは $2a + 3b$ に対応する。したがって貼り付け後の第一ホモロジーは $\mathbb{Z}^2/\langle 2a + 3b \rangle$ である。 $(2, 3)$ は原始ベクトルなので、この商は $\mathbb{Z}$ と同型である。よって $H_1 \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 3

解答

もとのブーケの第一ホモロジーは $\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$ である。貼り付け語 a^2 はホモロジーでは $2a$ に対応する。したがって $H_1 \cong (\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b)/\langle 2a \rangle$ である。これは a 方向に $2a = 0$ というねじれを作り、 b 方向は自由に残る。よって $H_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。

問題 4

解答

向き付け可能閉曲面 Σ_g では, $H_2 \cong \mathbb{Z}$, $H_1 \cong \mathbb{Z}^{2g}$, $H_0 \cong \mathbb{Z}$ である。 $H_2 \cong \mathbb{Z}$ は全体の向き付けられた基本サイクルを表す。 H_1 は g 個のハンドルごとに 2 本の独立な 1 サイクルを持つため $2g$ 個の生成元を持つ。 $g = 3$ なので, $H_2(\Sigma_3) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma_3) \cong \mathbb{Z}^6$, $H_0(\Sigma_3) \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 5

解答

向き付け不可能閉曲面では, 整数係数の最上次元ホモロジーは消えるので $H_2(N_3) = 0$ である。また第 5 章で計算したように, $H_1(N_3) \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。空間は連結なので $H_0(N_3) \cong \mathbb{Z}$ である。したがって $H_2 = 0$, $H_1 \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_0 \cong \mathbb{Z}$ である。

問題 6

解答

くさび和では, 1 次以上のホモロジーは直和になる。 $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。したがって $H_1(S^1 \vee \mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

問題 7

解答

どちらも連結なので $H_0 \cong \mathbb{Z}$ で区別できない。 $S^2 \vee S^1$ では $H_1 \cong \mathbb{Z}$, $H_2 \cong \mathbb{Z}$ である。一方, トーラス T^2 では $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$, $H_2 \cong \mathbb{Z}$ である。したがって H_1 を見れば区別できる。 H_2 はどちらも $\mathbb{Z}$ なので, この 2 つを区別するには不十分である。

問題 8

解答

向き付け可能閉曲面では, すべての 2 単体に整合的な向きを付けられる。そのため, 曲面全体を足し合わせた 2 次鎖の境界では, 各辺が反対向きに 2 回現れて打ち消し合う。これにより基本 2 サイクルができ, $H_2 \cong \mathbb{Z}$ となる。

向き付け不可能閉曲面では, 面の向きを全体で整合的に選べない。そのため整数係数では曲面全体を表す非自明な 2 サイクルを作れない。したがって最上次元ホモロジーは消える。

問題 9

解答

結び目補空間の第一ホモロジーは、直感的には結び目を何回リンクするかを記録する。メリディアンは結び目を 1 回リンクする小さな円であり、第一ホモロジーの生成元になる。結び目が 1 成分であるため、独立なメリディアンは 1 つである。したがって $H_1(X_K) \cong \mathbb{Z}$ となる。これは結び目群の可換化が常に $\mathbb{Z}$ であることとも一致する。

問題 10

解答

第一ホモロジー群は基本群の可換化と同型である。したがって基本群の表示から H_1 を求めるには、すべての生成元を可換にし、貼り付け語をアーベル群の関係式として読む。向き付け可能閉曲面の貼り付け語は交換子の積なので、可換化では交換子がすべて消える。その結果、関係式は残らず、 $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ となる。一方、向き付け不可能曲面では $a_1^2 \cdots a_g^2$ が $2a_1 + \cdots + 2a_g = 0$ という関係式を与える。

12.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

もとの $S^1 \vee S^1$ の第一ホモロジーは $\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$ である。貼り付け語 $a^p b^q$ はホモロジーでは $pa + qb$ になる。したがって $H_1 \cong \mathbb{Z}^2 / \langle (p, q) \rangle$ である。 $d = \gcd(p, q)$ とする。もし $(p, q) \neq (0, 0)$ なら、スミス標準形によりこの商は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ である。特に $d = 1$ なら $H_1 \cong \mathbb{Z}$ である。もし $p = q = 0$ なら関係式がないので $H_1 \cong \mathbb{Z}^2$ である。

発展問題 2

解答

Σ_g の基本群の表示は $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$ である。可換化すると各交換子 $[a_i, b_i]$ は 1 になる。したがって唯一の関係式は自動的に消える。残る生成元は $2g$ 個で、関係式はない。よって $\pi_1(\Sigma_g)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ であり、1 次元フレヴィッツの定理により $H_1(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ である。

発展問題 3

解答

可換化して加法記法で読むと、貼り付け語 $a_1^2 \cdots a_g^2$ は関係式 $2a_1 + \cdots + 2a_g = 0$ を与える。これは $2(a_1 + \cdots + a_g) = 0$ と書ける。つまり $u = a_1 + \cdots + a_g$ という元が $2u = 0$ を満たす。このように、2 倍すると 0 になるが必ずしも 0 ではない元が現れるため、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 型のねじれが生じる。残りの $g - 1$ 個の方向は自由に残り、 $H_1(N_g) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる。

第 13 章

ホモロジー群の応用

13.1 練習問題（標準）

問題 1

解答

$S^2 \vee S^1$ は連結なので $b_0 = 1$ である。また $H_1(S^2 \vee S^1; \mathbb{Q}) \cong H_1(S^1; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ なので $b_1 = 1$ である。さらに $H_2(S^2 \vee S^1; \mathbb{Q}) \cong H_2(S^2; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ なので $b_2 = 1$ である。したがって $(b_0, b_1, b_2) = (1, 1, 1)$ である。

問題 2

解答

向き付け可能閉曲面 Σ_g では $b_0 = 1$, $b_1 = 2g$, $b_2 = 1$ である。 $g = 3$ なので $b_0 = 1$, $b_1 = 6$, $b_2 = 1$ である。オイラー標数は $\chi = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - 6 + 1 = -4$ である。一般公式 $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ に $g = 3$ を代入しても -4 となる。

問題 3

解答

N_3 の整数係数ホモロジーは $H_0 \cong \mathbb{Z}$, $H_1 \cong \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $H_2 = 0$ である。ベッチ数は有理数係数ホモロジーの次元, すなわち整数係数ホモロジーの自由部分の階数を見る。したがって $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 0$ である。ねじれ部分 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ はベッチ数には寄与しない。

問題 4

解答

$S^2 \vee S^2$ は連結なので $b_0 = 1$ である。1 次元ホモロジーはないので $b_1 = 0$ である。2 つの球面それぞれが独立な 2 次元サイクルを与えるので $b_2 = 2$ である。したがってオイラー標数は $\chi = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - 0 + 2 = 3$ である。

問題 5

解答

この空間は連結なので $b_0 = 1$ である。2 つの円周から独立な 1 サイクルが 2 つ出るので $b_1 = 2$ である。球面から 2 次元サイクルが 1 つ出るので $b_2 = 1$ である。したがって $\chi = b_0 - b_1 + b_2 = 1 - 2 + 1 = 0$ である。

問題 6

解答

生成ループ $\alpha(t) = e^{2\pi it}$ を考える。これに f を合成すると

$$(f \circ \alpha)(t) = f(e^{2\pi it}) = (e^{2\pi it})^m = e^{2\pi imt}$$

となる。これは円周を正の向きに m 回まわるループである。したがって、誘導準同型

$$f_* : H_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

は生成元を m 倍に送る。よって

$$\deg(f) = m$$

である。

問題 7

解答

$H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ である。写像度は、最上次元ホモロジーの生成元が何倍に写るかを表す。写像度が 2 であるとは、 g_* が $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ の準同型として $n \mapsto 2n$ であることを意味する。したがって g_* は 2 倍写像である。

問題 8

解答

ホモトピックな写像はホモロジー群上に同じ準同型を誘導する。 S^n の最上次元ホモロジーは $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ であり、写像度はこの $\mathbb{Z}$ 上で誘導される準同型の倍率である。したがってホモトピックな写像は同じ写像度を持つ。よって写像度が異なる 2 つの写像は、同じホモトピー類には属さない。

問題 9

解答

$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ ($a_n \neq 0, n \geq 1$) が零点を持たないと仮定し、十分大きな R に対して $\varphi_R: S_R \rightarrow S^1, \varphi_R(z) = p(z)/|p(z)|$ を考える。

円板への延長から得られる写像度. 零点がないので、同じ式で φ_R は閉円板 $D_R = \{|z| \leq R\}$ 全体へ連続に延長できる。したがって $(\varphi_R)_*$ は $H_1(S_R) \rightarrow H_1(D_R) = 0 \rightarrow H_1(S^1)$ と分解し、零写像である。よってこの見方での写像度は 0 である。

最高次項から得られる写像度. R が十分大きければ、 $|z| = R$ 上で最高次項 $a_n z^n$ が残りの項の和より絶対値で大きい。このとき φ_R は $z \mapsto a_n z^n / |a_n z^n|$ にホモトピックであり、この写像は円周を n 回巻き付けるので写像度は n である。

写像度はホモトピー不変量であるから $0 = n$ となるはずだが、 $n \geq 1$ なので矛盾する。これが代数学の基本定理の証明の骨格である。

問題 10

解答

もしレトラクション $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ が存在すれば、包含 $i: S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ に対して $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$ が成り立つ。ホモロジーに誘導すると、 $r_* \circ i_* = \text{id}$ となる。

しかし $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ である一方、 D^n は可縮なので $H_{n-1}(D^n) = 0$ である。したがって $i_*: \mathbb{Z} \rightarrow 0$ は零写像であり、その後に r_* を合成しても零写像にしかない。これは恒等写像にはなり得ない。したがってそのようなレトラクションは存在しない。

問題 11

解答

連続写像 $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を考える。不動点は $f(x) = x$ を満たす点である。関数 $h(x) = f(x) - x$ を考えると、 h は連続である。 $h(0) = f(0) \geq 0$, $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ である。中間値の定理より、どこかで $h(x) = 0$ となる。その点で $f(x) = x$ である。直感的には、区間を連続的に自分自身へ写すと、左端と右端の制約のため、グラフ $y = f(x)$ は必ず対角線 $y = x$ と交わる。

13.2 練習問題（発展）

発展問題 1

解答

$n = 1$ の場合、 S^1 上の対蹠写像は角度を $\theta \mapsto \theta + \pi$ に送る回転であり、向きを保つ。したがって写像度は 1 で、 $(-1)^2 = 1$ と一致する。 $n = 2$ の場合、球面の対蹠写像は向きを反転する。したがって写像度は -1 で、 $(-1)^3 = -1$ と一致する。 $n = 3$ の場合は向きを保ち、写像度は 1 である。このように、次元が上がるごとに符号が交互に変わり、一般に $\deg A = (-1)^{n+1}$ となる。

発展問題 2

解答

対偶は、 $\deg(f) \neq 1$ なら f は恒等写像にホモトピックでない、である。例として S^1 上の写像 $f(z) = z^2$ を考える。この写像の写像度は 2 である。恒等写像の写像度は 1 なので、 f は恒等写像にホモトピックでない。このように写像度は、球面から球面への写像のホモトピー類を区別する不変量として働く。

発展問題 3

解答

Brouwer の不動点定理を背理法で証明する。不動点を持たない連続写像 $f : D^n \rightarrow D^n$ があると仮定する。各点 x に対して、 $f(x)$ から x へ向かう半直線を伸ばし、境界 S^{n-1} と交わる点を $r(x)$ と定める。不動点がないので $f(x) \neq x$ であり、この構成が連続な写像 $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ を与える。さらに境界上の点では $r(x) = x$ となるため、 r はレトラクションになる。しかし、ホモロジーにより S^{n-1} は D^n のレトラクトではないことが分かっている。したがって不動点がないという仮定から不可能なレトラクションが構成され、矛盾が生じる。この矛盾

により, f は少なくとも 1 つの不動点を持つ。