

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

時間の変化を、分けて・ならして読む

成分分解・季節調整・移動平均・指数平滑化

1 観測値の上下動を、3つの成分で見る

月次売上が増えていても、それが長期的な成長なのか、毎年の繁忙期なのかは区別が必要です。加法モデルでは

$$y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$$

と分けます。以下は仕組みを示すために成分を指定して作った人工データです。実測データでは、成分は未知なので推定します。

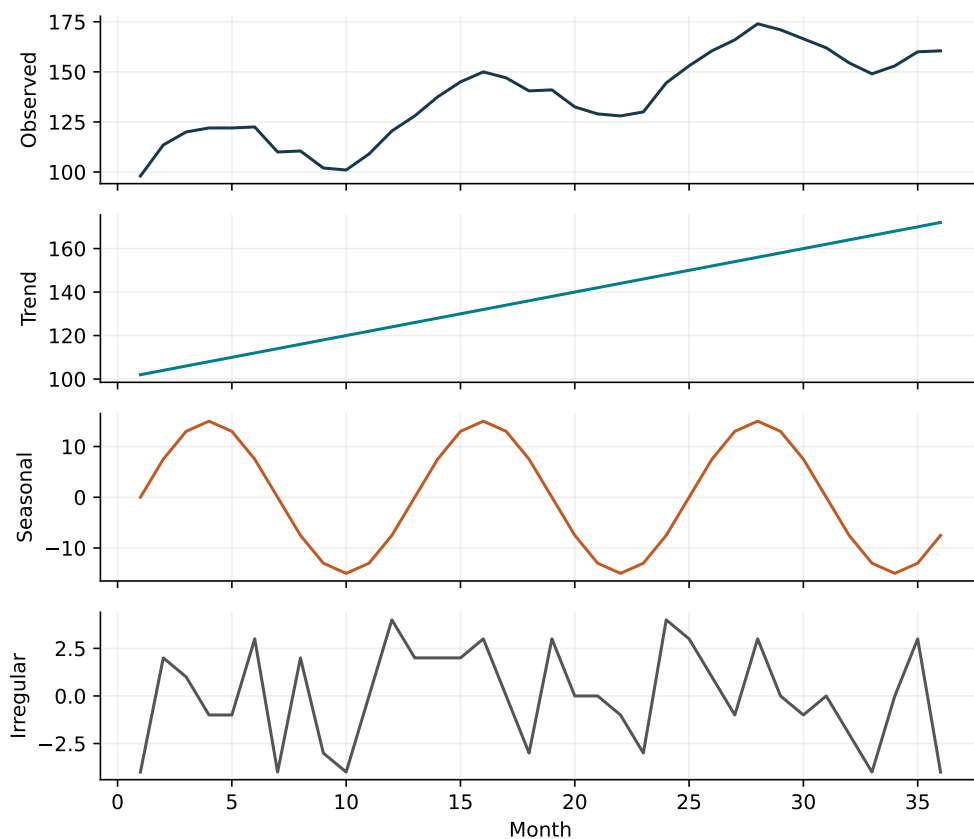


図1：上から観測値、トレンド、季節成分、不規則成分。横軸は月。 $T_t = 100 + 2t$ 、 $S_t = 15 \sin(2\pi(t-1)/12)$ とし、説明用の小さな変動を加えています。不規則成分は乱数で作った例であり、実測データではありません。

季節性の「季節」は、春夏秋冬に限らない

日次データの曜日効果なら周期 7、月次データの年周期なら周期 12 です。一定周期を持たない長期的な景気循環などは、固定周期の季節性とは区別します。

2 加法モデルと乗法モデルを使い分ける

季節的な増減を「何個増えるか」で表すか、「何倍になるか」で表すかが違います。

	加法モデル	乗法モデル
モデル	$T_t + S_t + \varepsilon_t$	$T_t S_t \varepsilon_t$
季節効果の例	+20 個	1.20 倍
季節効果なし	$S_t = 0$	$S_t = 1$
不規則変動なし	$\varepsilon_t = 0$	$\varepsilon_t = 1$
季節調整	$y_t - S_t$	y_t / S_t

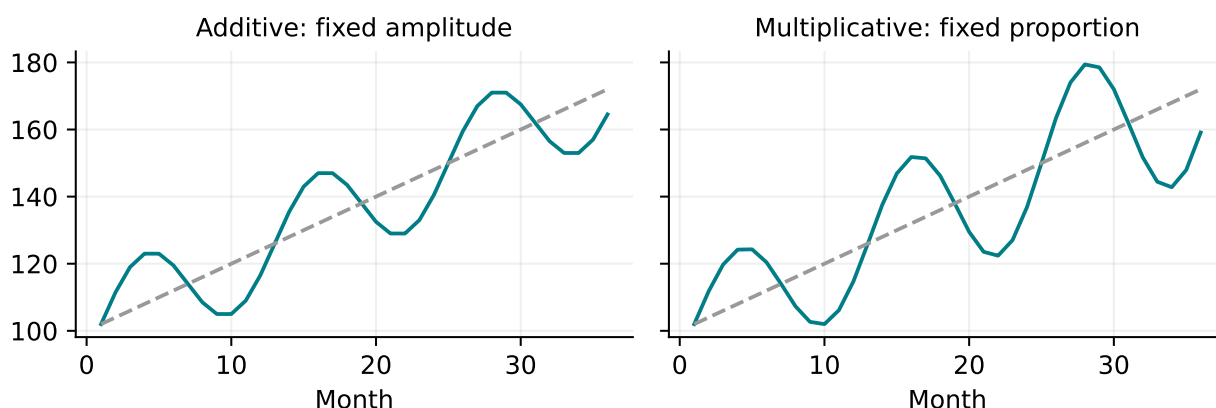


図 2：同じ上昇トレンドに、一定幅（左）と一定割合（右）の季節変動を重ねた例。破線はトレンドです。不規則成分は加えていません。

同じ 20% 増でも、増える個数は変わる

水準 100 で $S_t = 1.20$ なら 120、水準 200 なら 240 です。季節による増加は 20 から 40 へと 2 倍になります。加法モデルで $S_t = 20$ なら、それぞれ 120、220 です。

対数変換の条件と意味

$y_t, T_t, S_t, \varepsilon_t$ がすべて正なら、

$$\log y_t = \log T_t + \log S_t + \log \varepsilon_t.$$

乗法モデルの「変動なし」の 1 は、対数上では 0 になります。0 や負の値には、そのまま実数の対数を適用できません。

分解には基準が必要

加法モデルで T_t に定数 c を足し、 S_t から c を引いても和は同じです。この曖昧さを避けるため、固定周期の季節成分は 1 周期の和を 0 にするなどの基準を置きます。乗法モデルでは季節指数の平均を 1 とする基準などがあります。

対数上で季節成分の平均を 0 にすれば、元の尺度で季節指数の幾何平均が 1 になります。算術平均 1 とは一般に異なります。

3 季節調整と残差は、取り除くものが違う

推定した成分を $\hat{T}_t, \hat{S}_t$ とすると、加法モデルでは

$$\underbrace{y_t - \hat{S}_t}_{\text{季節調整済み}} = \hat{T}_t + e_t, \quad \underbrace{y_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t}_{\text{残差}} = e_t.$$

季節調整後にも、長期的な変化や突発的な変動は残ります。季節調整は、グラフを完全に滑らかにする操作ではありません。

例：売上 145、トレンド 118、季節効果 20

季節調整済み売上は $145 - 20 = 125$ 、残差は $145 - 118 - 20 = 7$ です。「通常より 20 高い季節」という効果を差し引いても、トレンドより 7 高い状態です。

なぜ残差を調べるのか

残差に見える特徴	考えられる見直し
長く上昇し続ける	トレンドの推定が変化に追いついていない
一定周期で上下する	季節成分を十分に取り除けていない
正の値・負の値が連続する	時間的な依存が残っている可能性
水準とともに振れ幅が増す	乗法モデルや対数変換を検討する余地

「平均 0」だけでは十分でない

$1, -1, 1, -1, \dots$ は平均が 0 でも、明確な周期 2 の変動です。また、残差に目立つ模様が見えなくても、独立性や正規性まで保証されたわけではありません。

不規則成分と残差の違い

ε_t はモデルの中で想定する成分、 e_t は推定したトレンド・季節成分を引いた結果です。したがって、

$$e_t = \varepsilon_t + (T_t - \hat{T}_t) + (S_t - \hat{S}_t).$$

残差には不規則変動だけでなく、成分の推定誤差も含まれます。大きな残差が見つかった場合、原因が単なる偶然、入力ミス、特別な出来事のどれかは追加確認が必要です。

乗法モデルでは

成分で割った $y_t/(\hat{T}_t\hat{S}_t)$ は 1 を基準に読みます。対数上の残差は $\log y_t - \log \hat{T}_t - \log \hat{S}_t$ で、こちらの基準は 0 です。

4 移動平均は、窓の中を同じ重みで平均する

本文の移動平均は、**現在と過去**の値を使う後方移動平均です。窓幅 3 では

$$MA_t = \frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t}{3} \quad (t \geq 3).$$

例えば 100, 108, 96, 120 に対し、最初の窓は (100, 108, 96)、次の窓は (108, 96, 120) です。

$$MA_3 = \frac{304}{3}, \quad MA_4 = 108.$$

新しい値を足し、古い値を引く

隣り合う窓では $k - 1$ 個が共通なので、

$$MA_t = MA_{t-1} + \frac{y_t - y_{t-k}}{k} \quad (t \geq k + 1).$$

毎回すべてを足し直さずに更新できます。

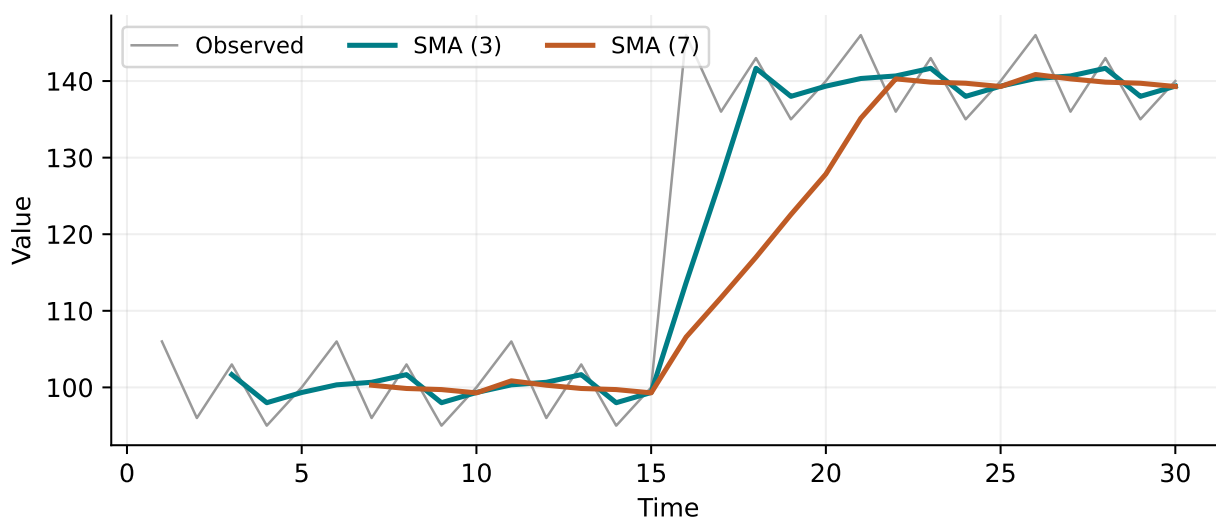


図 3：16 時点目で水準が上がる人工データ。灰色は観測、青緑は 3 期間、橙は 7 期間の後方移動平均です。長い窓では細かな揺れが弱まる一方、水準変化への追従に時間がかかります。

端の時点は、同じ公式では計算できない

窓幅 k の完全な窓がそろえるのは $t = k$ からです。初めの $k - 1$ 時点は未定義とします。小さい窓で代用する方法もありますが、その場合は別の計算規則になります。

移動平均は**平滑化された現在の値**であり、それだけで将来の値を予測したことはありません。また、窓幅を長くすればどのデータでも必ず滑らかになる、という厳密な順序関係があるわけではありません。

5 平滑化の効果と、遅れを式で確かめる

直線的なトレンドには、どれだけ遅れるか

$y_t = a + bt$ なら、後方移動平均は

$$\begin{aligned} MA_t &= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \{a + b(t-i)\} \\ &= a + bt - \frac{b}{k} \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \boxed{a + b \left(t - \frac{k-1}{2} \right)}. \end{aligned}$$

つまり、直線上では $(k-1)/2$ 時点前の水準に一致します。上昇率 $b=2$ 、窓幅 5 なら、現在値より 4 低くなります。

中心移動平均との違い

奇数幅 $k = 2h + 1$ の中心移動平均は

$$CMA_t = \frac{1}{2h+1} \sum_{i=-h}^h y_{t+i}.$$

直線トレンドでは $CMA_t = a + bt$ となり、中心にそろいます。ただし未来の観測値が必要なので、時点 t のリアルタイム判断には使えません。

ノイズの分散が小さくなる理由

一定水準 m の周りで $y_t = m + \varepsilon_t$ とし、ノイズが互いに独立、平均 0、分散 σ^2 なら、

$$E[MA_t] = m, \quad V[MA_t] = \frac{\sigma^2}{k}.$$

独立性がなければ共分散の項が加わるので、この減少率は保証されません。さらに隣接する移動平均は同じ観測を共有し、上の条件でも

$$\text{Cov}(MA_t, MA_{t+1}) = \frac{k-1}{k^2} \sigma^2$$

となります。滑らかな系列を作っても、隣り合う値は独立にはなりません。

周期と窓幅が一致するとき

S_t が周期 p で、1 周期の和が 0 なら、連続する p 個の季節成分の平均は 0 です。よって幅 p の移動平均はこの季節成分を打ち消します。ただし、トレンドの遅れや不規則変動は残ります。

6 指数平滑化は、過去の重みを徐々に減らす

初期値 $s_1 = y_1$ とし、 $t \geq 2$ で

$$s_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)s_{t-1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

とします。 $s_t - s_{t-1} = \alpha(y_t - s_{t-1})$ と書けば、観測との差のうち α の割合だけ更新すると分かります。

再帰式をほどく

$$s_3 = \alpha y_3 + \alpha(1 - \alpha)y_2 + (1 - \alpha)^2 y_1,$$

$$s_t = \alpha \sum_{j=0}^{t-2} (1 - \alpha)^j y_{t-j} + (1 - \alpha)^{t-1} y_1.$$

重みの合計は 1 です。初期値に由来する最後の項を除けば、古い観測の重みは公比 $1 - \alpha$ の等比数列で減少します。

観測の位置	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.2$
現在	0.5	0.2
1 時点前	0.25	0.16
2 時点前	0.125	0.128
3 時点前	0.0625	0.1024

表：初期値の影響を別にした、通常の重み $\alpha(1 - \alpha)^j$ 。 α が小さいほど、古い情報が相対的に長く残ります。

SMA との比較

SMA は窓の中の重みが $1/k$ 、外は 0 です。指数平滑化は固定の窓で切らず、過去の情報を徐々に弱めます。どちらも外れ値の影響を完全に排除するものではありません。

本文・移動平均の間 2 の解答

$\alpha = 0.5, s_1 = 100$ なら、

$$s_2 = 0.5(108) + 0.5(100) = \boxed{104},$$

$$s_3 = 0.5(96) + 0.5(104) = \boxed{100}, \quad s_4 = 0.5(120) + 0.5(100) = \boxed{110}.$$

α が大きいほど直近の観測値の影響は強くなります。

残差と予測誤差を区別する

観測後の差 $y_t - s_t$ と、観測前の予測誤差 $y_t - s_{t-1}$ は別です。両者は $y_t - s_t = (1 - \alpha)(y_t - s_{t-1})$ の関係にあります。小さい観測後の差だけで予測性能は判断できません。

7 本文の練習問題を解く

成分分解・問 1：加法モデル

$\varepsilon_t = y_t - T_t - S_t$ 、季節調整済み系列は $y_t - S_t$ です。

月 t	1	2	3
不規則成分	$128 - 110 - 15 = 3$	$116 - 114 + 8 = 10$	$145 - 118 - 20 = 7$
季節調整済み	113	124	125

絶対値が最大なのは **2** か月目の 10 です。与えられたトレンドと季節成分では説明できないずれが、3 か月の中で最も大きいことを意味します。原因まではこの表だけでは決まりません。

成分分解・問 2：乗法モデル

各成分が正である条件の下で、

$$\log y_t = \log T_t + \log S_t + \log \varepsilon_t.$$

指定の値を代入すると $y_t = 200 \cdot 1.20 \cdot 0.95 = \boxed{228}$ 。水準が 2 倍になると季節変動の絶対幅も 2 倍になるなら、一定割合で変動する**乗法モデル**が自然です。

移動平均・問 1：計算表

観測値は 100, 108, 96, 120, 126, 114, 132 です。

t	y_t	3 期間 SMA	$y_t - 3$ 期間 SMA	5 期間 SMA
3	96	$304/3 \approx 101.33$	$-16/3 \approx -5.33$	—
4	120	108	12	—
5	126	114	12	110
6	114	120	-6	112.8
7	132	124	8	117.6

例えば 5 期間 SMA の最後の値は、

$$\frac{96 + 120 + 126 + 114 + 132}{5} = 117.6.$$

一般に 5 期間の方が短期変動をならしやす一方、直近の上昇への反応は遅くなります。

観測値から移動平均を引けば、不規則成分か？

必ずしもそうではありません。 $y_t - MA_t$ には季節性や、トレンドに対する移動平均の遅れも含まれ得ます。5 頁の直線例ではノイズがなくても差が生じます。

8 追加問題と解答

問 A：季節調整と残差

$y = 150, \hat{T} = 120, \hat{S} = 25$ のとき、季節調整済み値と残差を求めよ。

解答：季節調整済みは $150 - 25 = \boxed{125}$ 、残差は $150 - 120 - 25 = \boxed{5}$ 。季節調整後の値にはトレンドが残ります。

問 B：乗法モデルの調整

$y = 264, T = 200, S = 1.20$ のとき、不規則因子と季節調整済み値を求めよ。

解答： $\varepsilon = 264 / (200 \cdot 1.20) = \boxed{1.10}$ 、季節調整済みは $264 / 1.20 = \boxed{220}$ 。不規則因子 1.10 は、トレンドと季節性で説明した水準より 10% 高いことを表します。

問 C：移動平均の更新

幅 3 で $MA_4 = 20, y_2 = 14, y_5 = 26$ とする。 MA_5 を求めよ。

解答： $MA_5 = 20 + (26 - 14) / 3 = \boxed{24}$ 。窓から y_2 が出て、 y_5 が入ります。

問 D：トレンドによる差

$y_t = 50 + 3t$ に幅 5 の後方移動平均を用いる。 y_{10}, MA_{10} と、その差を求めよ。

解答： $y_{10} = 80, MA_{10} = 50 + 3(10 - 2) = \boxed{74}$ 、差は $\boxed{6}$ 。ノイズがなくても、上昇するトレンドによって差が生じます。

問 E：周期を打ち消す窓

季節成分が $6, -2, -4, 6, -2, -4, \dots$ のとき、幅 3 の移動平均への季節成分の寄与を求めよ。

解答：どの連続 3 項でも和は 0 なので、寄与は $\boxed{0}$ 。幅が周期の整数倍でも同じです。

問 F：指数平滑化と予測誤差

$s_{t-1} = 100, y_t = 120, \alpha = 0.25$ とする。 s_t 、観測前の予測を 100 とした誤差、観測後の差を求めよ。

解答： $s_t = 0.25(120) + 0.75(100) = \boxed{105}$ 。予測誤差は 20、観測後の差は 15 です。

問 G：平均 0 なら、成分分解は十分か

残差が $2, -2, 2, -2, \dots$ であった。「平均 0 なので、季節性は残っていない」という説明を訂正せよ。

解答：平均は 0 でも周期 2 の規則性が残っています。平均だけでなく時間順序を保ったグラフや、時間的な関連を確認する必要があります。