

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

行列が空間をどう変えるか

基底の像・格子・面積・合成・逆変換

1 行列の列を「矢印」として読む

行列を掛けることは、点の位置ベクトルを新しい位置ベクトルへ移すことです。例えば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Ae_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Ae_2} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ y \end{pmatrix}.$$

第1列は横方向の単位ベクトルの行き先、第2列は縦方向の単位ベクトルの行き先です。例えば $(1, 2)^\top$ は $Ae_1 + 2Ae_2 = (4, 2)^\top$ に写ります。

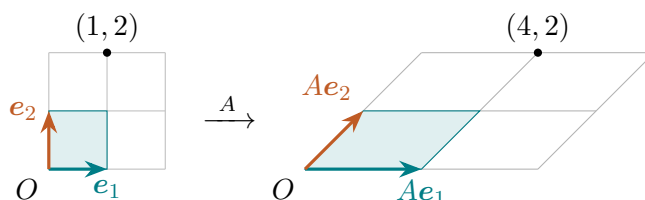


図1：正方形の格子が平行四辺形の格子へ写ります。左右は同じ縮尺です。格子全体も、2本の基底の像を足し合わせることで決まります。

列を並べる。行に並べない

$T(e_1) = (a, c)^\top$ 、 $T(e_2) = (b, d)^\top$ なら、行列は $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ です。入力も出力も列ベクトルとして扱います。

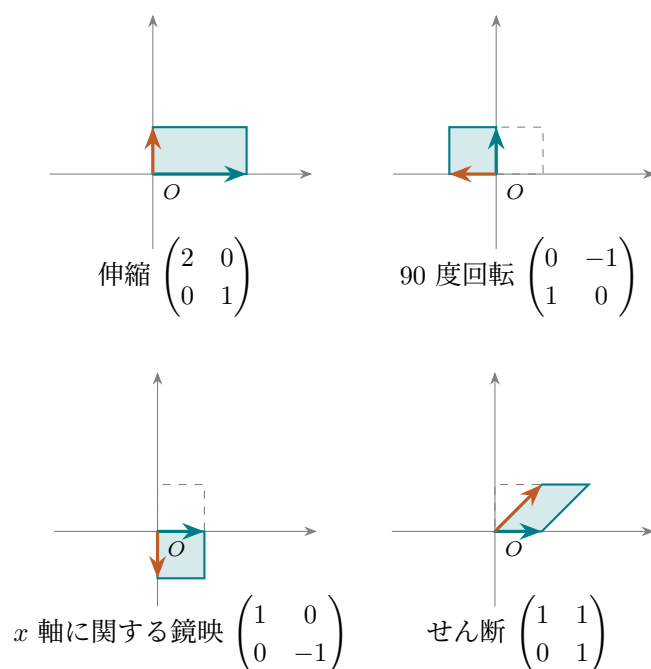
点を動かすことと、座標系を変えること

このノートでは、座標軸を固定し、点を実際に移す変換として $x \mapsto Ax$ を考えます。同じ点の座標表示を別の基底で書き直す「基底変換」とは、区別して理解しましょう。

読み方：2～5節で図と性質、6節で本文の問題の解説、7～8節で追加問題と解答を扱います。

2 代表的な変換を見比べる

破線は変換前の単位正方形、青緑の図形は変換後の像です。青緑の矢印は Ae_1 、橙色は Ae_2 を表します。各図は同じ縮尺です。



回転行列は基底の像から作れる

反時計回りに角度 θ だけ回すと、 e_1 は $(\cos \theta, \sin \theta)^\top$ 、 e_2 は $(-\sin \theta, \cos \theta)^\top$ に移ります。したがって、

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

$\theta = 90^\circ$ では $(x, y)^\top \mapsto (-y, x)^\top$ です。時計回りを取り違えないように、 $(1, 0)^\top$ の行き先で確認できます。

せん断は、面積を変えずに形を変える

$H(x, y) = (x + y, y)$ は、高さ y に比例して横へずらす変換です。単位正方形は、底辺 1、高さ 1 の平行四辺形に写ります。面積は 1 のままですが、辺の長さや角度は変わります。

すべての線形変換が長さや角度を保つわけではない

回転や鏡映は長さ・角度を保ちます。しかし伸縮やせん断は、一般には保ちません。 $A^\top A = I$ を満たす行列では、内積が $(Au)^\top (Av) = u^\top v$ となるため、長さ・角度が保たれます。

3 何が保存され、何が失われるのか

直線の像が、直線または 1 点になる理由

直線を、基準点 p と非零の方向ベクトル v を使って

$$x = p + tv \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表します。線形変換を施すと、

$$Ax = Ap + tAv.$$

$Av \neq 0$ なら方向 Av の直線です。 $Av = 0$ なら、すべて同じ点 Ap に写ります。

平行な直線の像はどうなるか

2 本の平行な直線 $p + tv$ 、 $q + tv$ は、同じ方向 Av をもつ像になります。 $Av \neq 0$ なら、像は平行な直線または同じ直線です。 $Av = 0$ なら、それぞれ 1 点に縮みます。

線分の内分点は、同じ係数の内分点に写る

$0 \leq t \leq 1$ とし、線分上の点を $r = (1-t)p + tq$ と書くと、

$$Ar = (1-t)Ap + tAq$$

が成り立ちます。例えば $t = 1/3$ なら、端点が異なる限り、 r は p 側から 1:2 に内分する点で、像でも同じ比になります。

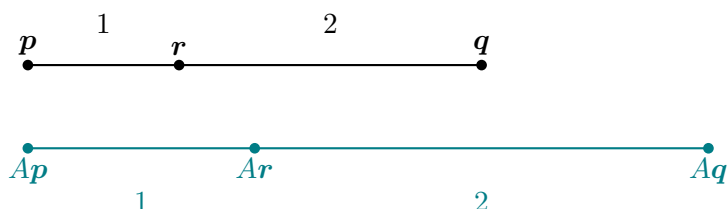


図 2：線分の長さが変わっても、同じ線分上の比は保たれます。この図は端点の像が異なる場合を示しています。

線分が 1 点に潰れるときは、比を数値として定義できない

$Ap = Aq$ なら線分全体が 1 点に写ります。この場合も上の係数による等式は正しいですが、変換後の長さの比は $0:0$ となり、通常の比としては定義できません。「線分比の保存」には、この例外への注意が必要です。

原点・直線性・内分の関係を保つことと、距離・角度を保つことは別の性質です。例えば、せん断では前者は保たれますが、後者は一般に変わります。

4 行列式は「符号つき面積の倍率」

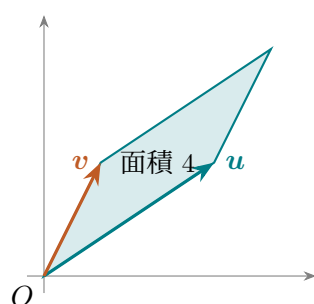
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって単位正方形は、辺ベクトル $\mathbf{u} = (a, c)^\top$ 、 $\mathbf{v} = (b, d)^\top$ をもつ平行四辺形へ写ります。その面積は $|ad - bc|$ です。

面積公式の導出：底辺と高さから

$\mathbf{u} \neq 0$ とします。 $\mathbf{u}$ に垂直な単位ベクトルは $\mathbf{n} = (-c, a)^\top / \sqrt{a^2 + c^2}$ なので、底辺の長さとは

$$\text{底辺} = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad \text{高さ} = |\mathbf{n}^\top \mathbf{v}| = \frac{|ad - bc|}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

その積は $|ad - bc| = |\det A|$ です。 $\mathbf{u} = 0$ なら面積も行列式も 0 になります。



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 4$$

図 3：単位正方形の面積 1 が、面積 4 の平行四辺形に変わります。面積倍率 4 は、各辺が 4 倍になるという意味ではありません。

なぜ他の図形でも、同じ倍率になるのか

辺ベクトル $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ の平行四辺形は、変換後に $A\mathbf{p}, A\mathbf{q}$ を辺とします。行列式の積の性質から

$$\det[A\mathbf{p} \ A\mathbf{q}] = \det(A[\mathbf{p} \ \mathbf{q}]) = \det A \cdot \det[\mathbf{p} \ \mathbf{q}].$$

三角形の面積は対応する平行四辺形の半分なので、倍率は同じです。多角形も三角形に分割して考えられます。円などの領域にも、面積の近似を通して同じ結論が成り立ちます。

絶対値と符号を分けて読む

$|\det A|$ は面積倍率です。 $\det A > 0$ は向きを保存、 $\det A < 0$ は向きを反転します。例えば鏡映は $\det A = -1$ なので、面積を保ちながら向きを反転します。 $\det A = 0$ の場合、2 次元の向きは像に引き継ぎません。

5 潰れる方向があると、元に戻せない

x 軸への射影を表す行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

y 座標が失われるので、 $(2, 1)^\top$ も $(2, 5)^\top$ も $(2, 0)^\top$ に写ります。出力だけから、元の y 座標を特定できません。

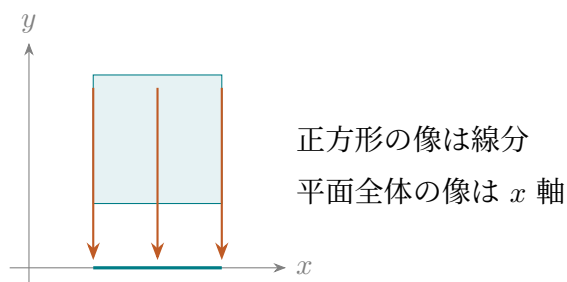


図 4：射影では縦方向が潰れます。 $\det P = 0$ で、2 次元の面積は 0 になります。

像と核は、残る方向と潰れる方向を表す

$$\text{Im } A = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}, \quad \ker A = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

射影 P では、像は x 軸、核は y 軸です。一般に $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$ と $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ は同値なので、非零の核があれば異なる入力と同じ出力になります。

行列式と逆行列

$\det A = ad - bc \neq 0$ なら、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

実際、 $A \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc)I$ なので、割ると $AA^{-1} = I$ となります。逆に $\det A = 0$ なら 2 本の列は一次従属で、像は直線または原点となり、逆変換はありません。

次元削減とのつながり

例えばデータを座標軸に射影すると、その方向の情報を残し、他の情報を捨てます。主成分分析では、中心化したデータのばらつきをよく残す方向を選んで射影します。低次元の出力だけから元のデータを一般に完全復元することはできません。

計算上の補足：可逆でも、 $\text{diag}(1, \varepsilon)$ のように 1 方向を強く縮めると、逆変換はその方向の誤差を $1/|\varepsilon|$ 倍します。可逆性と誤差に対する安定性は区別が必要です。

6 本文の練習問題を解く

問 1：合成順序と逆変換

伸縮と 90 度回転の行列は、基底の行き先から

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

まず S 、次に R を施す合成は RS です。計算すると

$$RS = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad SR = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

点 $(1, 2)^\top$ の移り方を、途中の点も含めて比較します。

$$\begin{aligned} (1, 2)^\top &\xrightarrow{S} (2, 6)^\top \xrightarrow{R} (-6, 2)^\top, \\ (1, 2)^\top &\xrightarrow{R} (-2, 1)^\top \xrightarrow{S} (-4, 3)^\top. \end{aligned}$$

横と縦で伸ばす倍率が異なるため、回転の前後で伸ばされる方向が変わります。なお、一様な伸縮 kI と回転なら順序を交換できます。

元に戻すには、最後の回転を先に取り消し、次に伸縮を取り消します。

$$(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

確かに、これを $(-6, 2)^\top$ に掛けると $(1, 2)^\top$ に戻ります。

問 2：標準基底による変換行列の構成

基底の像を列に並べて

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(2, -1) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$\det A = -1 - 6 = -7 \neq 0$ なので可逆です。面積は 7 倍になり、向きは反転します。

問 3：面積の変化率

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 4.$$

したがって、面積は $|4| = 4$ 倍になり、向きは保たれます。

合成の計算で迷ったら

$(BA)x = B(Ax)$ と括弧を補って読みます。右の行列が先です。逆変換では操作の順番を逆にして、それぞれを逆変換に置き換えます。

7 追加の練習問題

図を描く問題では、まず 2 本の基底の像を描き、それらの和を使って単位正方形の像を完成させましょう。解答は次ページです。

問 4：図形の像と面積

$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。単位正方形の 4 頂点の像を求め、図を描け。面積は何倍になるか。長さはすべて保存されるか。

問 5：回転と鏡映の見分け方

次の行列が表す幾何学的変換を答え、行列式の符号を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

問 6：潰れる方向と残る方向

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について、行列式、像、核を求めよ。 $(0,0)^\top$ 以外で原点に写るベクトルを 1 つ挙げ、逆変換がない理由を説明せよ。

問 7：三角形の面積

頂点が $(0,0), (2,0), (0,3)$ の三角形に、 $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を作用させる。変換前後の面積と、向きの変化を求めよ。

問 8：合成と面積倍率

$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。 HS と SH を求めよ。異なる変換であっても面積倍率が一致することを確認せよ。

問 9：内分点と退化

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。点 $\mathbf{p} = (0,0)^\top$ 、 $\mathbf{q} = (3,3)^\top$ を 1:2 に内分する点と、その像を求めよ。次に、 $\mathbf{p} = (1,0)^\top$ 、 $\mathbf{q} = (1,3)^\top$ では何が起こるか説明せよ。

問 10：逆変換による復元

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ によって、あるベクトル $\mathbf{x}$ が $(5,3)^\top$ に写った。 A^{-1} と $\mathbf{x}$ を求めよ。逆変換の面積倍率も答えよ。

発展：問 11

$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ は面積を保つ。これだけで長さや角度も保つといえるか。 $\mathbf{e}_1$ の長さと、 $\mathbf{u} = (1,1)^\top$ 、 $\mathbf{v} = (1,-1)^\top$ の内積を変換前後で比べよ。

8 追加問題の解答と考え方

問 4

$(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ は、それぞれ $(0,0), (1,0), (3,1), (2,1)$ に写ります。底辺 1、高さ 1 の平行四辺形で、面積倍率は 1 です。 e_2 の像は $(2,1)^\top$ で長さ $\sqrt{5}$ となるので、長さは保存されません。

問 5

$A(x,y)^\top = (y,x)^\top$ は直線 $y=x$ に関する鏡映で、 $\det A = -1$ 。 $B(x,y)^\top = (-x,-y)^\top$ は原点を中心とする 180 度回転で、 $\det B = 1$ 。両座標の符号を変えても、平面の向きは反転しません。

問 6

$\det C = 4 - 4 = 0$ 。 $C(x,y)^\top = (x+2y)(1,2)^\top$ なので、

$$\text{Im } C = \{t(1,2)^\top : t \in \mathbb{R}\}, \quad \ker C = \{t(-2,1)^\top : t \in \mathbb{R}\}.$$

例えば $(-2,1)^\top$ と原点が同じ原点に写るため、逆変換はありません。

問 7

元の面積は $2 \cdot 3/2 = 3$ 。 $\det D = -2$ より、変換後の面積は 6 で、向きは反転します。頂点の像 $(0,0), (4,0), (3,-3)$ から面積 6 を確認できます。

問 8

$HS = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $SH = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。行列は異なりますが、どちらも行列式は 2 で面積倍率は 2 です。一般に $\det(HS) = \det H \det S = \det(SH)$ です。

問 9

内分点は $r = (2/3)p + (1/3)q = (1,1)^\top$ 、像は $(1,0)^\top$ 。端点の像 $(0,0)^\top, (3,0)^\top$ を 1:2 に内分します。後半では端点も内分点も $(1,0)^\top$ に写るので、像の線分比は通常の比として定義できません。

問 10

$\det A = 1$ より $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 。したがって $x = A^{-1}(5,3)^\top = (2,1)^\top$ 。逆変換の面積倍率は $1/|\det A| = 1$ です。

問 11

長さ・角度を保つとはいえません。 e_1 の長さは 1 から 2 になります。また、元は $u \cdot v = 0$ ですが、

$$(Fu) \cdot (Fv) = (2, 1/2) \cdot (2, -1/2) = 4 - 1/4 = 15/4 \neq 0.$$

直交していた 2 本のベクトルも、変換後には直交しません。面積の保存だけでは、長さや角度の保存は保証されません。