

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

写像と線形性を具体例で理解する

定義域・終域・重ね合わせ・基底・アフィン写像

1 計算式だけでは、写像は決まらない

「入力を決めると、出力がただ 1 つ決まる」という規則が写像です。関数と写像は基本的に同じ概念ですが、写像という言葉を使うと、数だけでなくベクトルや集合の要素も扱う視点が明確になります。

記号・用語	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ の場合
定義域 X	入力として許される集合 $\mathbb{R}$
終域 Y	出力先として指定した集合 $\mathbb{R}$
像 $f(X)$	実際に出てくる値の集合 $[0, \infty)$

終域には、実際には出力されない値が含まれていても構いません。この例では、負の実数は終域に属しますが、像には属しません。

像は「送り先」、逆像は「条件を満たす入力全体」

$A = \{-2, 0, 1\}$ 、 $B = \{1, 4\}$ とすると、

$$f(A) = \{0, 1, 4\}, \quad f^{-1}(B) = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

逆像を求めるときは「 x^2 が 1 または 4 になる入力は何か」と考えます。また、 $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$ です。該当する入力がない場合も、逆像は空集合として定義できます。

逆像と逆写像は別の概念

逆像 $f^{-1}(B)$ は、どの写像でも定義できる集合です。一方、逆写像 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ は、 f が全単射のときに定義できます。同じ記号でも、何を入力しているかに注意しましょう。

写像にならない対応

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ として $x \mapsto 1/x$ と書くと、 $x = 0$ で出力が決まりません。定義域を $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ にすれば写像になります。また「 x に $\pm\sqrt{x}$ を対応させる」規則は、 $x > 0$ で出力が 2 つになるため、実数値の写像ではありません。**読み方**：2～5 節で図と証明、6 節で本文の問題の解説、7～8 節で追加問題と解答を扱います。以下、線形性の議論では実ベクトル空間を考えます。

2 単射と全射は、別々に確かめる

単射は「出力から入力を高々 1 つに絞れる」こと、**全射**は「終域のどの値にも到達できる」ことです。全単射なら、終域の各値に対応する入力がちょうど 1 つ存在します。

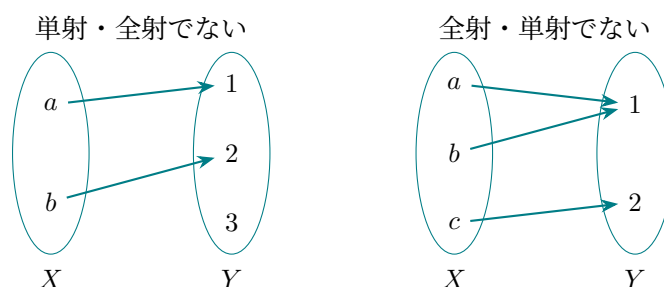


図 1：左では終域の 3 に届きません。右では異なる入力 a, b が同じ 1 に対応します。どちらも、各入力から矢印がちょうど 1 本出るので写像です。

同じ x^2 でも、集合を変えると分類が変わる

定義域 $\rightarrow$ 終域	単射か	全射か
$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	いいえ： $f(-1) = f(1)$	いいえ： -1 に届かない
$\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$	いいえ	はい
$[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	はい	いいえ
$[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$	はい	はい

最後の写像には逆写像 $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ があります。 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の x^2 に、そのまま逆写像があるわけではありません。

合成は、右にある写像から使う

$f(x) = x + 1$ 、 $g(x) = 2x$ (どちらも $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) なら、

$$(g \circ f)(x) = 2(x + 1) = 2x + 2, \quad (f \circ g)(x) = 2x + 1.$$

順番を変えると、一般に結果も変わります。

逆写像は「両方向に戻せる」

$f: X \rightarrow Y$ が全単射なら、 $f^{-1}(f(x)) = x$ と $f(f^{-1}(y)) = y$ が、それぞれすべての $x \in X$ 、 $y \in Y$ で成り立ちます。

3 線形性は「線形結合を保つ」こと

加法性と斉次性をまとめると、任意の u, v と実数 a, b に対して

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

となります。これが重ね合わせの原理を計算に使う形です。

なぜ 2 つの条件をまとめられるのか

加法性を使い、次に斉次性を使うと、

$$T(au + bv) = T(au) + T(bv) = aT(u) + bT(v).$$

逆に、この式で $a = b = 1$ とすれば加法性、 $b = 0$ とすれば斉次性が得られます。同様に、3 個以上のベクトルの線形結合にも拡張できます。

線形なら原点を原点に写す。しかし逆は成り立たない

斉次性で $a = 0$ とすると $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ です。したがって、 $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ なら、その場で非線形と判定できます。しかし、 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ だけでは線形とは限りません。

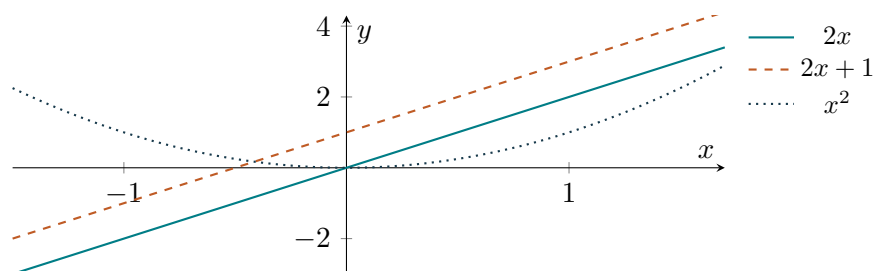


図 2: $2x$ は線形、 $2x + 1$ はアフィンで非線形、 x^2 は原点を通りますが線形ではありません。ここでの「非線形」は線形性を満たさないという意味です。

例えば $h(x) = x^2$ では $h(1+1) = 4$ ですが、 $h(1) + h(1) = 2$ です。たった 1 つの反例で、線形でないことが示せます。

判定の順序

まず $T(\mathbf{0})$ を調べます。原点に写る場合は、一般の入力で加法性・斉次性を証明するか、どちらかが破れる具体例を探します。数例で一致するだけでは、線形性の証明になりません。

4 基底の像が、変換全体を決める

$\mathbb{R}^2$ の標準基底を $e_1 = (1, 0)^\top$ 、 $e_2 = (0, 1)^\top$ とします。どのベクトルも $(x, y)^\top = xe_1 + ye_2$ と書けるので、線形写像なら

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xT(e_1) + yT(e_2).$$

例えば $T(e_1) = (2, 1)^\top$ 、 $T(e_2) = (-1, 3)^\top$ なら、

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

行列の第 1 列は第 1 基底の像、第 2 列は第 2 基底の像です。列の並びには、基底の順番が反映されています。

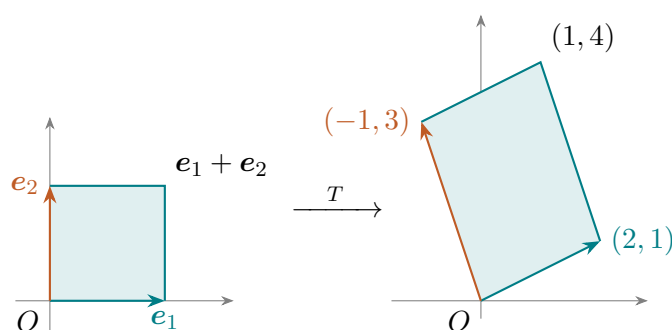


図 3：単位正方形は平行四辺形に写ります。 $(1, 1)$ の像は、2 本の基底の像の和 $(1, 4)$ になります。左右の図の表示倍率は異なります。

「一意に決まる」の理由

同じ基底の像をもつ線形写像 T, S なら、任意の (x, y) について

$$T(x, y) = xT(e_1) + yT(e_2) = xS(e_1) + yS(e_2) = S(x, y).$$

したがって、すべての入力で一致します。逆に、基底の像を任意に選び、上の線形結合で出力を定めれば、線形写像が得られます。

線形性の仮定が必要

$F(x, y) = (2x - y + xy, x + 3y)$ も、この 2 つの基底では T と同じ値を取ります。しかし $F(1, 1) = (2, 4) \neq (1, 4)$ です。基底の像だけから全体を決められるのは、**線形写像であるとわかっているとき**です。

5 アフィン写像と AI での使われ方

線形写像 $L(x) = Ax$ に一定の移動 b を加えたものが、アフィン写像 $T(x) = Ax + b$ です。 $b = 0$ の場合は線形写像でもあります。

固定費を足すと、なぜ加法性が破れるのか

$g(x, y) = 300x + 400y + 500$ について、商品を買わなくても $g(0, 0) = 500$ です。また、 $u = (1, 0)$ 、 $v = (0, 1)$ なら

$$g(u + v) = 1200, \quad g(u) + g(v) = 800 + 900 = 1700.$$

別々の計算では固定費を 2 回、まとめた計算では 1 回だけ加えるので、結果が異なります。線形性を数学的に調べる際は、この式を $\mathbb{R}^2$ 上の写像として考えます。実際の購入個数の集合は、負の数倍に閉じていないためベクトル空間ではありません。

アフィン写像にも、保たれる関係がある

任意の実数 t について、

$$\begin{aligned} T((1-t)u + tv) &= (1-t)Au + tAv + b \\ &= (1-t)T(u) + tT(v). \end{aligned}$$

係数の和が 1 なので、定数項も一致します。特に $t = 1/2$ とすれば、線分の中点は、両端の像の midpoint に写ります。

モデル・処理	写像としての見方
切片つき回帰	固定した係数のもとで、入力 x から予測値への対応は $w^T x + b$ というアフィン写像
全結合層の計算	活性化関数を適用する前は $Ax + b$
ReLU	$r(x) = \max(0, x)$ 。 $r(1) + r(-1) = 1$ だが $r(0) = 0$ なので、加法性を満たさない

線形な処理を重ねても、線形のまま

$L(x) = Ax$ 、 $M(y) = By$ なら、 $(M \circ L)(x) = BAx$ です。アフィン写像同士も、

$$B(Ax + b) + c = BAx + (Bb + c)$$

という 1 つのアフィン写像にまとめられます。

ニューラルネットワークとのつながり

アフィン写像だけを何層重ねても、表せる写像はアフィンのままです。層の間に非線形な活性化関数を入れることが、より複雑な関係を表すために重要になります。

6 本文の練習問題を解く

問 1：線形性の判定

$T_1(x, y) = (2x - y, x + 3y)$ は線形です。行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ を使って $T_1(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ と書けるため、行列の分配法則から

$$T_1(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = A(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aA\mathbf{u} + bA\mathbf{v} = aT_1(\mathbf{u}) + bT_1(\mathbf{v})$$

が任意の $a, b, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ で成り立ちます。

$T_2(x, y) = (x + 1, y)$ は線形ではありません。 $T_2(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$ だからです。これはアフィン写像です。

$T_3(x, y) = (xy, x - y)$ は線形ではありません。 $\mathbf{u} = (1, 0)$ 、 $\mathbf{v} = (0, 1)$ とすると、

$$T_3(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T_3(1, 1) = (1, 0),$$

$$T_3(\mathbf{u}) + T_3(\mathbf{v}) = (0, 1) + (0, -1) = (0, 0).$$

加法性が破れます。 $T_3(0, 0) = (0, 0)$ でも線形とは限らない例です。

問 2：線形写像の値の計算

$T(x, y) = (x + y, 2x - y)$ に、それぞれ代入します。

$$T(1, 2) = (3, 0),$$

$$T(3, 0) = (3, 6),$$

$$T(1, 2) + T(3, 0) = (6, 6).$$

一方、入力を先に足すと $(1, 2) + (3, 0) = (4, 2)$ です。

$$T(4, 2) = (6, 6) = T(1, 2) + T(3, 0).$$

これは加法性の具体的な確認です。一般の線形性は、この写像が行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ で表せることから示せます。

問 3：線形写像の決定

$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ と分解してから、線形性を使います。

$$\begin{aligned} T(x, y) &= xT(1, 0) + yT(0, 1) \\ &= x(2, 1) + y(-1, 3) = \boxed{(2x - y, x + 3y)}. \end{aligned}$$

解答で説明したいこと

「線形である」には任意の入力に通じる証明を、「線形でない」には条件が破れる反例を示します。値の計算では、どこで線形性を使ったかを明記しましょう。

7 追加の練習問題

基本事項の確認から、線形性の応用へ進みます。解答は次ページです。

問 4：像と逆像

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ とします。

- (1) $A = [-2, 1]$ の像 $f(A)$ を求めよ。
- (2) $B = [1, 4]$ の逆像 $f^{-1}(B)$ を求めよ。
- (3) $f^{-1}(\{-2\})$ を求めよ。これが定義できることと、逆写像の存在は同じか。

問 5：定義域と終域

次の各写像を「単射のみ」「全射のみ」「全単射」「いずれでもない」に分類し、理由を述べよ。

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1$
- (2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = |x|$
- (3) $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad h(x) = |x|$

問 6：線形性の判定

次の写像 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は線形か。線形なら行列を示し、線形でなければ反例を示せ。

$$P(x, y) = (x, 0), \quad Q(x, y) = (x, y + 2), \quad R(x, y) = (x^2, y).$$

問 7：基底の像を使った計算

線形写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が $T(1, 0) = (1, 2)$ 、 $T(0, 1) = (3, -1)$ を満たす。 $T(x, y)$ と $T(2, -1)$ を求めよ。

問 8：合成と順序

$S(x, y) = (x + y, y)$ 、 $T(x, y) = (2x, y)$ とする。 $T \circ S$ と $S \circ T$ を求め、それらが等しいかを調べよ。

問 9：原点に写ることは十分か

「 $F(0, 0) = (0, 0)$ で、2つの標準基底の像もわかっているならば、 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は一意に決まる」という主張は正しいか。線形性を仮定しない場合の反例を作れ。

問 10：中点とアフィン写像

$U(x, y) = (2x + 1, y - 3)$ とし、 $\mathbf{p} = (0, 2)$ 、 $\mathbf{q} = (2, 4)$ とする。 U は線形か。また、 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ の中点の像と、 $U(\mathbf{p}), U(\mathbf{q})$ の中点を求めて比較せよ。

発展：問 11

線形写像 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が全単射なら、逆写像 T^{-1} も線形であることを、線形性の定義から証明せよ。

8 追加問題の解答と考え方

問 4

(1) $f(A) = [0, 4]$ 。最小値は $x = 0$ で 0、最大値は $x = -2$ で 4 です。(2) $1 \leq x^2 \leq 4$ より $f^{-1}(B) = [-2, -1] \cup [1, 2]$ 。(3) $\emptyset$ 。逆像は定義できますが、この f は全単射ではないので逆写像はありません。

問 5

(1) 全単射。 $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$ なら $x_1 = x_2$ 。任意の出力 $z \in \mathbb{R}$ に、入力 $(z - 1)/2$ が対応します。(2) いずれでもない。 $g(1) = g(-1)$ で単射でなく、負の数に届かないので全射でもありません。(3) 全射のみ。各 $z \geq 0$ には入力 $x = z$ が対応しますが、単射ではありません。

問 6

P は線形で、行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。 Q は $Q(0, 0) = (0, 2)$ なので非線形。 R は $R(2, 0) = (4, 0) \neq 2R(1, 0) = (2, 0)$ なので非線形です。

問 7

$T(x, y) = x(1, 2) + y(3, -1) = (x + 3y, 2x - y)$ 。よって $T(2, -1) = (-1, 5)$ 。

問 8

$(T \circ S)(x, y) = (2x + 2y, y)$ 、 $(S \circ T)(x, y) = (2x + y, y)$ 。例えば $(0, 1)$ で出力が異なるので、同じ写像ではありません。

問 9

正しくありません。 $F(x, y) = (x, y)$ と $G(x, y) = (x + xy, y)$ は、原点と両標準基底で一致します。しかし $F(1, 1) = (1, 1)$ 、 $G(1, 1) = (2, 1)$ です。線形性がなければ、これら 3 点の値から全体は決まりません。

問 10

$U(0, 0) = (1, -3)$ なので線形ではありません。入力の中点は $(1, 3)$ で、その像は $(3, 0)$ 。両端の像は $(1, -1)$ 、 $(5, 1)$ なので、その中点も $(3, 0)$ です。

問 11

任意の $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^2$ と実数 a, b を取り、 $\mathbf{x}_i = T^{-1}(\mathbf{y}_i)$ と置きます。 T の線形性から

$$T(a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2) = a\mathbf{y}_1 + b\mathbf{y}_2.$$

両辺に T^{-1} を適用すると、

$$T^{-1}(a\mathbf{y}_1 + b\mathbf{y}_2) = a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 = aT^{-1}(\mathbf{y}_1) + bT^{-1}(\mathbf{y}_2).$$

よって逆写像も線形です。全単射という仮定によって、 T^{-1} が終域全体で一意に定義できています。