

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

小さな量を足して、全体を求める

リーマン和・符号つき面積・基本定理・平均値

1 「高さ × 幅」を足し合わせる

$f(x) = x^2$ のグラフの下、区間 $[0, 1]$ の面積を考えます。区間を n 等分し、各小区間の**右端**で高さを決めると、幅は $1/n$ 、第 i 番目の高さは $(i/n)^2$ です。

$$R_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}.$$

ここで R_n は有限個の長方形の面積の和です。定積分そのものではなく、定積分を近似する値です。

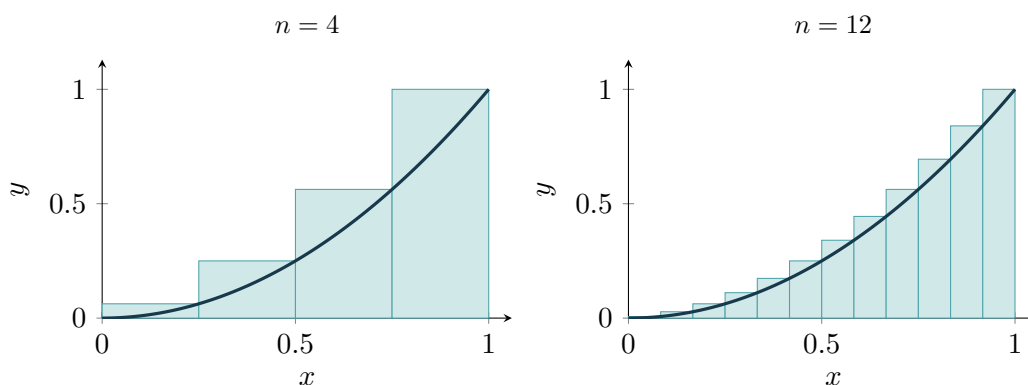


図 1：右端の高さによる近似。 x^2 は増加するため、各長方形は曲線を上から覆い、この和は実際の面積より大きくなります。分割を細かくすると差が小さくなります。

4 等分の計算を、実際に書く

$$R_4 = \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2 \right\} \frac{1}{4} = \frac{30}{64} = 0.46875.$$

幅 $1/4$ を掛け忘れると、面積ではなく高さの和になります。

「小さな全体量」の単位も確認する

高さが速度 (m/s)、幅が時間 (s) なら、その積は変位 (m) です。高さが流量 (L/s) なら積は流れた量 (L)。定積分は、このような小さな量の和の極限として理解できます。

読み方：2～5 節で定義・証明・応用、6 節で本文の 3 問、7～8 節で追加問題と解答を扱います。特に断らない限り $a < b$ とし、連続な関数を中心に考えます。

2 極限を計算して、面積を確定する

右端の和と左端の和で、同じ値に近づく

平方和の公式 $\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ を使うと、

$$R_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

左端で高さを決めた場合は、

$$L_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

各小区間でどの点を選んでも、その和は L_n と R_n の間に入ります。したがって、等分割での標本点の選び方を変えても極限は $1/3$ です。

分割数 n	左端の和 L_n	右端の和 R_n	差 $R_n - L_n$
4	0.218750	0.468750	0.250000
10	0.285000	0.385000	0.100000
100	0.328350	0.338350	0.010000
∞ (極限)	$1/3$	$1/3$	0

等分割でない場合も考える理由

リーマン積分の定義では、等分割だけでなく、**最大幅 $\|P\|$ が 0 に近づくすべての分割**で同じ極限になることを要求します。連続関数には、この性質が成り立ちます。

今回の x^2 でも、任意の分割での上側と下側の和の差は

$$\begin{aligned} \sum_i (x_i^2 - x_{i-1}^2) \Delta x_i &\leq \|P\| \sum_i (x_i^2 - x_{i-1}^2) \\ &= \|P\| (1^2 - 0^2) = \|P\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

上側・下側の和で挟むことにより、任意の分割と標本点でも同じ面積に近づきます。

分割数が増えるだけでは不十分

例えば $[0, 1/2]$ は 1 区間のままにし、 $[1/2, 1]$ だけを何度も分割すると、分割数は増えても最大幅は $1/2$ のままです。必要なのは、一部だけでなく**すべての小区間の幅が小さくなること**です。

3 定積分と、図形の面積は区別する

$f(x) = x$ を $[-1, 2]$ で積分すると、負の側の三角形は負に数えます。

$$\int_{-1}^2 x dx = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

一方、図形としての面積は $1/2 + 2 = 5/2$ です。これは $\int_{-1}^2 |x| dx$ に等しくなります。

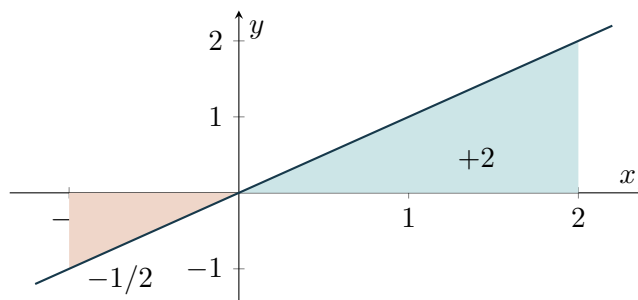


図 2：青緑の領域は正、橙色の領域は負に数えます。面積を求めるときは、両方を正として足します。

基本性質は、和の性質から理解できる

リーマン和では $\sum_i (cf_i + dg_i)\Delta x_i = c \sum_i f_i \Delta x_i + d \sum_i g_i \Delta x_i$ なので、極限でも線形性が成り立ちます。区間を分ける性質も、和を前半と後半に分けることに対応します。

また、 $f \leq g$ なら各長方形の符号つき量が大小関係を保つので、積分も同じ大小関係になります。特に $m \leq f(x) \leq M$ なら

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

絶対値を外に出すと、同じ値とは限らない

一般に

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

この例では左辺は $3/2$ 、右辺は $5/2$ 。正負が相殺されるためです。また、 $\int_a^a f = 0$ 、 $\int_b^a f = -\int_a^b f$ と定めます。区間の向きを逆にしても、図形自体の面積が負になるわけではありません。

4 微積分学の基本定理を理解する

連続関数 f に対して、 $S(x) = \int_a^x f(t) dt$ とします。ここで S は上端 x に依存する関数です。 f が負の部分も含む場合、 S は符号付きの蓄積量と読みます。

小さな区間の「平均の高さ」が $f(x)$ に近づく

$h \neq 0$ に対して、

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

この量と $f(x)$ の差は、 x と $x+h$ の間の区間を I_h として

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \right| \leq \max_{t \in I_h} |f(t) - f(x)|.$$

連続性によって右辺は $h \rightarrow 0$ で 0 になります。 h が正でも負でも成り立つので、区間の内部で

$$\boxed{S'(x) = f(x)}$$

が得られます。連続性が、長方形近似を極限の等式にする根拠です。

面積の計算が、原始関数の差になる理由

$F' = f$ なら $(S - F)' = 0$ なので、 $S - F$ は定数です。 $S(a) = 0$ より $S(x) = F(x) - F(a)$ 。 $x = b$ とすれば、

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)}.$$

例えば $\int_0^1 x^2 dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3$ 。2 節の極限計算と一致します。

定積分の答えに $+C$ は付けない

原始関数として $F + C$ を使っても、 $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$ となり、定数は消えます。端点が固定された定積分の答えは 1 つの数値です。

上端が動く積分には、関数の合成も現れる

例えば $G(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2) dt$ なら、基本定理と合成関数の微分から

$$G'(x) = \{1 + (x^2)^2\} \cdot 2x = 2x(1 + x^4).$$

前提の確認：特異点をまたいで機械的に $F(b) - F(a)$ を使うことはできません。例えば $\int_{-1}^1 1/x dx$ は通常のリーマン積分では定義されず、広義積分としても収束しません。端点だけを代入して 0 とするのは誤りです。

5 平均値と、変化率の集積

関数の平均値は「同じ蓄積量をもつ一定の高さ」

$a < b$ のとき、 $\bar{f} = (b - a)^{-1} \int_a^b f(x) dx$ と定めます。これは

$$\bar{f}(b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

を満たす高さです。連続関数なら、最小値 m と最大値 M の間に $\bar{f}$ があり、中間値の定理によって $f(c) = \bar{f}$ となる $c \in [a, b]$ が存在します。これが積分の平均値の定理の証明です。

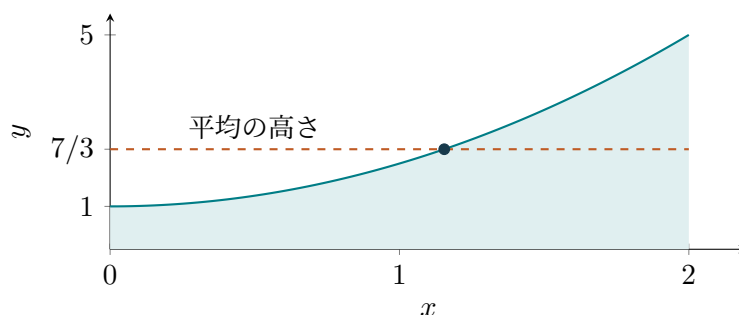


図 3: $f(x) = x^2 + 1$ の $[0, 2]$ での平均値は $7/3$ 。幅 2、高さ $7/3$ の長方形と、曲線の下領域の面積は等しくなります。

積分は「元の量」ではなく「変化量」を与える

$Q'(t) = r(t)$ なら、 $\int_a^b r(t) dt = Q(b) - Q(a)$ です。最終的な量を知るには、初期値を足して $Q(b) = Q(a) + \int_a^b r(t) dt$ とします。

被積分関数	定積分で得られる量	注意すること
速度 $v(t)$	位置の変化（変位）	移動距離は $\int v(t) dt$
限界費用 $C'(q)$	費用の増分	総費用には固定費を足す
確率密度 $p(x)$	区間内に入る確率	$p \geq 0$ 、全体の積分は 1

例えば $C'(q) = 0.04q + 12$ 、 $C(0) = 500$ なら、 $\int_0^{100} C'(q) dq = 1400$ は変動費であり、総費用は 1900 です。また、 $p(x) = 2x$ ($0 \leq x \leq 1$ 、範囲外は 0) は確率密度で、 $\Pr(0 \leq X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} 2x dx = 1/4$ です。

6 本文の練習問題を解く

問 1：基本定理と台形の面積

$F(x) = x^2 + x$ は $2x + 1$ の原始関数です。したがって

$$\int_0^3 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_0^3 = 12 - 0 = \boxed{12}.$$

区間全体で $2x + 1 > 0$ なので面積に等しくなります。平行な 2 辺の長さが 1 と 7、その間の距離が 3 の台形としても、 $(1 + 7) \cdot 3/2 = 12$ です。

問 2：平均値と、その値を取る点

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \frac{14}{3}, \quad \bar{f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}.$$

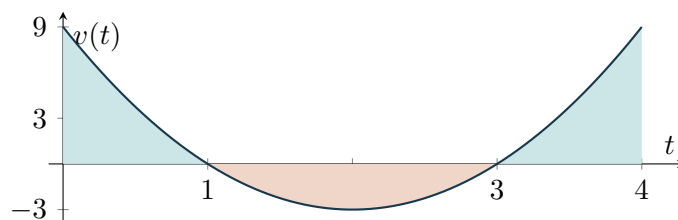
$c^2 + 1 = 7/3$ 、 $c \in [0, 2]$ より $\boxed{c = 2/\sqrt{3}}$ です。平均値を取る点は、一般には区間の midpoint とは限りません。

問 3：速度の符号で区間を分ける

$v(t) = 3(t-1)(t-3)$ より、速度が 0 となる時刻は 1 と 3。原始関数の 1 つを $F(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ とすれば、

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 4, \quad F(3) = 0, \quad F(4) = 4.$$

変位は $F(4) - F(0) = \boxed{4}$ 、移動距離は $4 + 4 + 4 = \boxed{12}$ です。



区間	$[0, 1]$	$[1, 3]$	$[3, 4]$
速度の符号 (内部)	+	-	+
速度の積分	4	-4	4
速さの積分	4	4	4

各区間の符号を確認してから、負の区間の積分の符号を反転して足すと、移動距離を求められます。

7 追加の練習問題

計算結果が符号・単位・面積の大小関係と整合しているかも確認しましょう。

問 4：リーマン和

$f(x) = x$ の区間 $[0, 2]$ を n 等分し、右端で高さを決める。リーマン和 R_n を求め、その極限を計算せよ。 $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2$ を使ってよい。

問 5：符号つき面積と面積

$\int_0^3 (x-1) dx$ と $\int_0^3 |x-1| dx$ を求めよ。2 つの値が異なる理由を図形として説明せよ。

問 6：基本性質

$\int_0^1 f(x) dx = 2$ 、 $\int_1^3 f(x) dx = -1$ とする。次を求めよ。

$$(1) \int_0^3 f(x) dx, \quad (2) \int_3^0 f(x) dx, \quad (3) \int_0^3 \{2f(x) + 1\} dx.$$

問 7：面積関数の微分

$S(x) = \int_1^x (t^2 + 2) dt$ とする。 $S'(x)$ 、 $S(1)$ 、 $S(2)$ を求めよ。さらに $G(x) = \int_1^{2x} (t^2 + 2) dt$ の導関数を求めよ。

問 8：関数の平均値

$f(x) = 3x^2$ の $[0, 2]$ における平均値を求めよ。 $f(c)$ がこの平均値に等しくなる $c \in [0, 2]$ も求めよ。

問 9：変位と移動距離

速度が $v(t) = 2t - 2$ m/s である物体について、 $0 \leq t \leq 3$ の変位と移動距離を求めよ。初期位置が 5 m なら、時刻 3 の位置はいくらか。

問 10：流量と水量

タンクへ流入する水の流量が $r(t) = 2t + 1$ L/min ($0 \leq t \leq 4$) である。流出がなく、初めに 10 L 入っていたとする。4 分間の流入量、4 分後の水量、4 分間の平均流量を求めよ。

発展：問 11

f は $[a, b]$ 上で連続とし、 $a < b$ とする。 $\int_a^b f(x) dx = 0$ なら f は常に 0 か。反例を挙げよ。さらに $f(x) \geq 0$ を仮定した場合はどうか、理由も述べよ。

8 追加問題の解答と考え方

問 4

幅は $2/n$ 、右端は $2i/n$ なので、

$$R_n = \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} \frac{2}{n} = \frac{4}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = 2 + \frac{2}{n} \rightarrow \boxed{2}.$$

底辺 2、高さ 2 の三角形の面積とも一致します。

問 5

$\int_0^3 (x-1) dx = [x^2/2 - x]_0^3 = 3/2$ 。 $[0, 1]$ では負、 $[1, 3]$ では正なので、

$$\int_0^3 |x-1| dx = -\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^3 (x-1) dx = \frac{1}{2} + 2 = \boxed{\frac{5}{2}}.$$

符号つき面積では下側の三角形を引き、図形の面積では足します。

問 6

(1) $2 + (-1) = 1$ 。(2) 向きを逆にして -1 。(3) $2 \int_0^3 f + \int_0^3 1 = 2 \cdot 1 + 3 = \boxed{5}$ 。

問 7

基本定理より $S'(x) = x^2 + 2$ 。 $S(1) = 0$ 、

$$S(2) = \left[\frac{t^3}{3} + 2t \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + 2 \right) = \frac{13}{3}.$$

合成関数では $G'(x) = \{(2x)^2 + 2\} \cdot 2 = \boxed{8x^2 + 4}$ です。

問 8

平均値は $(1/2)[x^3]_0^2 = 4$ 。 $3c^2 = 4$ 、 $c \in [0, 2]$ から $\boxed{c = 2/\sqrt{3}}$ 。

問 9

原始関数は $t^2 - 2t$ 。変位は $[t^2 - 2t]_0^3 = 3$ m。速度が 0 となる $t = 1$ で分けると、移動距離は $-\int_0^1 v + \int_1^3 v = 1 + 4 = 5$ m。時刻 3 の位置は、初期位置に**変位**を足して $5 + 3 = 8$ m です。

問 10

流入量は $\int_0^4 (2t + 1) dt = [t^2 + t]_0^4 = 20$ L。最終水量は $10 + 20 = 30$ L、平均流量は $20/4 = 5$ L/min です。

問 11

一般には常に 0 とは限りません。 $f(x) = x$ 、 $[a, b] = [-1, 1]$ なら積分は 0 ですが、関数は恒等的には 0 ではありません。

一方、連続で $f \geq 0$ なら、積分 0 から $f \equiv 0$ が従います。もしどこかで正なら、連続性によりその近くの正の長さの小区間でも、ある正の値以上となります。その部分の積分が正で、残りも非負なので、全体の積分が 0 であることに矛盾します。