

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

変化率から関数を復元する

原始関数・積分定数・初期条件・基本計算

1 不定積分の答えは、関数の集まり

$f(x) = 2x$ を微分して得られる関数ではなく、**微分すると $2x$ になる関数**を探します。 $F(x) = x^2$ はその 1 つですが、 $x^2 + 2$ や $x^2 - 2$ も同じ導関数を持ちます。

$$\int 2x \, dx = x^2 + C \quad (C \text{ は任意の実数}).$$

この式は、1 つの数値を答える式ではありません。 C を変えることで得られる原始関数全体を表しています。

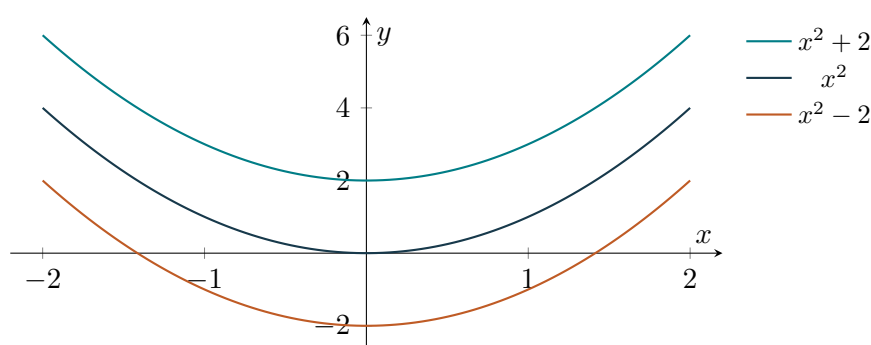


図 1：積分定数の違いは上下の平行移動です。同じ x で比べると、どのグラフも接線の傾きは $2x$ で一致します。

変化率だけでは、出発点の高さがわからない

微分すると定数項は消えます。不定積分では、その失われた情報を C として残します。 $F(0) = 2$ という条件を与えると、 $C = 2$ と決まり、上の 3 本では $F(x) = x^2 + 2$ が選ばれます。

答えを確かめる操作は、微分

原始関数の候補 $G(x)$ が見つかったら、 $G'(x) = f(x)$ を確認します。式の見え方が異なっても、同じ区間で微分が一致すれば、原始関数として正しい場合があります。

読み方：2～4 節で意味・公式・誤りやすい計算、5～6 節で本文の問題、7～8 節で追加問題と解答を扱います。特に断らない限り、関数が定義される 1 つの区間上で考えます。

2 なぜ「定数の違い」だけなのか

原始関数の一意性：平均値の定理による証明

ある区間で $F'(x) = f(x)$ 、 $G'(x) = f(x)$ とします。差 $H(x) = F(x) - G(x)$ を取ると、

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0.$$

その区間内の任意の $a < b$ に対して、平均値の定理から、ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$H(b) - H(a) = H'(c)(b - a) = 0.$$

したがって H は定数です。つまり、同じ区間上の 2 つの原始関数は定数だけ異なります。

初期条件が 1 つあれば、原始関数が 1 つ決まる

f の原始関数の 1 つを G とすると、 $F(x) = G(x) + C$ 。条件 $F(x_0) = y_0$ を代入して

$$C = y_0 - G(x_0), \quad \boxed{F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)}.$$

例えば $F'(x) = 2x$ 、 $F(1) = 5$ なら、 $1 + C = 5$ より $F(x) = x^2 + 4$ です。

定義域が分かれていると、定数は別々に選べる

$f(x) = 1/x$ の定義域は 0 で分かれます。 $x > 0$ と $x < 0$ では、それぞれ別の積分定数を取れます。例えば

$$F(x) = \begin{cases} \log x + 1 & (x > 0), \\ \log(-x) + 7 & (x < 0) \end{cases}$$

も、 $x \neq 0$ で $F'(x) = 1/x$ を満たします。 $F(1)$ を指定しても、負の側の定数までは決まりません。

連続な変化率なら、蓄積から原始関数を作れる

区間上で f が連続なら、定積分を使って

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

と定めると、微積分学の基本定理により $F'(x) = f(x)$ 、 $F(x_0) = y_0$ です。この定積分は x_0 から x までの符号付きの蓄積量で、負の変化率は元の量を減らします。この式では、積分する途中の変数を t として、上端の x と区別しています。 $\int f(x) dx$ は原始関数の族、 $\int_a^b f(x) dx$ は端点を固定すれば 1 つの数値であり、役割が異なります。

3 基本公式を、微分から導く

べき関数：指数を 1 つ増やし、その指数で割る

$n \neq -1$ のとき、微分すると

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n.$$

よって $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1) + C$ です。指数を増やすだけでは、微分時に出る係数を打ち消せません。

被積分関数	指数表示	原始関数の 1 つ
x^3	x^3	$x^4/4$
1	x^0	x
$1/x^2$	x^{-2}	$-x^{-1} = -1/x$
$\sqrt{x}$	$x^{1/2}$	$(2/3)x^{3/2}$
$1/\sqrt{x}$	$x^{-1/2}$	$2\sqrt{x}$

分数指数を一般的に扱うときは $x > 0$ とすると明確です。負の整数指数では $x = 0$ を除きます。公式は、実数値として定義され微分できる区間上で使います。

$n = -1$ だけは、対数が現れる

$n = -1$ をべき関数の公式へ代入すると、分母が 0 になってしまいます。一方、 $\log$ を自然対数とすると、

$$(\log|x|)' = \begin{cases} 1/x & (x > 0), \\ (\log(-x))' = (-1)/(-x) = 1/x & (x < 0). \end{cases}$$

したがって、0 を含まない区間で $\int 1/x dx = \log|x| + C$ です。

定数・指数関数・線形性

$(kx)' = k$ 、 $(e^x)' = e^x$ なので、 $\int k dx = kx + C$ 、 $\int e^x dx = e^x + C$ です。また $F' = f$ 、 $G' = g$ なら

$$(aF + bG)' = af + bg \implies \int (af + bg) dx = aF + bG + C.$$

積分定数は最後に 1 つにまとめる

項ごとの定数は、結局 1 つの任意定数にまとめられます。式を整理して $+C$ を最後に付けると明確です。この書き方なら、 $a = b = 0$ のときも $\int 0 dx = C$ を正しく表せます。

4 よくある間違いを、微分で見抜く

計算	誤った候補	正しい答え
$\int x^2 dx$	$x^3 + C$	$x^3/3 + C$
$\int x^{-2} dx$	$x^{-1} + C$	$-x^{-1} + C$
$\int 1/x dx$	べき公式に代入	$\log x + C$
$\int 5 dx$	$5 + C$	$5x + C$
$\int e^{2x} dx$	$e^{2x} + C$	$e^{2x}/2 + C$

例えば $(-x^{-1})' = x^{-2}$ です。負の指数では、係数と指数の両方の符号を確認しましょう。

合成関数は、内側の微分も確認する

$(e^{ax})' = ae^{ax}$ なので、 $a \neq 0$ のとき

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

同様に、 $a \neq 0$ 、 $n \neq -1$ なら、適切な定義域で

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C.$$

微分すると外側から $n+1$ 、内側から a が掛かるので、両方で割ります。これは、後に学ぶ置換積分の基本的な例です。

積の積分は、積分の積にならない

$\int x \cdot x dx = x^3/3 + C$ です。一方、各因子の原始関数 $x^2/2$ を掛けると $x^4/4$ で、その微分は x^3 です。被積分関数 x^2 に戻りません。

線形性で分けられるのは、和と定数倍

$\int (f + g) dx$ は項別に計算できますが、 $\int fg dx$ を原始関数の積にすることはできません。積や商には、展開・置換・部分積分など別の工夫が必要です。

本文の例題を確認する

0 を含まない区間で、

$$\int \left(6x^2 - \frac{8}{x} + 7e^x \right) dx = 2x^3 - 8 \log|x| + 7e^x + C.$$

微分すると各項が $6x^2, -8/x, 7e^x$ に戻ります。 $x = 0$ では被積分関数が定義されず、そこをまたぐ1つの区間で原始関数を考えることはできません。

5 本文の基本問題を解く

問 1 (1)：多項式は項ごとに積分する

$$\begin{aligned}\int (6x^2 - 4x + 1) dx &= 6\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + C \\ &= \boxed{2x^3 - 2x^2 + x + C}.\end{aligned}$$

確認すると、 $(2x^3 - 2x^2 + x + C)' = 6x^2 - 4x + 1$ です。

問 1 (2)：負の指数と符号に注意する

$$\begin{aligned}\int (2e^x - 3x^{-2}) dx &= 2e^x - 3\frac{x^{-1}}{-1} + C \\ &= \boxed{2e^x + \frac{3}{x} + C} \quad (x \neq 0).\end{aligned}$$

$(3/x)' = -3/x^2$ なので、答えの $3/x$ の前の符号は正です。正負どちらかの区間上で考えます。

問 1 (3)：根号を分数指数に直す

$x > 0$ で $\sqrt{x} = x^{1/2}$ 、 $1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$ より、

$$\begin{aligned}\int \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= 4\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C \\ &= \boxed{\frac{8}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + C}.\end{aligned}$$

問 2：一般形を求めてから条件を代入する

$F'(x) = 3x^2 - 4x + 2$ を積分して、

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + C.$$

次に $F(1) = 0$ を使うと $1 - 2 + 2 + C = 0$ なので $C = -1$ 。したがって

$$\boxed{F(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1}.$$

初期条件付きの答えは、2 つを検算する

微分して元に戻るかに加えて、指定された点を通るかも確認します。この例では $F'(x) = 3x^2 - 4x + 2$ と $F(1) = 0$ の両方を満たしています。

6 限界費用から総費用を復元する

本文・問 3：固定費が積分定数を決める

ここでは費用関数を $C(q)$ 、積分定数を K と書き分けます。生産量 $q \geq 0$ を連続量として近似するモデルです。

$$C'(q) = 0.04q + 12 \implies C(q) = 0.02q^2 + 12q + K.$$

固定費 $C(0) = 500$ から $K = 500$ 。したがって、

$$C(q) = 0.02q^2 + 12q + 500.$$

$q = 100$ では $C(100) = 200 + 1200 + 500 = 1900$ 。平均費用は $C(100)/100 = 19$ です。

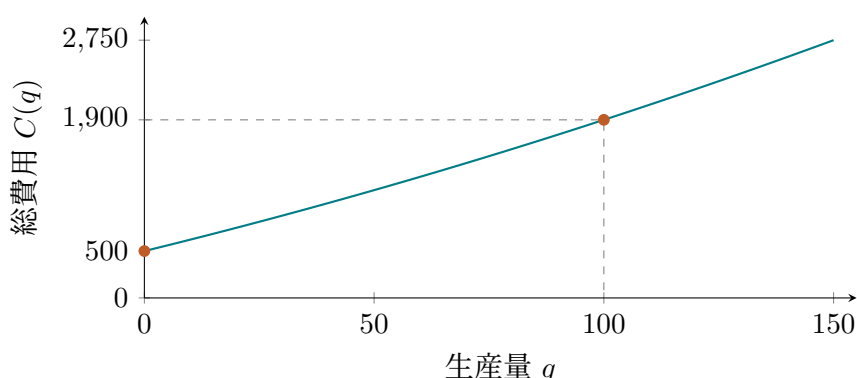


図 2：生産量 0 でも固定費 500 が必要です。導関数が正なので総費用は増加し、導関数も増えるので傾きが次第に大きくなります。

総費用・平均費用・限界費用は異なる

量	意味	$q = 100$
総費用 $C(q)$	生産量 q に対して必要な費用全体	1900
平均費用 $C(q)/q$	1 単位あたりの平均費用 ($q > 0$)	19
限界費用 $C'(q)$	生産量に対する費用の瞬間変化率	16

費用を円、生産量を個で測るなら、後二者の単位は円／個です。限界費用 16 は、次の 1 個の費用増加の近似であり、厳密な差は $C(101) - C(100) = 16.02$ です。

固定費は微分では見えない

固定費が 500 でも 1000 でも、導関数は同じです。限界費用だけから固定費は復元できず、 $C(0)$ などの追加情報が必要になります。

7 追加の練習問題

不定積分では積分定数を付け、初期条件がある場合は定数を決めなさい。答えは微分して確認しましょう。

問 4：基本公式の確認

次の不定積分を求めよ。(2) は $x > 0$ 、(3) は 0 を含まない区間で考える。

$$(1) \int (8x^3 - 6x + 5) dx, \quad (2) \int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx,$$

$$(3) \int \left(\frac{5}{x} + 2e^x \right) dx.$$

問 5：誤った計算を直す

ある学生が $\int (3x^2 + 2x^{-2}) dx = x^3 + 2x^{-1} + C$ と答えた。右辺を微分して誤りを示し、正しい答えを求めよ。

問 6：条件から 1 つの関数を決める

$F'(x) = 4x - 3$ 、 $F(2) = 5$ を満たす $F(x)$ を求めよ。

問 7：速度から位置を求める

時刻 $t \geq 0$ における速度が $v(t) = 6t - 4$ m/s、初期位置が $s(0) = 3$ m である。位置 $s(t)$ 、 $s(2)$ 、時刻 0 から 2 までの変位 $s(2) - s(0)$ を求めよ。変位は移動距離と必ず一致するか。

問 8：合成関数の積分

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^{3x} dx, \quad (2) \int 6(2x + 1)^2 dx.$$

問 9：定義域と積分定数

$x \neq 0$ で $F'(x) = 1/x$ 、かつ $F(1) = 2$ とする。 $x > 0$ における $F(x)$ を求めよ。 $x < 0$ の部分もこの条件だけで決まるか。

問 10：限界費用からの復元

総費用 $C(q)$ が $C'(q) = 0.1q + 8$ 、 $C(0) = 200$ を満たす。 $C(q)$ 、 $C(20)$ 、 $q = 20$ での平均費用と限界費用を求めよ。

発展：問 11

同じ区間で $F'(x) = G'(x)$ なら $F - G$ は定数であることを示せ。さらに、区間内の 1 点で $F(x_0) = G(x_0)$ なら、区間全体で $F = G$ となる理由を述べよ。

8 追加問題の解答と考え方

問 4

$$(1) 2x^4 - 3x^2 + 5x + C,$$

$$(2) 2x^{3/2} - 4\sqrt{x} + C,$$

$$(3) 5\log|x| + 2e^x + C.$$

(2) は $x > 0$ 、(3) は正の区間か負の区間上での式です。

問 5

誤った候補の微分は $3x^2 - 2x^{-2}$ で、第 2 項の符号が一致しません。正しい答えは $x^3 - 2/x + C$ です。

問 6

$F(x) = 2x^2 - 3x + C$ 。 $F(2) = 8 - 6 + C = 5$ より $C = 3$ 。したがって $F(x) = 2x^2 - 3x + 3$ 。

問 7

$s'(t) = v(t)$ より、 $s(t) = 3t^2 - 4t + K$ 。初期位置から $K = 3$ なので、

$$s(t) = 3t^2 - 4t + 3, \quad s(2) = 7 \text{ m}, \quad s(2) - s(0) = 4 \text{ m}.$$

速度は $t = 2/3$ で負から正へ変わり、そのとき $s(2/3) = 5/3$ m です。移動距離は $(3 - 5/3) + (7 - 5/3) = 20/3$ m となり、変位 4 m とは異なります。

問 8

(1) $e^{3x}/3 + C$ 。(2) $(2x + 1)^3 + C$ 。後者は微分すると $3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2$ です。

問 9

$x > 0$ では $F(x) = \log x + 2$ 。 $x < 0$ では $F(x) = \log(-x) + K$ と書け、 K は任意です。定義域が 0 で分かれているので、正の側の条件は負の側の定数を決めません。

問 10

$C(q) = 0.05q^2 + 8q + 200$ 。よって $C(20) = 20 + 160 + 200 = 380$ 、平均費用は $380/20 = 19$ 、限界費用は $0.1 \cdot 20 + 8 = 10$ です。

問 11

$H = F - G$ と置けば $H' = 0$ 。区間内の任意の 2 点 $a < b$ に平均値の定理を適用すると、 $H(b) - H(a) = H'(c)(b - a) = 0$ です。よって H は定数です。さらに $F(x_0) = G(x_0)$ なら $H(x_0) = 0$ なので、その定数は 0。したがって区間全体で $F = G$ です。