

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

## グラフを読み、式で確かめる

市場均衡・図形の変換・二次曲線

### 1 グラフを読む前に、軸と範囲を確認する

グラフは、入力と出力の組を点として表したものです。まず「横軸と縦軸は何か」「単位は何か」「どの範囲を描いているか」を確認します。同じ数式でも、軸の縮尺を変えると見た目の印象は変わります。

| 読み取るもの    | 数式で確認する方法                                 |
|-----------|-------------------------------------------|
| $y$ 軸との交点 | $x = 0$ が定義域にあるか確認し、 $f(0)$ を求める。         |
| $x$ 軸との交点 | $f(x) = 0$ を解く。交点がない場合もある。                |
| 2 曲線の交点   | $f(x) = g(x)$ を解き、共通の出力を求める。              |
| 区間での変化率   | $\{f(x_2) - f(x_1)\} / (x_2 - x_1)$ を求める。 |

例：同じ増加を、異なる縦軸で描く

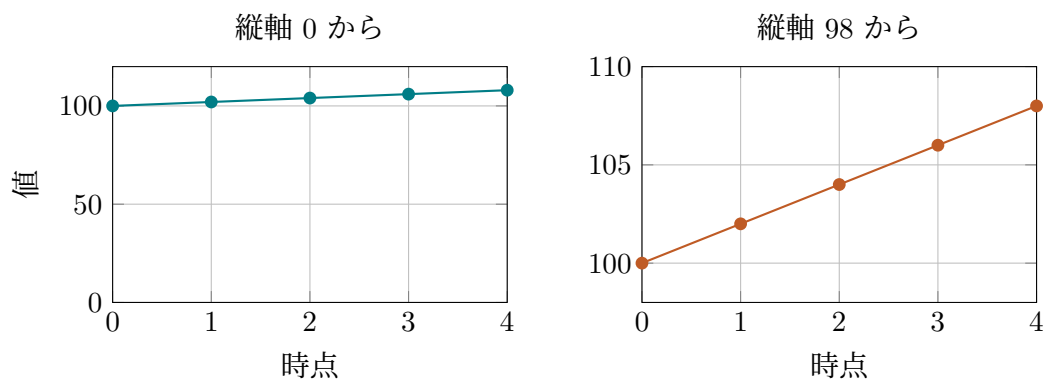


図 1：どちらも  $y = 100 + 2t$  です。傾きは 1 時点あたり 2 であり、描画上の角度が変わっても数値上の変化率は変わりません。

#### 形の観察と、結論の確認を組み合わせる

図から交点や最大値の候補を探し、式で正確に求めます。描画範囲の外に別の交点がある可能性や、点を結ぶ線が観測されていない値を補間している可能性も確認します。グラフの傾向だけで因果関係は決まりません。

## 2 市場均衡：価格と数量のどちらを入力にするか

本文の逆需要・逆供給関数は

$$P_d(Q) = 120 - 2Q, \quad P_s(Q) = 20 + \frac{1}{2}Q.$$

数量を横軸、価格を縦軸に置くと、交点は  $(Q, P) = (40, 40)$  です。

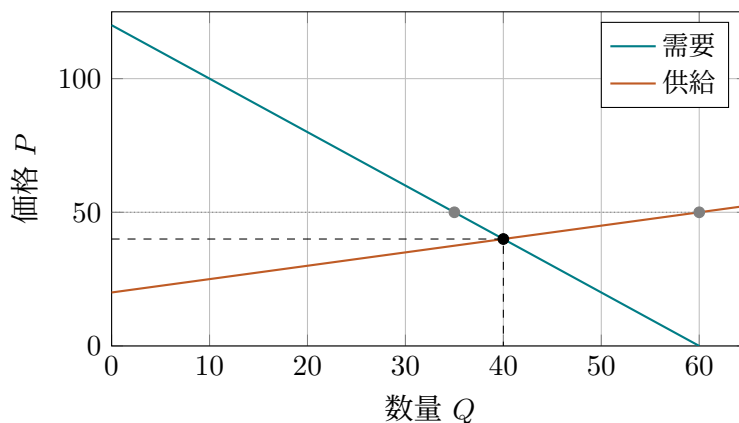


図 2：本文の式を実際を目盛で描いた図。価格 50 では、需要量 35、供給量 60 となり、差 25 が超過供給です。

### 数量を価格の関数に戻す

それぞれを  $Q$  について解けば、

$$Q_d(P) = 60 - \frac{P}{2}, \quad Q_s(P) = 2P - 40.$$

したがって、 $P = 50$  では  $Q_d = 35, Q_s = 60$ 、 $P = 30$  では  $Q_d = 45, Q_s = 20$  で超過需要 25 です。ここでは両数量が非負となる価格範囲で比較しています。

### 曲線上の移動と、曲線そのものの移動

価格だけの変化は同じ曲線上の移動です。一方、需要条件が変わり  $P_d(Q) = 140 - 2Q$  になると、需要曲線が上へ 20 移動します。供給を固定すれば、 $140 - 2Q = 20 + Q/2$  より、新しい均衡は  $(Q, P) = (48, 44)$  です。

#### 交点の存在と、そこへ近づくことは別

連立方程式は均衡の位置を与えます。実際に価格が均衡へ収束するかは、価格調整の仕組みや時間の遅れなどにも依存します。交点を計算するだけで収束が証明されるわけではありません。

### 3 グラフ変換：点を動かし、元の座標を代入する

元の点を  $(u, v)$ 、移した後の点を  $(x, y)$  とします。元の点が  $F(u, v) = 0$  を満たすことから、変換後の式を導きます。

#### 右へ $p$ 、上へ $q$ の平行移動

$x = u + p, y = v + q$  なので、逆に  $u = x - p, v = y - q$  です。よって

$$\boxed{F(x - p, y - q) = 0}.$$

$y = f(x - p) + q$  に現れる「 $-p$ 」は、右への移動と矛盾しません。元の入力を逆算するための符号です。例えば  $y = (x - 2)^2 + 1$  の頂点は  $(2, 1)$  です。

#### 横に $a$ 倍、縦に $b$ 倍の伸縮

$x = au, y = bv$  なら  $u = x/a, v = y/b$  より、

$$F(x/a, y/b) = 0, \quad \boxed{y = bf(x/a)}.$$

$a, b \neq 0$  とします。負の倍率は、絶対値による伸縮に加えて鏡映を含みます。例えば  $f(2x)$  は横に 2 倍ではなく、横に  $1/2$  倍です。

#### 回転後に逆回転を代入する理由

反時計回りに  $\theta$  回転すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

逆回転から  $u = x \cos \theta + y \sin \theta, v = -x \sin \theta + y \cos \theta$ 。これを  $F(u, v) = 0$  へ代入すれば本文の公式が得られます。

#### 回転すると関数でなくなることがある

放物線  $v = u^2$  を 90 度回転すると  $x = -v, y = u$  なので、 $x = -y^2$  です。 $x = -1$  には  $y = 1, -1$  が対応し、曲線全体を単一の関数  $y = f(x)$  として表せません。

#### 操作の順序を式で確認する

$y = x^2$  を右へ 1、その後横に 2 倍すると  $y = (x/2 - 1)^2$  で頂点は  $(2, 0)$ 。横に 2 倍、その後右へ 1 なら  $y = ((x - 1)/2)^2$  で頂点は  $(1, 0)$  です。順序は一般に交換できません。

## 4 二次曲線：平方完成で中心と長さを読む

例：ずれた楕円を標準形にする

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 8 = 0$$

を平方完成すると、

$$(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 16 \iff \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

中心は  $(2, -1)$ 、横方向の半径は 4、縦方向の半径は 2 です。 $u = (x-2)/4$ ,  $v = (y+1)/2$  とおけば、 $u^2 + v^2 = 1$  になります。

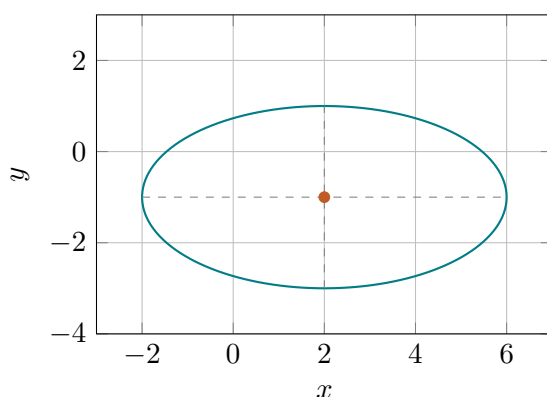


図 3：中心の移動と縦横の伸縮を読み取れます。回転と平行移動だけでは半径 4 と 2 の違いは消えず、円への変換には異なる倍率の伸縮が必要です。

同じ二次式でも、実際の図形を確認する

| 式                | 実平面上の図形                   |
|------------------|---------------------------|
| $x^2 - y^2 = 0$  | $(x-y)(x+y) = 0$ : 2 本の直線 |
| $x^2 = 0$        | 1 本の直線 (重なった直線)           |
| $x^2 + y^2 = 0$  | 原点 1 点                    |
| $x^2 + y^2 = -1$ | 実数の点をもたない                 |

最後の例は実点をもちませんが、代数的な分類では必ずしも「退化」とは呼びません。実点の有無と、代数的な退化は区別します。

発展： $Ax^2 + Bxy + Cy^2$  は実対称行列による二次形式です。軸の回転で対角化すると  $xy$  項が消え、平方完成と伸縮で形を整理できます。

## 5 本文の練習問題：解答と解説

### 問 1：従量税は 2 つの価格の差をつくる

課税前は  $P_c = P_p = P$  なので、 $120 - 2P = 3P - 30$  より

$$P = 30, \quad Q = 60.$$

課税後は  $P_c = P_p + 10$  を代入し、

$$120 - 2(P_p + 10) = 3P_p - 30 \implies P_p = 26.$$

したがって  $P_c = 36, P_p = 26, Q = 48$ 。税収は 1 単位当たりの税額と取引数量の積なので、 $10 \cdot 48 = 480$  です。

#### 税額 10 を、双方の価格変化に分けて見る

消費者価格は 30 から 36 へ 6 上昇し、生産者受取価格は 30 から 26 へ 4 低下します。差の 6 と 4 を合わせて 10 です。課税後も取引数量は双方で 48 に一致しますが、価格は一致しません。

### 問 2：零点から因数分解形を作る

$x = 2, 6$  で 0 なので、 $y = a(x - 2)(x - 6)$  とおけます。 $(0, -12)$  を通る条件から  $12a = -12$ 、すなわち  $a = -1$ 。よって

$$y = -(x - 2)(x - 6) = -x^2 + 8x - 12 = -(x - 4)^2 + 4.$$

頂点は  $(4, 4)$ 、全実数上では  $x = 4$  で最大値  $4$  をとり、最小値はありません。

### 問 3：同じ頂点でも曲がり方が違う

$$g(x) = 2(x - 1)^2 - 3, \quad h(x) = 4(x - 1)^2 - 3.$$

頂点はいずれも  $(1, -3)$  です。 $x$  軸との交点は、

$$g: \left(1 \pm \sqrt{3/2}, 0\right), \quad h: \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

$g$  は元の放物線を縦に 2 倍、右へ 1、下へ 3 移したものです。 $h$  は横に  $1/2$  倍、右へ 1、下へ 3 移したものです。 $x^2$  では横に  $1/2$  倍することが縦に 4 倍することと同じ形を与え、 $h$  の方が同じ高さでの横幅が狭くなります。

## 6 追加問題と解答

- 問 1 逆需要  $P = 90 - Q$ 、逆供給  $P = 10 + Q$  の均衡を求めよ。需要だけが  $P = 110 - Q$  に変化した後の均衡も求めよ。
- 問 2  $y = x^2$  を左へ 2、上へ 3 移した式と頂点を求めよ。
- 問 3  $y = f(x)$  を横に 3 倍、縦に  $1/2$  倍した式を求めよ。
- 問 4  $y = x^2$  を原点中心に反時計回り  $90$  度回転した曲線について、元の点  $(2, 4)$  の像を求め、変換後の式を満たすか確認せよ。
- 問 5  $4x^2 + y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$  を平方完成し、中心と縦横の半径を求めよ。
- 問 6 100 から 110 への変化と、1000 から 1010 への変化について、増加量と増加率を比較せよ。

### 解答・解説

- $90 - Q = 10 + Q$  より、 $(Q, P) = (40, 50)$ 。変化後は  $110 - Q = 10 + Q$  より、 $(Q, P) = (50, 60)$ 。
- $y = (x + 2)^2 + 3$ 、頂点  $(-2, 3)$ 。左への移動では、括弧内の符号が正になる。
- $y = \frac{1}{2}f(x/3)$ 。横の倍率は入力部分に逆数として現れる。
- $(u, v) \mapsto (-v, u)$  より、 $(-4, 2)$ 。変換後の式  $x = -y^2$  に代入すると  $-4 = -2^2$  で成立する。
- $4(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$  より、

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1.$$

中心  $(-1, 3)$ 、横方向の半径 2、縦方向の半径 4。

- 増加量はいずれも 10。増加率はそれぞれ  $10/100 = 10\%$ 、 $10/1000 = 1\%$ 。差を描くか率を描くかによって、見える比較が変わる。

#### 講義で押さえる 4 点

軸・単位・範囲を確認する。交点は連立方程式で確かめる。変換後の式には元の座標を逆算して代入する。二次曲線では平方完成から中心と形を読み取る。