

『AI・データサイエンスのための数学入門』学習補助資料

入力と出力を、集合から整理する

定義域・値域・合成・逆関数・多変数関数

1 式だけでなく、入力と出力先も指定する

関数 $f: X \rightarrow Y$ では、 X のすべての要素に対して、 Y の要素がただ 1 つ定まる必要があります。入力に対応する出力がない場合も、2 つ以上ある場合も、 X 全体での関数にはなりません。

例：同じ x^2 でも、集合の指定が違う

式	定義域	終域	値域
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
x^2	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
x^2	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
x^2	$[-1, 2]$	$\mathbb{R}$	$[0, 4]$

終域は出力先として指定した集合、値域は実際に到達する出力の集合です。例えば 1 行目では、負の数は終域には入りますが、出力としては現れません。

多くの入力と同じ出力へ行っても、関数である

$f(x) = x^2$ では $f(-2) = f(2) = 4$ ですが、各入力の出力は 1 つです。関数であるために、異なる入力の出力まで異なる必要はありません。それは後で使う「単射」という追加の性質です。

定義域を求める基本チェック

式	実数値として必要な条件	最大の定義域
$1/(x-2)$	分母が 0 でない	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$
$\sqrt{x-2}$	根号内が非負	$[2, \infty)$
$1/\sqrt{x-2}$	根号内が正	$(2, \infty)$

約分しても、元の定義域は変わらない

$(x^2 - 1)/(x - 1)$ は $x \neq 1$ で $x + 1$ に等しいですが、元の式は $x = 1$ では未定義です。 $x = 1$ に値 2 を追加するなら、元の関数を拡張した別の関数として扱います。

2 関係式から関数を取り出す

関係 $y^2 = x + 1$ を、 x を入力、 y を出力として見ると、 $x = 3$ で $y = 2, -2$ が得られます。出力が 1 つに決まらないので、関係全体は x の関数ではありません。

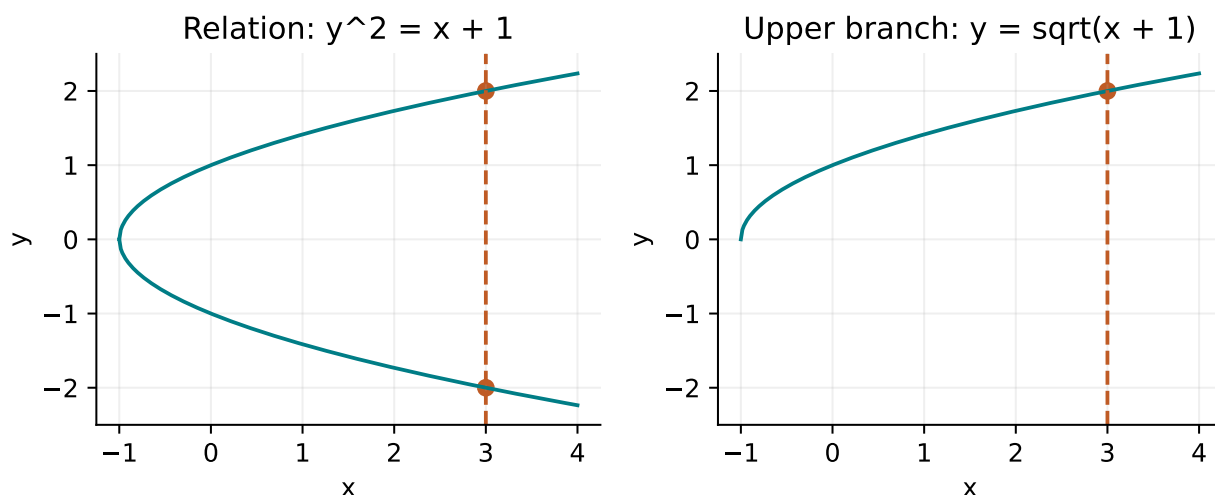


図 1：左は関係全体、右は上側の枝。左では縦線 $x = 3$ が 2 点で交わり、右では 1 点で交わります。

縦線による確認

実数の入力・出力を平面に描いたとき、各 x に対する縦線がグラフとちょうど 1 点で交われば、その x に出力がただ 1 つあります。「高々 1 点」は一意性、「少なくとも 1 点」は存在に対応します。

入力の制限と、出力の枝の選択は別

$x \geq -1$ という入力の制限だけでは、 $x > -1$ で 2 つの出力が残ります。さらに $y \geq 0$ の枝を選ぶことで、 $y = \sqrt{x+1}$ という関数になります。 $y \leq 0$ の枝なら $y = -\sqrt{x+1}$ です。

どちらを入力にするかでも変わる

同じ関係を $x = y^2 - 1$ と解けば、任意の実数 y に対して x が 1 つ定まります。つまり、 y を入力、 x を出力とすれば、制限なしで関数として扱えます。

現実の散布図と関数モデル

学習時間が同じでも試験得点は人によって異なります。そのため、現実の関係を完全に $y = f(x)$ と決めつけず、例えば

$$y = f(x) + \varepsilon$$

と表します。関数 f は予測値や平均的な傾向を与え、 ε が説明しきれない差を表します。入力が同じでも観測値が違ふことは、関数モデルを使えないという意味ではありません。

3 合成関数では、入力を通り道を確認する

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ では、先に f 、次に g を適用します。右側から計算すると覚えると、順序を取り違えにくくなります。

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)).$$

順序を変えると値が変わる例

$f(x) = x + 1, g(x) = x^2$ なら、

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2, \quad (f \circ g)(x) = x^2 + 1.$$

$x = 2$ では、それぞれ 9 と 5 になります。式の見え目が似ていても、処理の順序は同じではありません。

合成の定義域を求める 2 段階

まず x が f の定義域に入ることを確認し、次に $f(x)$ が g の定義域に入ることを確認します。

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}.$$

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ と指定できていれば、この条件は X 全体で満たされます。式から合成する場合は、必要に応じて入力を制限します。

本文の例を 2 段階で読む

$f(x) = 1/(x - 1), g(x) = \sqrt{x}$ の場合、

	$g \circ f$	$f \circ g$
最初の条件	$x \neq 1$	$x \geq 0$
次の条件	$1/(x - 1) \geq 0$	$\sqrt{x} \neq 1$
最終的な定義域	$(1, \infty)$	$[0, \infty) \setminus \{1\}$

データ処理の例：単位をそろえてから予測する

温度 x を摂氏から華氏へ変換する $f(x) = 1.8x + 32$ と、華氏温度 z から量を予測する仮のモデル $g(z) = 2z + 10$ なら、

$$g(f(x)) = 3.6x + 74.$$

入力の単位も、関数をつなぐ条件の一部です。順序を逆にした式が代数的に計算できても、同じ現象のモデルとして意味を持つとは限りません。

4 逆関数は、出力から入力を一意に戻す

逆関数を Y 全体に定義するには、各 $y \in Y$ が出力として現れ（全射）、その入力に 1 つに決まる（単射）必要があります。2 つを合わせた性質が全単射です。

x^2 の逆関数を作るには

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の x^2 は、負の出力に届かず、正の出力に 2 つの入力が対応します。定義域と終域をともに $[0, \infty)$ にすれば、

$$f(x) = x^2, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

として逆関数が作れます。定義域を $(-\infty, 0]$ に選ぶなら、逆関数は $-\sqrt{y}$ です。

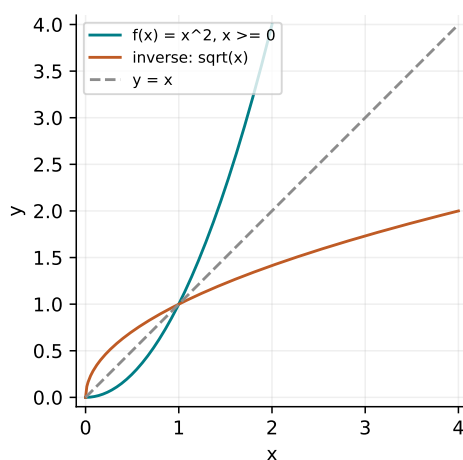


図 2: $x \geq 0$ の x^2 とその逆関数。点 (a, b) を (b, a) に入れ替えるので、2 つのグラフは直線 $y = x$ に関して対称です。

逆関数を求めたら、両方向で確認する

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in X), \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in Y).$$

例えば $f(x) = 2x + 3$ なら、 $f^{-1}(y) = (y - 3)/2$ です。

f^{-1} は、関数の値の逆数ではない

$f^{-1}(y)$ と $1/f(y)$ は別の意味です。上の例なら、 $f^{-1}(y) = (y-3)/2$ に対して、 $1/f(y) = 1/(2y+3)$ です。記号の -1 を通常のべき乗と混同しないようにします。

5 本文の練習問題を解く

問 1：分数式の定義域・値域・逆関数

$f(x) = (2x - 1)/(x + 3)$ は分母が 0 になる $x = -3$ を除き、定義域は $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ です。 $y = f(x)$ を変形すると、

$$y(x + 3) = 2x - 1 \implies (y - 2)x = -1 - 3y.$$

$y = 2$ では $0 = -1$ となって不可能です。 $y \neq 2$ なら、

$$x = \frac{1 + 3y}{2 - y}.$$

この x は $x + 3 = 7/(2 - y) \neq 0$ を満たします。任意の $y \neq 2$ について、許される入力がある 1 つ存在するので、指定された集合間で全単射です。値域は $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ 、逆関数は上の式です。

問 2：合成関数の定義域

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ に入れるためには $-2 \leq x \leq 2$ が必要です。さらに、 $g(f(x))$ の分母が 0 でないために、

$$\sqrt{4 - x^2} \neq 1 \iff x \neq \pm\sqrt{3}.$$

したがって、

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2} - 1}, \quad D = [-2, 2] \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

端点 $x = \pm 2$ では分母は -1 なので、定義域に含まれます。

問 3：放物線の片側に制限する

$$h(x) = x^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2.$$

頂点は $(a, -a^2)$ です。 $x \geq a$ では $x - a \geq 0$ なので、二乗は入力の増加とともに厳密に増加し、値域は $[-a^2, \infty)$ となります。

$y = (x - a)^2 - a^2$ を解くと、制限 $x - a \geq 0$ より

$$h^{-1}(y) = a + \sqrt{y + a^2} \quad (y \geq -a^2).$$

負号の枝は、今回の定義域 $x \geq a$ と合いません。特に $h^{-1}(-a^2) = a$ となり、端点も正しく対応します。

6 多変数関数と追加問題

多変数関数でも、入力はいくつかの組です。例えば $F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ なら、入力 $(1, 2)$ への出力は 8 と一意に決まります。「変数が複数」と「出力が複数に分岐する」は異なります。

機械学習のモデル $f_\theta(x)$ では、 x は入力、 θ は学習するパラメータです。例えば $f_{a,b}(x) = ax + b$ は、 a, b を固定すれば x の関数です。学習は、データに合う a, b を選ぶ操作です。

追加問 A：終域と値域

$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ の値域を求めよ。逆関数は存在するか。

解答：値域は $\{0, 1, 4\}$ 。単射でなく、終域全体へも到達しないので逆関数はありません。終域を値域に変えても単射でない点が残ります。

追加問 B：複数の条件

$F(x) = \sqrt{3-x}/(x+1)$ の最大の実数定義域を求めよ。

解答： $x \leq 3$ と $x \neq -1$ より、 $(-\infty, 3] \setminus \{-1\}$ 。

追加問 C：合成の順序

$f(x) = 2x, g(x) = x - 3$ とする。 $(g \circ f)(4)$ と $(f \circ g)(4)$ を求めよ。

解答： $g(8) = 5$ 、 $f(1) = 2$ 。いずれも定義域は実数全体です。

追加問 D：逆関数と値域

$f: [1, \infty) \rightarrow [5, \infty), f(x) = 3x + 2$ の逆関数を、定義域とともに答えよ。

解答： $f^{-1}(y) = (y - 2)/3 \quad (y \geq 5)$ 。出力は 1 以上です。

追加問 E：平方根と絶対値

$\sqrt{x^2} = x$ はすべての実数で成り立つか。

解答：成り立ちません。 $x = -2$ なら左辺は 2 です。正しくは $\sqrt{x^2} = |x|$ 。逆関数を使う際に定義域の制限が必要な理由でもあります。

追加問 F：2 変数の入力

$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ の $F(1, 2), F(2, 1)$ を求めよ。入力を復元する逆関数はあるか。

解答：それぞれ 8、7。例えば $F(3, 0) = F(0, 2) = 6$ なので単射ではなく、 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ の逆関数はありません。